數學傳播　39卷3期, pp. 76-81

圓內接四邊形與其平分圓的關係

吳　波

一、引言

文 [1] 中我們定義了凸四邊形的“內、外平分四邊形” 和“ 內、外平分圓” 的概念, 然後證明了圓內接凸四邊形的一個有趣結論:

性質1([1]): 圓內接(凸) 四邊形的外心是其內、外平分圓的連心線的中點。
但圓的內接四邊形除了凸四邊形之外還有一種稱爲 “蝶形” 的四邊形:

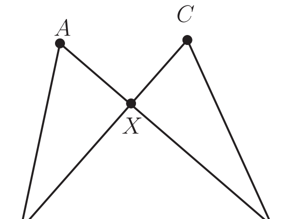

圖 1

定義 1([2]): 有一個自交點的四邊封閉折線叫做蝶形。

如圖1, 四邊形 $ABCD$ 的一組對邊 AD、BC 相交於點 X, 此時四邊形 $ABCD$ 即是一個蝶形。其中自交點 X 叫做它的臍點, $\angle AXB$、$\angle CXD$ 叫做它的臍角, $\triangle AXB$、$\triangle CXD$ 叫做它的兩翅 (注: 兩翅視具體位置關係不同, 可以用左右或上下來加以區分), $\angle A$、$\angle B$ 是左翅的兩個頂角, $\angle C$、$\angle D$ 是右翅的兩個頂角 — 兩翅的頂角不含臍角。

本文擬將性質 1 從圓內接凸四邊形拓廣到圓內接蝶形, 並確定圓內接四邊形的外接圓和其平分圓的等冪軸 (或稱根軸), 然後給出這三個圓的半徑之間的關係, 最後提出兩個相關問題。

二、圓內接蝶形的平分圓

與文 [1] 類似, 我們先定義幾個與蝶形有關的概念。

定義2: 蝶形左翅兩頂角鄰補角的平分線與右翅的兩頂角平分線所圍成的四邊形叫做它的左平分四邊形。

定義 3: 蝶形右翅兩頂角鄰補角的平分線與左翅的兩頂角平分線所圍成的四邊形叫做它的右平分四邊形。

性質 2: 蝶形的左、右平分四邊形都有外接圓。

這個性質的證明很容易, 因此略去。由此可作如下定義:

定義 4: 蝶形的左、右平分四邊形的外接圓分別叫做它的左、右平分外接圓。

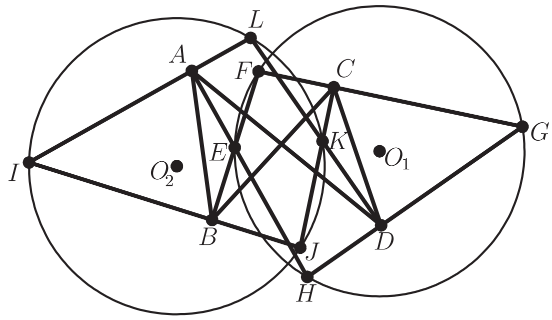

圖 2

如圖 2, 四邊形 $ABCD$ 是蝶形。四邊形 $EFGH$ 是左翅頂角平分線 AH、BF 與右翅頂角鄰補角的平分線 CF 和 CG、DH 和 DG 所圍成的右平分四邊形。$IJKL$ 是右翅頂角平分線 CJ、DL 與左翅頂角鄰補角的平分線 AL 和 AI、BJ 和 BI 所圍成的左平分四邊形。$\odot O_1$、$\odot O_2$ 分別是其右、左平分圓。

當蝶形本身也有外接圓時, 我們可將性質 1 拓廣爲:

性質 3: 圓內接蝶形的外心是其左、右平分圓的連心線的中點。

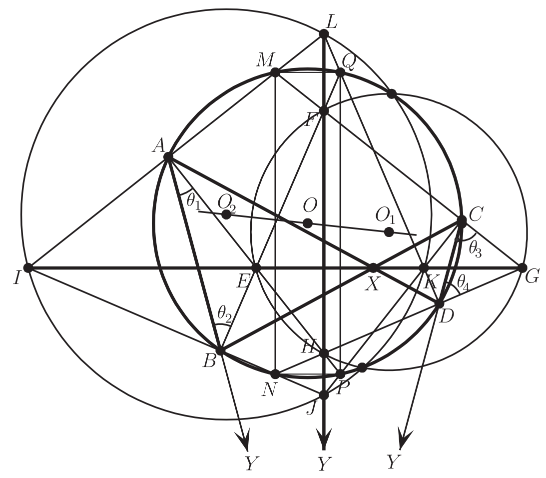

圖 3

如圖 3, 四邊形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的內接蝶形, 對邊 AD、BC 的交點爲 X (即臍點), 另

一組對邊 AB、CD 所在直線的交點爲 Y (限於版面, 圖3中未畫出, 但以箭頭指向點 Y)。四邊形 $EFGH$、$IJKL$ 分別是其右、左平分四邊形。$\odot O_1$、$\odot O_2$ 分別是其右、左平分圓。

設 $\angle BAD=\angle BCD=2\theta_1$, $\angle ABC=\angle ADC=2\theta_2$, $\angle DCG=\theta_3$, $\angle CDG=\theta_4$ 。與文 [1] 完全類似地有 (證略) :

(i) $\theta_1+\theta_3=\theta_2+\theta_4=\dfrac{\pi}{2}$。

(ii) 有如下四個共圓四點組:

$$A、E、B、I;\qquad B、F、C、J;\qquad C、G、D、K;\qquad D、H、A、L。$$

(iii) I、E、G、K、X 五點共線, J、H、F、L、Y 五點共線, 且這兩條直線互相垂直。

(iv) 圓內接蝶形相對頂點處的兩頂角平分線的交點和兩頂角鄰補角的平分線的交點都在其外接圓上。

如圖3, AP、AM 分別是頂點 A 處的頂角平分線和其鄰補角的平分線, 相對頂點處 C 的頂角平分線和其鄰補角的平分線分別爲 CP、CM。則 P、M 都在 $\odot O$ 上。

(v) I、G 關於 MN 對稱; J、H 關於 NP 對稱; K、E 關於 PQ 對稱; L、F 關於 MQ 對稱。

(vi) 四邊形 $MNPQ$ 是 $\odot O$ 的內接矩形。

有了上面的這六個結論, 類似於文 [1] 對性質 1 的證明, 就可以證明性質 3 (證略)。

我們看到, 圓內接凸四邊形和蝶形的前述概念和性質完全類似。事實上, 筆者發現它們是可以統一表述的。

定義5: 四邊形 $ABCD$ 的邊 AB、BC、CD、DA 所在直線分別記作 l_1、l_2、l_3、l_4, 則 l_1 到 l_2、l_2 到 l_3、l_3 到 l_4、l_4 到 l_1 的這四個角 (注意是“到角”不是“夾角” —— “到角”是要講順序的!) 的平分線所圍成的四邊形稱爲四邊形 $ABCD$ 的正平分四邊形。而將 l_1 到 l_4、l_4 到 l_3、l_3 到 l_2、l_2 到 l_1 的這四個角的平分線所圍成的四邊形稱爲四邊形 ABCD 的逆平分四邊形。又將正、逆平分四邊形的外接圓分別稱爲其正、逆平分圓。

這樣, 性質1、3就可以統一表述爲:

性質4: 圓內接四邊形的外心是其正、逆平分圓的連心線的中點。

三、三圓等冪軸與半徑之間的關係

觀察圖4 (其中各字母含義同圖3), 我們發現圓內接蝶形 $ABCD$ 的外接圓與它的兩個平分圓有兩個公共點, 這意味著這三個圓有相同的等冪軸。並且這條等冪軸過蝶形的對邊點 X。

猜想並通過實驗證實: 這條等冪軸還過蝶形的另一個對邊點 Y。這個結論對圓內接凸四邊形也是成立的。即有

定理 1: 圓內接四邊形兩個對邊點的連線是它的外接圓和正、逆平分圓的等冪軸。

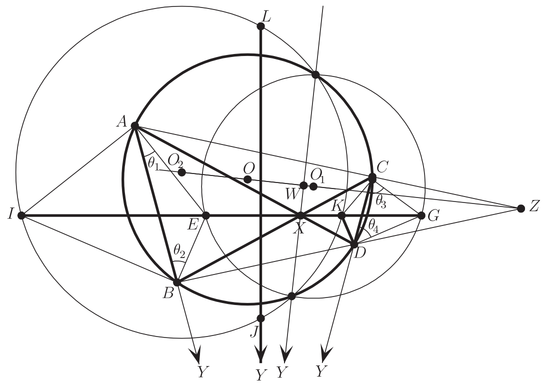

圖 4

證明: 如圖 4, 當圓內接四邊形爲蝶形時。

因爲 $\angle EAD=\theta_1=\angle XCK=\angle KCD=\angle EGD$, 則 A、E、D、G 四點共圓, 所以 $XA\cdot XD=XE\cdot XG$。這表明: X 是 $\odot O$ 和 $\odot O_1$ 的等冪點。

類似可證: 另一個對邊點 Y 也是 $\odot O$ 和 $\odot O_1$ 的等冪點。

因此蝶形 $ABCD$ 兩個對邊點的連線是 $\odot O$ 和 $\odot O_1$ 的等冪軸。

同理可證: 蝶形兩個對邊點的連線也是 $\odot O$ 和 $\odot O_2$ 的等冪軸。

所以蝶形兩個對邊點的連線是 $\odot O$、$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的等冪軸。

當圓內接四邊形爲凸四邊形時, 可類似證明。 □

注: 當圓內接四邊形兩組對邊分別平行 (即爲矩形) 時, 其外接圓和它的兩個平分圓是同心圓, 此時它們的等冪軸爲無窮遠直線。

又, 注意到圓內接四邊形對邊點的連線關於外接圓的極點正是其對角線所在直線的交點 (圖 4 中的點 Z 是對角線 AC、BD 所在直線的交點)。結合性質 4 和定理 1 有

推論: 圓內接四邊形的外心、對角線交點和正、逆平分圓的圓心這四點共線, 且所共直線與其兩對邊點的連線互相垂直。

由此我們還可推得圓內接四邊形的外接圓和它的兩個平分圓的半徑之間的關係, 即

定理 2: 設圓內接四邊形外心到其正、逆平分圓圓心的距離均爲 d, 外接圓半徑爲 r, 兩平分圓半徑分別爲 r_1, r_2, 則: $r_1^2+r_2^2=2(r^2+d^2)$。

證明: 如圖 4, 由定理 1 的推論知:O_1、O、O_2 在等冪軸 (即對邊點的連線) 上的正投影重合為一點, 設這個點為 W。

記 $|OW|=k$, 又不妨設 $r_2\geq r_1$, 則由性質4有: $|O_1W|=|k-d|$, $|O_2W|=|k+d|$。注意到點 W 在這三個圓的等冪軸上, 由"等冪"的含義有:

$$k^2-r^2=(k-d)^2-r_1^2=(k+d)^2-r_2^2.$$

消去其中的 k 並化簡即得所證結論。 □

四、極限情形及相關問題

從運動的觀點來看, 當 $\odot O$ 的內接凸四邊形 $ABCD$ 逐漸變為蝶形 $ABCD$ 時, 點 C、D 應該有逐漸接近、重合、換位的過程。那麼當 C、D 重合時, 上述結論還成立嗎?

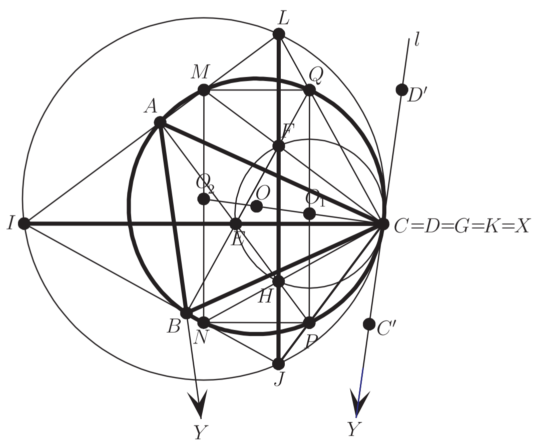

圖 5

如圖5 (其中各字母含義仍同圖3)。注意到點 C、D 重合, 則邊 CD 退化為 $\odot O$ 的切線 l。原來的 $\angle BCD$、$\angle ADC$ 現在分別對應弦切角 $\angle BCD'$、$\angle ADC'$。此時點 G、K、X 也會與 C、D 重合。

實驗表明: 此時上述那些結論仍然成立。證明也完全類似, 此處不再贅述。

最後, 我們提出如下兩個問題:

問題1: 對這樣的三個圓 $\odot O$、$\odot O_1$、$\odot O_2$: 它們的半徑分別為 r、r_1、r_2, 點 O 是 O_1O_2 的中點且 $|OO_1|=|OO_2|=d$。若 $r_1^2+r_2^2=2(r^2+d^2)$, 那麼是否存在這樣的四邊形 — 它內接於 $\odot O$, 且使得 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 分別為這個四邊形的兩個平分圓?

問題2: 對圖 2 中的 A、B、C、D 四點, 若其中任三點不共線，則以它們為頂點的四邊形有三

個: 蝶形 $ABCD$、蝶形 $ACBD$ 和凸四邊形 $ABDC$。其中每個四邊形都有兩個平分圓, 不知道這六個圓之間是否存在有趣的關係?

參考資料

1. 吳波, 圓內接四邊形的一個有趣性質[J], 數學傳播, 2013(37), 3:68-70。
2. 楊世明、王雪琴, 蝶形初探[J], 中學數學, 1997, 8:16-18。

—本文作者任教重慶市長壽龍溪中學—