數學傳播 39卷3期, pp. 71-75

數學模型和決策

楊大緯

一、前言

數學離我們並不遙遠, 數學要解決的就是我們生活中會碰到的各種問題, 我們可以用數學去描述實際碰到的問題, 然後從計算中釐清一些事物間的關係, 並做出預測, 雖然模型並不能完全代表真實的情況, 但是只要這個模型包含了那些最具影響力的主導向, 我們就可以從計算中去預測和掌握趨勢, 填補了用感覺和經驗來做預測的一些缺點和不足, 至少有數學當基礎的決策會讓人增添許多信心, 最近常常聽到警察和抗議民眾發生衝突, 讓人開始對兩個族群戰爭的數學模型感到興趣, 在此嘗試了一些計算來描述和解釋。

二、內容

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a - by) \\ \dfrac{dy}{dt} = -y(c - dx) \end{cases}$$

這類型的方程, 最早由美國統計學家 Alfred James Lotka 和義大利數學家 Vito Volterra 獨立發表, 用來描述掠食者與獵物之間數量隨時間變化的關係, 而本文則是用來描述兩個族群生長和戰爭的模型, 所討論的對象有不同的角色關係。

考慮兩個族群, 假設其族群內的個體數不增加, 而且兩個族群發生戰爭, 造成雙方個體的數量下降, 我們將使用以下的模型來進行模擬。

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = -k_1AB \\ \dfrac{dB}{dt} = -k_2AB \end{cases}$$

其中 A, B 代表兩個種族個別的個體數量

$$A(0) = A_0 > 0, \quad B(0) = B_0 > 0, \quad k_1, k_2 > 0$$

爲什麼這個方程式要這麼列呢 ? 先想想看譬如有 10 個種族 A 的個體和 10 個種族 B 的個

體, 一單位時間內平均相遇 3 次, 只要種族 A 和種族 B 的單一個體相遇, 就算一次, 那麼如果種族 A 的個體數變成 30 個, 種族 B 的個體數維持不變, 是不是一單位時間內平均相遇次數就會變成 9 次, 此時如果種族 B 的個體數變成 20 個, 那麼一單位時間內平均相遇次數就會變成 18 次, 也就是說, 一單位時間內平均相遇次數正比於族群 A 和族群 B 的個體數, 我們不仿假定一單位時間內平均相遇次數爲 kAB, 又假設在一次相遇中族群 A 的個體死亡的機率爲 P_A, 族群 B 的個體死亡的機率爲 P_B, 那麼 P_AkAB 和 P_BkAB 就可以分別代表族群 A 和族群 B 一單位時間內平均死亡的個體數, 我們令 $P_Ak=k_1$, $P_Bk=k_2$, 就可以列出如下的方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt}=-k_1AB \\ \dfrac{dB}{dt}=-k_2AB \end{cases} \tag{1}$$

接下來我們把 A 和 B 解出來

解:

$$\frac{dA}{dB}=\frac{k_1}{k_2}\Rightarrow\int k_2dA=\int k_1dB\Rightarrow k_2A+C_1=k_1B \tag{2}$$

將 (2) 式帶回 (1) 式中, 得

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt}=-A(k_2A+C_1)&\Rightarrow\int\frac{dA}{A(k_2A+C_1)}=\int -1dt\\ &\Rightarrow\int\Big(\frac{k_2}{k_2A}-\frac{k_2}{k_2A+C_1}\Big)\frac{dA}{C_1}=-t+C_2\\ &\Rightarrow\ln(k_2A)-\ln(k_2A+C_1)=-C_1t+C_1C_2\\ &\Rightarrow 1+\frac{C_1}{k_2A}=e^{C_1t-C_1C_2}\\ &\Rightarrow A=\frac{C_1}{k_2(e^{C_1t-C_1C_2}-1)},\ \text{將 } A \text{ 代回 (2) 式中可得}\\ &\quad B(t)=\frac{C_1e^{C_1t-C_1C_2}}{k_1(e^{C_1t-C_1C_2}-1)}\end{aligned}$$

由初始條件可得

$$C_1=k_1B_0-k_2A_0,\quad C_2=\frac{\ln\Big(\dfrac{k_2A_0}{k_1B_0}\Big)}{(k_1B_0-k_2A_0)}$$

其中這個 C_1 在這個戰爭中具有特別的意義,

如果 $C_1>0$ 則當 $t\to\infty$, $A(t)\to 0$, $B(t)\to B_0-\dfrac{k_2}{k_1}A_0$

如果 $C_1>0$ 則當 $t\to\infty$, $A(t)\to A_0-\dfrac{k_1}{k_2}B_0$, $B(t)\to 0$

可以看出 $C_1 > 0$ 意味著族群 B 會獲勝而族群 A 將被消滅,

反之若 $C_1 > 0$ 則族群 A 會獲勝而族群 B 將被消滅,

所以 C_1 是一個族群 A 和族群 B 勝負的判別式,

讓我們細細的研究一下 $C_1 = k_1B_0 - k_2A_0$,

A_0 和 B_0 分別是族群 A 和族群 B 一開始的個體數量,

$$k_1 = P_Ak, \qquad k_2 = P_Bk,$$

P_A 爲族群 A 的個體在一次的戰鬥中死亡的機率, 換句話說這是族群 B 個體攻擊力的一個指標。P_B 爲族群 B 的個體在一次的戰鬥中死亡的機率, 這也是族群 A 個體攻擊力的一個指標。

$$k_1 = P_Ak, \qquad k_2 = P_Bk$$

我們可以看出 k_1, k_2 亦是族群 B 和族群 A 單一個體的戰鬥力指標, k_1B_0 和 k_2A_0 自然就可以看作是族群 B 與族群 A 的總體戰鬥力, 至此我們知道 $C_1 = k_1B_0 - k_2A_0$ 即是族群 B 和族群 A 總體戰鬥力的差, 當然 C_1 當成是族群 A 和族群 B 戰鬥勝負的判別式也就實至名歸了。

如果考慮個體數會增生, 把原本的數學模型修改一下。考慮兩個族群, 假設其族群內的個體數會增加, 而且兩個族群發生戰爭, 造成雙方個體的數量下降, 我們將使用以下的模型來進行模擬。

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = mA - k_1AB \\ \dfrac{dB}{dt} = mB - k_2AB \end{cases}$$

其中 A, B 代表兩個族群個別的個體數量, $A(0) = A_0 > 0$, $B(0) = B_0 > 0$, $k_1, k_2, m > 0$, 在不考慮環境負載和戰爭的簡單情況下, 式子中的 mA 和 mB 代表著族群的成長速度與族群本身的數量呈正比, 如果將式子中的 mA 和 mB 改成 m_1A 和 m_2B, 其中 m_1 和 m_2 不相同, 那麼情況就複雜許多, 不在本文的討論範圍中。

解:

$$\begin{aligned} k_2\frac{dA}{dt} - k_1\frac{dB}{dt} = m(k_2A - k_1B) &\Rightarrow \frac{d((k_2A - k_1B))}{dt} = m(k_2A - k_2B) \\ &\Rightarrow (k_2A - k_1B) = C_1e^{mt} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\frac{\frac{dA}{dt}}{\frac{dB}{dt}} = \frac{dA}{dB} = \frac{A(m - k_1B)}{B(m - k_2A)} \Rightarrow \int \frac{m - k_2A}{A}dA = \int \frac{m - k_1B}{B}dB$$

$$\Rightarrow m\ln A - k_2A = m\ln B - k_1B + C_2$$
$$\Rightarrow m\ln(\frac{A}{B}) = k_2A - k_1B + C_2 = C_1e^{mt} + C_2$$
$$\Rightarrow A = Be^{\frac{C_1e^{mt}+C_2}{m}},$$ 此式與 (3) 式進行聯立可得
$$A = \frac{C_1e^{mt+\frac{C_1e^{mt}+C_2}{m}}}{k_2e^{\frac{C_1e^{mt}+C_2}{m}} - k_1}, \qquad B = \frac{C_1e^{mt}}{k_2e^{\frac{C_1e^{mt}+C_2}{m}} - k_1}$$

代入初始值可得 $C_1 = k_2A_0 - k_1B_0$, $C_2 = m\ln\left(\frac{A_0}{B_0}\right) - k_2A_0 + k_1B_0$

C_1 在這個模型中仍舊是一個勝負的判別式,

如果 $C_1 > 0$, 則當 t 很大時

$$A = \frac{C_1e^{mt+\frac{C_1e^{mt}+C_2}{m}}}{k_2e^{\frac{C_1e^{mt}+C_2}{m}} - k_1} = C_1e^{mt}\Big(\frac{e^{\frac{C_1e^{mt}+C_2}{m}}}{k_2e^{\frac{C_1e^{mt}+C_2}{m}} - k_1}\Big) = \Big(A_0 - \frac{k_1}{k_2}B_0\Big)e^{mt}$$
$$B \approx 0$$

如果 $C_1 < 0$, 則當 t 很大時

$$A \approx 0$$
$$B = \frac{C_1e^{mt}}{k_2e^{\frac{C_1e^{mt}+C_2}{m}} - k_1} \approx \frac{C_1}{-k_1}e^{mt} = \Big(B_0 - \frac{k_2}{k_1}A_0\Big)e^{mt}$$

解釋: $C_1 = k_2A_0 - k_1B_0 > 0$, 指群體 A 的總體戰力大過群體 B, 在經過一段時間的戰鬥後, 群體 A 的個體數大概剩 $A_0 - \frac{k_1}{k_2}B_0$ 這麼多, 並以這個數量繼續增生, 而群體 B 幾乎被消滅掉, 反之 $C_1 < 0$, 指群體 B 的總體戰力大過群體 A, 在經過一段時間的戰鬥後, 群體 B 的個體數大概剩 $B_0 - \frac{k_2}{k_1}A_0$ 這麼多, 並以這個數量繼續增生, 而群體 A 幾乎被消滅掉。

結語

數學常常給人一種不食人間煙火的感覺, 其實我們生活中會碰到許多的困難和問題要去解決或是做決策, 譬如對奕、經濟、軍事、醫學、民生, 這些都可以從建構數學模型或是進行統計來幫我們做預測, 彌補經驗和感覺的不足, 譬如說我們都知道消息傳遞快速, 一傳十, 十傳百, 但是實際上到底有多快? 如果我們沒有建立起一個模型進行計算, 我們很難掌握某種我們關心的量隨時間推移其大小的變化, 而這個量的大或小可能就會決定一個策略的成敗, 就如同前面提到的群體 A 和群體 B 的戰爭模型一樣, 打贏的大量增生, 打輸的幾乎被消滅, 這是天差地遠的結果, 一個決策的好壞影響真的很大。

參考資料

1. 王振華 (1996)。《微分方程式》。台北: 超級科技圖書出版。
2. William E. Boyce and Richard C. Diprima, *Elementary differential equation And boundary value problems.* New York : John Wiley & Sons, 2010.

—本文作者爲國立臺灣大學數學研究所碩二學生—