數學傳播 39卷3期, pp. 47-54

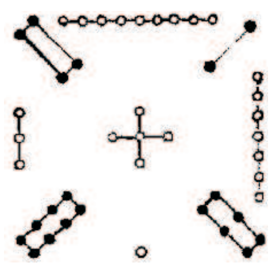
四階幻方探秘

劉源俊

一、緒言

劉曾适先生曾於 1964∼65 年間研究 4×4 幻方 (magic square of order 4), 自行發展出一套方法找出共 880 種, 並全數整理排序。到 2000 年左右, 他又重新整理, 寫成《幻方探秘》一書的手稿。本文乃根據該稿, 用較爲簡潔的數學語言改寫成通俗文字。

二、從三階幻方談起



在探討四階幻方前, 應先探討三階幻方。大家應該都看過這一三階幻方： $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$。將 1 到 9 的九個數字排列成方陣, 其中各行 (columns)、各列 (rows) 及兩個對角線 (diagonals) 三數字的和均爲 15。

《易・繫辭》上有「河出圖, 洛出書」一語, 所謂《洛書》指的是右邊這一圖, 相傳四、五千年前就出現了。說穿了, 洛書就是三階幻方的圖像表示。我國漢代稱此種幻方爲「九宮」。

三階幻方共有幾種? 將這一幻方逆時鐘旋轉 (rotation) 90°, 或旋轉 180°, 或旋轉 270°, 或以對角線爲軸轉置 (transposition), 共可得 8 個型; 但因爲彼此相關, 我們將此 8個型當成一種。不難證明, 三階幻方就只有一種。

此 8 型幻方如何排序? 先比左上角數字 — 愈小愈放在前頭, 再比其右的數字, 再比更其右的數字, $\cdots$ 然後依序比下一列, $\cdots$。把排在最前頭的作爲代表型, 則三階幻方的代表型是

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}。$$

爲研究方便, 我們先將幻方「降級」— 每個數字都減 1, 然後轉化爲 3 進位表示法, 再分

解爲兩個三階「元方」(elemental magic squares)[1] 的「拼合」[2], 如下:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix} \overset{\text{降級}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 8 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \overset{\text{轉化}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 01 & 20 & 12 \\ 22 & 11 & 00 \\ 10 & 02 & 21 \end{bmatrix} \overset{\text{分解}}{\Rightarrow} \underline{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}。$$

用符號表示: 若 $\mathbf{M}$ 代表三階幻方 $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{L}$ 代表三階元方 $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 則 $\mathbf{M} = 3\mathbf{L} + \mathbf{L}''' + \mathbf{I} \Leftrightarrow \underline{\mathbf{LL}'''}$; 在此, $\mathbf{L}'''$ 表示 $\mathbf{L}$ 逆時鐘轉 90° (順時鐘轉 270°), $\mathbf{I}$ 代表三階 1 方陣 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\underline{\quad\quad\quad}$ 表示兩個元方的拼合, $\Leftrightarrow$ 表示左右兩者相當 (equivalent)。又, 轉置的符號記爲 ~, 則顯然 $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}$。

三階元方只有一種, 但有四型; 前述 $\mathbf{L}$ 是代表型, 另外三型依上述排序記爲 $\mathbf{L}'''$、$\mathbf{L}'$ 及 $\mathbf{L}''$, 分別表示順時鐘旋轉 270°, 或旋轉 90° 及旋轉 180°。這四型元方共有 16 種拼合方式, 拼出來的不一定是幻方, 例如 $\underline{\mathbf{LL}}$ 或 $\underline{\mathbf{LL}''}$; 但若拼出幻方, 則不外前述八型, 都屬同一種, 例如 $\widetilde{\underline{\mathbf{LL}'''}} = \underline{\mathbf{LL}'}$。

三、高階幻方

由上述推而廣之, 我們可以定義 n 階幻方 (magic square of order n):

將 1 到 n^2 的 n^2 個自然數排成方陣 $\mathbf{M} \equiv [m_{ij}]$, $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, 其中元素滿足下列關係者, 稱之爲 n 階幻方:

$$\sum_{k=1}^{n} m_{ik} = \sum_{k=1}^{n} m_{kl} = \sum_{k=1}^{n} m_{kk} = \sum_{k=1}^{n} m'_{kk} = \frac{n}{2}(n^2+1),$$

上式中, m'_{ij} 係方陣 $\mathbf{M}' \equiv [m'_{ij}]$ 的元素, 而 $\mathbf{M}'$ 是 $\mathbf{M}$ 順時鐘旋轉 90° 後的方陣。

換言之, n 階幻方的各行、各列及兩個對角線上的 n 個元素的和均相等, 爲 $\frac{n}{2}(n^2+1)$。

我們約定 n 階幻方的排序方式: m_{11} 較小的排在最前; m_{11} 相同時, m_{12} 較小的排在前; m_{12} 又相同時, 則 m_{13} 較小的排在前; 依此類推。比較了第一列後, 再比較第二列; 依此類推。

---

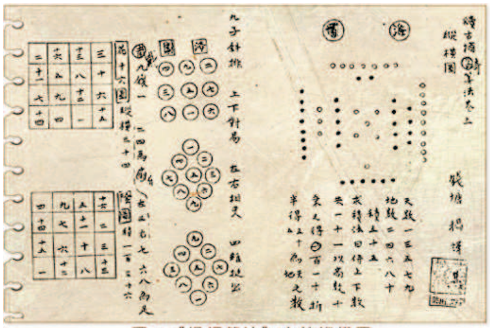
[1]這裡,「元方」特指可用以拼合成幻方的基元方陣。n 階元方的每一元素數字都屬 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, 而每行與每列諸數字的和都等於 $\frac{1}{2}n(n-1)$。

[2]兩個 n 階元方 $[a_{ij}]$ 與 $[b_{ij}]$ 的「拼合」記爲 $\underline{[a_{ij}][b_{ij}]}$, 定義爲 $[a_{ij}b_{ij}]$, 其中每一元素 $a_{ij}b_{ij}$ 是 n 進位數, 其值是 $n \cdot a_{ij} + b_{ij}$。

四、四階幻方

根據前面的原理, 我們來研究四階幻方。四階幻方式將 1 到 16 的數字排在 4×4 的方陣裡, 各行、各列及對角線 4 個元素的和是 34。

10世紀的印度廟 (the Parshvanath Jain temple in Khajuraho) 中展示一饒富趣味的幻方 $\begin{bmatrix} 7 & 12 & 1 & 14 \\ 2 & 13 & 8 & 11 \\ 16 & 3 & 10 & 5 \\ 9 & 6 & 15 & 4 \end{bmatrix}$, 下文再說。我國宋代數學家楊輝 (約1238∼約1298) 在他的《續古摘奇演算法》上卷中製作了十三幅「縱橫圖」, 其中包括一幅四階的「陽圖」: $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 5 & 16 \\ 14 & 7 & 11 & 2 \\ 15 & 6 & 10 & 3 \\ 1 & 12 & 8 & 13 \end{bmatrix}$。



圖：《楊輝算法》中的縱橫圖

後人研究四階幻方, 共得 880 種, 1693 年法國人 de Bessy 曾予列出[3]。但各人用的方法五花八門, 欠缺系統。今日用計算機來計算並列出所有四階幻方, 當非難事, 網路上也可以查到所有四階幻方的資料[4]。但有系統地從基本原理加以探究, 方具教育意義。

五、四階幻方的形成

先從第 1 種 $\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 15 & 16 \\ 12 & 14 & 3 & 5 \\ 13 & 7 & 10 & 4 \\ 8 & 11 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ 與第 880 種 $\mathbf{M}_{880} = \begin{bmatrix} 7 & 14 & 4 & 9 \\ 15 & 6 & 12 & 1 \\ 2 & 3 & 13 & 16 \\ 10 & 11 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ 探討起。

比照前述三階幻方的做法: 先降級, 轉化爲 4 進位表示法, 再分解:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 15 & 16 \\ 12 & 14 & 3 & 5 \\ 13 & 7 & 10 & 4 \\ 8 & 11 & 6 & 9 \end{bmatrix} \overset{\text{降級轉化}}{\Rightarrow\Rightarrow} \begin{bmatrix} 00 & 01 & 32 & 33 \\ 23 & 31 & 02 & 10 \\ 30 & 12 & 21 & 03 \\ 13 & 22 & 11 & 20 \end{bmatrix} \overset{\text{分解}}{\Rightarrow} \underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

---

[3] Bernard Frenicle de Bessy, *Des Quarrez ou Tables Magiques.*

[4] www.magic-squares.net/order4list.htm.

$$\begin{bmatrix} 7 & 14 & 4 & 9 \\ 15 & 6 & 12 & 1 \\ 2 & 3 & 13 & 16 \\ 10 & 11 & 5 & 8 \end{bmatrix} \overset{\text{降級轉化}}{\Longrightarrow\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 12 & 31 & 03 & 20 \\ 32 & 11 & 23 & 00 \\ 01 & 02 & 30 & 33 \\ 21 & 22 & 10 & 13 \end{bmatrix} \overset{\text{分解}}{\Longrightarrow} \underline{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}}$$

於是看到幾種四階「元方」, 其性質卻大爲不同: 各元方的各行與各列數字和雖都是 6, 但 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的兩對角線數字和各爲 7 與 5, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的兩對角線數字和各爲 2 與 10。$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 與 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 的兩對角線數字和則都是 6。爲什麼會是 7、5, 2、10, 6、6 這些數字出現呢? 因爲降級後的幻方, 四個數字和必須是 30, 而 $4m+n=30$ 這一整數方程式的正整數解不難用代入法求得, 有下列:

$$(m,n)=(6,6),(7,2) \text{ 或 } (5,10)。$$

顯然, 欲研究四階幻方, 應先弄清楚 0, 1, 2, 3 四個數字組成的「元方」。將兩個元方「拼合」, 復加篩選, 即可望獲得所有的四階幻方。

先將總和爲 6 的 0 到 3 的數列列出, 發現共有 40 組 (0 0 3 3類有 6 組, 0 1 2 3 類有 24 組, 1 1 1 3 類有 4 組, 1 1 2 2 類有 6 組), 依序爲 : 0 0 3 3, 0 1 2 3, ..., 3 3 0 0。

再將這些數列組成「元方」, 要求其各行、各列的數目和均爲 6。可以組成幻方的元方是其中一部份, 可分爲三大類, 分別命名爲 **A**、**B** 及 **C**。**A** 類元方的對角線上諸數字的和都爲 6; **B** 類元方對角線上諸數字的和, 一爲 7, 一爲 5; **C** 類元方對角線上諸數字的和, 一爲 2, 一爲 10。顯然, **A** 類元方須與 **A** 類元方拼合, 而 **B** 類元方須與 **C** 類元方拼合, 才能形成幻方。換言之, 四階幻方須爲 $\underline{\mathbf{AA}}$ 或 $\underline{\mathbf{BC}}$ 之形式。

其次探討 **A**, 共得 38 種, 依序名爲 $\mathbf{A}_1$ 到 $\mathbf{A}_{38}$, 例舉其各代表型如下:

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}0&0&3&3\\1&3&0&2\\3&1&2&0\\2&2&1&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}0&0&3&3\\2&2&1&1\\3&1&2&0\\1&3&0&2\end{bmatrix},\ldots,\quad \mathbf{A}_{38}=\begin{bmatrix}1&3&0&2\\3&2&1&0\\0&1&2&3\\2&0&3&1\end{bmatrix}。$$

$\mathbf{B}$ 共有 52 種, 依序名爲 $\mathbf{B}_1$ 到 $\mathbf{B}_{52}$, 例舉其各代表型如下:

$$\mathbf{B}_1=\begin{bmatrix}0&0&3&3\\1&2&1&2\\3&1&2&0\\2&3&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}_2=\begin{bmatrix}0&0&3&3\\1&3&0&2\\2&1&2&1\\3&2&1&0\end{bmatrix},\ldots,\quad \mathbf{B}_{52}=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\3&3&0&0\\0&1&2&3\\2&0&3&1\end{bmatrix}。$$

$\mathbf{C}$ 共有 24 種, 依序名爲 $\mathbf{C}_1$ 到 $\mathbf{C}_{24}$, 例舉其各代表型如下:

$$\mathbf{C}_1=\begin{bmatrix}0&0&3&3\\1&1&2&2\\2&2&1&1\\3&3&0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}_2=\begin{bmatrix}0&0&3&3\\1&1&2&2\\3&3&0&0\\2&2&1&1\end{bmatrix},\ldots,\quad \mathbf{C}_{24}=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\3&0&3&0\\0&3&0&3\\2&1&2&1\end{bmatrix}。$$

進一步探究, 可發現 $\underline{\mathbf{AA}}$ 可共形成 656 種幻方, $\underline{\mathbf{BC}}$ 可共形成 224 種, 合共 880 種。以下是一些例子: $\mathbf{M}_1\Leftrightarrow\underline{\mathbf{B}_5\mathbf{C}_{13}}$, $\mathbf{M}_2\Leftrightarrow\underline{\mathbf{B}_{10}\widetilde{\mathbf{C}_1}}$, $\mathbf{M}_3\Leftrightarrow\underline{\mathbf{B}_{10}\widetilde{\mathbf{C}_2}}$, $\mathbf{M}_4\Leftrightarrow\underline{\mathbf{B}_5\mathbf{C}_3{}''}$, $\mathbf{M}_5\Leftrightarrow\underline{\mathbf{B}_5\mathbf{C}_{17}}$, $\mathbf{M}_6\Leftrightarrow\underline{\mathbf{B}_{10}\mathbf{C}_5{}''}$, $\mathbf{M}_7\Leftrightarrow\underline{\mathbf{B}_{10}\mathbf{C}_{16}}$, $\mathbf{M}_8\Leftrightarrow\underline{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_{25}}$, $\ldots$, $\mathbf{M}_{880}\Leftrightarrow\underline{\mathbf{A}_{36}{}''\mathbf{A}_5{}'}$。

總之, 880 種四階幻方的來源元方都已找出, 有完整的表列可供查考。每一種幻方有其特定的編號, 當無疑義。

六、完美幻方

在 880 種四階幻方中, 有一些 (共 48 種) 特別有趣, 因爲它們每個經「輪轉變換」(cyclic transformation, 指第 1 行 → 第 2 行 → 第 3 行 → 第 4 行 → 第 1 行, 或第 1 列 → 第 2 列 → 第 3 列 → 第 4 列 → 第 1 列) 後, 變爲另一種幻方。這 48 種可輪轉幻方 (cyclic magic squares) 各歸於三個群 (groups), 每群 16 種。

這些幻方的每相鄰四格的數字的和, 或每個正方形四角數字的和, 或每個長條矩型的四角

數字的和, 都是 34。舉例:

$$\mathbf{M}_{102}=\begin{bmatrix}1&8&10&15\\12&13&3&6\\7&2&16&9\\14&11&5&4\end{bmatrix}\Leftrightarrow \underline{\mathbf{A}_9\mathbf{A}_{29}}。$$

不難發現, 這類幻方的任意斜線上任何兩個跳間數字的和都是17。在文獻中, 有稱此類幻方爲「完美幻方」(perfect magic squares) 的。

不難證明, 所有完美幻方須是 $\underline{\mathbf{AA}}$ 形式, 其元方也必須具可輪轉性。具輪轉性的元方共有7種, 臚列其代表型如下:

$$\mathbf{A}_9=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\2&3&0&1\\1&0&3&2\\3&2&1&0\end{bmatrix},\mathbf{A}_{11}=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\3&2&1&0\\1&0&3&2\\2&3&0&1\end{bmatrix},\mathbf{A}_{16}=\begin{bmatrix}0&1&3&2\\3&2&0&1\\0&1&3&2\\3&2&0&1\end{bmatrix},\mathbf{A}_{20}=\begin{bmatrix}0&2&1&3\\3&1&2&0\\2&0&3&1\\1&3&0&2\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{23}=\begin{bmatrix}0&2&3&1\\3&1&0&2\\0&2&3&1\\3&1&0&2\end{bmatrix},\mathbf{A}_{29}=\begin{bmatrix}0&3&1&2\\3&0&2&1\\2&1&3&0\\1&2&0&3\end{bmatrix},\mathbf{A}_{34}=\begin{bmatrix}1&0&3&2\\3&2&1&0\\0&1&2&3\\2&3&0&1\end{bmatrix}。$$

其中 $\mathbf{A}_9$、$\mathbf{A}_{11}$、$\mathbf{A}_{20}$、$\mathbf{A}_{29}$ 與 $\mathbf{A}_{34}$ 屬同一類, 其每行與每列都有 0, 1, 2, 3 四個數字, 乃是一些特殊的「拉丁方陣」(Latin squares); $\mathbf{A}_{11}$ 與 $\mathbf{A}_{20}$ 的兩對角線也都含此四數字, 另三種則不同。$\mathbf{A}_{16}$ 與 $\mathbf{A}_{23}$ 屬另一類, 其每列與兩對角線都有 0, 1, 2, 3 四種數字, 而每行則非是。

前述第一類可輪轉拉丁方陣元方共可拼合成兩群 (32 種) 完美幻方, 且名爲 PM1 及 PM2。

PM1 群包含 : $\mathbf{M}_{102}$、$\mathbf{M}_{174}$、$\mathbf{M}_{785}$、$\mathbf{M}_{690}$; $\mathbf{M}_{104}$、$\mathbf{M}_{201}$、$\mathbf{M}_{473}$、$\mathbf{M}_{565}$; $\mathbf{M}_{828}$、$\mathbf{M}_{365}$、$\mathbf{M}_{279}$、$\mathbf{M}_{530}$; $\mathbf{M}_{623}$、$\mathbf{M}_{393}$、$\mathbf{M}_{281}$、$\mathbf{M}_{748}$。$\mathbf{M}_{102}$ 已見前述, 可作此群的代表; 而 $\mathbf{M}_{623}=$ $\begin{bmatrix}4&5&11&14\\15&10&8&1\\6&3&13&12\\9&16&2&7\end{bmatrix}$ 就是前述10世紀出現在印度的那個幻方的轉型。

PM2 群包含: $\mathbf{M}_{107}$、$\mathbf{M}_{171}$、$\mathbf{M}_{788}$、$\mathbf{M}_{691}$; $\mathbf{M}_{109}$、$\mathbf{M}_{204}$、$\mathbf{M}_{294}$、$\mathbf{M}_{396}$; $\mathbf{M}_{839}$、$\mathbf{M}_{532}$、

$\mathbf{M}_{292}$、$\mathbf{M}_{355}$; $\mathbf{M}_{621}$、$\mathbf{M}_{560}$、$\mathbf{M}_{469}$、$\mathbf{M}_{744}$。$\mathbf{M}_{107} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 11 & 14 \\ 12 & 13 & 2 & 7 \\ 6 & 3 & 16 & 9 \\ 15 & 10 & 5 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}_9\widetilde{\mathbf{A}_{29}}$ 可作此群的代表。

前述第二類可輪轉元方又可拼合成另一群 (16種) 完美幻方, 且名爲 PM3。PM3 群包含: $\mathbf{M}_{116}$、$\mathbf{M}_{177}$、$\mathbf{M}_{485}$、$\mathbf{M}_{537}$; $\mathbf{M}_{117}$、$\mathbf{M}_{178}$、$\mathbf{M}_{305}$、$\mathbf{M}_{375}$; $\mathbf{M}_{647}$、$\mathbf{M}_{704}$、$\mathbf{M}_{304}$、$\mathbf{M}_{372}$; $\mathbf{M}_{646}$、$\mathbf{M}_{702}$、$\mathbf{M}_{483}$、$\mathbf{M}_{536}$。$\mathbf{M}_{116} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 13 & 12 \\ 14 & 11 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 16 & 9 \\ 15 & 10 & 3 & 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}_{16}\widetilde{\mathbf{A}_{16}}$ 可作此群的代表。

進一步觀察, 可發現以上三群間還存在一種微妙的關係 — 彼此可以轉換, 因此可說是「同宗」。這一轉換關係可名爲「心隅對調」(center-corner exchange) 即將幻方中心四個數字與四隅的四個數字各自調換。例如屬於 PM1 群的第 1 種 $\mathbf{M}_{102}(\Leftrightarrow \underline{\mathbf{A}_9\mathbf{A}_{29}})$ 經心隅對調, 再旋轉 90°, 就變成了屬於 PM2 群的第 11 種 $\mathbf{M}_{292}(\Leftrightarrow \underline{\mathbf{A}_9\mathbf{A}_{29}{}'})$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 10 & 15 \\ 12 & 13 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & 16 & 9 \\ 14 & 11 & 5 & 4 \end{bmatrix} \overset{\text{心隅對調}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 13 & 8 & 10 & 3 \\ 12 & 1 & 15 & 6 \\ 7 & 14 & 4 & 9 \\ 2 & 11 & 5 & 16 \end{bmatrix} \overset{\text{旋轉}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 12 & 13 \\ 11 & 14 & 1 & 8 \\ 5 & 4 & 15 & 10 \\ 16 & 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}。$$

又如屬於 PM1 群的第 2 種 $\mathbf{M}_{174}(\Leftrightarrow \underline{\mathbf{A}_{20}\widetilde{\mathbf{A}_{20}}{}'})$ 經心隅對調, 再旋轉 90°, 就變成了屬於 PM3 群的第 16 種 $\mathbf{M}_{536}(\Leftrightarrow \underline{\mathbf{A}_{23}\widetilde{\mathbf{A}_{23}}{}''})$。

這 48 種完美幻方 (共 384 型) 不止各自本身有著美妙的平衡 (balance) 性質, 其彼此間又存在著如此奇妙的聯繫, 不禁讓人讚嘆!

七、結語

在衆多完美幻方中, 如要舉一種最具代表性的, 筆者以爲非 $\mathbf{M}_{828}(\Leftrightarrow \underline{\mathbf{A}_{34}\widetilde{\mathbf{A}_{29}}{}'})$ 莫屬。這一幻方相對於中心點而言, 特別的平衡, 因爲除了具有前述完美幻方的諸多性質外, 單數格內諸數字的平方和剛好等於雙數格內諸數字的平方和: $1^2+7^2+13^2+11^2+10^2+16^2+6^2+4^2 = 12^2+14^2+8^2+2^2+3^2+5^2+15^2+9^2 = 748$。

6	3	13	12
15	10	8	1
4	5	11	14
9	16	2	7

筆者在2001年曾寫一首詩 〈異元太衡 — 完美幻方頌〉, 引申念及「和而不同」、異元共生的政治哲理:

連續數目一十六, 排成四方有妙形: 行列斜連和相等, 各方四角會加成。

橫豎輪旋呈異貌, 心隅對調見同宗。小道可觀蘊啓示, 異元共濟生太衡。

又, 德國人 Albrecht Dürer 於 1514 年的繪畫裡, 顯示牆上掛了一幅幻方的圖; 換成本文的表示法, 乃 $\mathbf{M}_{175} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 12 & 8 & 13 \\ 14 & 7 & 11 & 2 \\ 15 & 6 & 10 & 3 \\ 4 & 9 & 5 & 16 \end{bmatrix}$$, 與前述楊輝的「陽圖」($\mathbf{M}_{176}$ 的轉型)

相類似。它雖非可輪轉, 卻有高度的規則性 — 相加爲17的任何兩個數字都排在對稱的位置上。而且, 兩對角線上所有數字的平方和剛好等於其它所有數字的平方和。

從以上探討四階幻方所用的方法, 當可窺見高階幻方的堂奧。

—本文作者任教東吳大學—