數學傳播 39卷3期, pp. 42-46

等式 $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]=[\sqrt{9n+8}]$ 成立嗎?

李錦鎣

壹、前言

在今年 (2014年) 6月彰化師範大學理學院學術研討會上, 彰化師範大學數學系陳國傑教授以數論方法重新證明 Ramanujan 的一個等式: 對於任意的自然數 n, $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}]$ 必成立, 其中 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數, 也就是 x 的高斯函數值。本文中, 我們將用大一同學就會的基本方法, 推廣這個等式, 得到 $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]=[\sqrt{9n+8}]$。

貳、由 $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}]$ 談起

首先我們給 $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}]$ 一個證明, 同時也呈現我們針對此類等式的證明策略。既然想要說明 : 對任意自然數 n, $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ 與 $\sqrt{4n+2}$ 的整數部份相同, 那我們應該先比較 $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ 與 $\sqrt{4n+2}$ 的大小。

預備定理 (一): 若 $0<x\le 1$, 則 $\sqrt{4+2x}-(1+\sqrt{1+x})>0$ 必成立。

證明: 令 $f(x)=\sqrt{4+2x}-(1+\sqrt{1+x})$, 其中 $0\le x\le 1$。我們有導函數

$$f'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{2}}}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}>0,\quad 0<x<1.$$

所以 $f(x)$ 遞增。但是 $f(0)=0$, 所以, 若 $0<x\le 1$, $f(x)>0$。

同理, 我們有另一側的不等式,

預備定理 (二): 若 $0<x\le 1$, 則 $(1+\sqrt{1+x})-\sqrt{4+x}>0$ 必成立。

證明: 令 $g(x)=(1+\sqrt{1+x})-\sqrt{4+x}$, 其中 $0\le x\le 1$。我們有導函數

$$g'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4+x}}>0,\qquad 0<x<1.$$

所以 $g(x)$ 遞增。但是 $g(0)=0$, 所以, 若 $0<x\le 1$, $g(x)>0$。

預備定理 (三): 對任意自然數 n, 則 $\sqrt{4n+2}>\sqrt{n}+\sqrt{n+1}>\sqrt{4n+1}$ 必成立。

證明: 由預備定理 (一)(二) 知, 對任意自然數 n,

$$\sqrt{4+2\frac{1}{n}}>1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}>\sqrt{4+\frac{1}{n}},$$

分別乘以正數 $\sqrt{n}$, 得到 $\sqrt{4n+2}>\sqrt{n}+\sqrt{n+1}>\sqrt{4n+1}$。現在, 我們重新證明以下定理:

定理一: 對任意自然數 n, 則 $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}]=[\sqrt{4n+1}]$ 必成立。

證明: 由預備定理 (三) 知, 對任意自然數 n, 則 $\sqrt{4n+2}>\sqrt{n}+\sqrt{n+1}>\sqrt{4n+1}$ 必成立。因此它們的整數部份會滿足 $[\sqrt{4n+2}]\ge[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]\ge[\sqrt{4n+1}]$。但是如果 $[\sqrt{4n+2}]>[\sqrt{4n+1}]$, 也就是說 $\sqrt{4n+2}$ 的整數部份大於 $\sqrt{4n+1}$ 的整數部份, 那將會有一自然數 m, 使得 $\sqrt{4n+2}\ge m>\sqrt{4n+1}$, 所以 $4n+2\ge m^2>4n+1$, 因此平方數 m^2 等於 $4n+2$, 亦即 m^2 是 4 的倍數加 2。但是, 無論 m 是偶數 $2k$, 或是奇數 $2k+1$, m^2 只可能爲 $4k^2$, 或是 $4(k^2+k)+1$, 所以 m^2 不會是 4 的倍數加 2。這個矛盾是我們假設 $[\sqrt{4n+2}]>[\sqrt{4n+1}]$ 所造成, 因此 $[\sqrt{4n+2}]=[\sqrt{4n+1}]$。再由 $[\sqrt{4n+2}]\ge[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]\ge[\sqrt{4n+1}]$, 我們證明了 $[\sqrt{4n+2}]=[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+1}]$。

再來, 我們就要問 $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]$ 是否有類似等式? 如果我們讓 n 變得很大, $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]$ 幾乎等於 $[\sqrt{n}+\sqrt{n}+\sqrt{n}]=[3\sqrt{n}]=[\sqrt{9n}]$, 所以, 如果這個還沒出現的等式仍要成立, 我們就可以猜出這個等式應該呈現 $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]=[\sqrt{9n+s}]$ 的型式, 也就是說, 如果整數 s 選得正確, 那麼對任意自然數 n, 我們將證明 $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$ 與 $\sqrt{9n+s}$ 有相同整數部份。根據預備定理 (一)(二) (三) 過程, 我們嘗試先找到整數 p,q, 使得, 若 $0<x\le 1$, 則 $\sqrt{9+px}\ge 1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x}\ge\sqrt{9+qx}$。經由數學軟體 mathematica 實驗後, 我們將證明: 若 $0<x\le 1$, 則 $\sqrt{9+9x}\ge 1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x}\ge\sqrt{9+7x}$。其實, 函數 $\sqrt{9+7x}$ 可以調整, 只是爲了讓預備定理 (五) 的證明簡潔, 適合大一同學閱讀, 我們選擇了 $\sqrt{9+7x}$。

預備定理 (四): 若 $0<x\le 1$, 則 $\sqrt{9+9x}-(1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x})>0$ 必成立。

證明: 令 $f(x)=\sqrt{9+9x}-(1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x})=2\sqrt{1+x}-(1+\sqrt{1+2x})$, 其中 $0\le x\le 1$。我們有導函數

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{1+2x}}>0,\qquad 0<x<1.$$

所以 $f(x)$ 遞增。但是 $f(0)=0$, 所以, 若 $0<x\le 1$, $f(x)>0$。

預備定理 (五): 若 $0<x\le 1$, 則 $(1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x})-\sqrt{9+7x}>0$ 必成立。

證明: 令 $g(x)=(1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2x})-\sqrt{9+7x}$, 其中 $0\le x\le 1$。我們還是嘗試先問: 導函數

$$g'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+2x}}-\frac{1}{2}\frac{7}{\sqrt{9+7x}}$$

是否在 $0<x\le 1$ 時仍爲正數? 所以我們要檢查: 當 $0<x\le 1$ 時,

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+2x}}>\frac{1}{2}\frac{7}{\sqrt{9+7x}}$$

是否成立? 但是利用算幾不等式 , 我們已經有

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+2x}}\ge 2\sqrt{\Big(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{1+2x}}\Big)}=\sqrt{\frac{2}{\sqrt{1+x}\sqrt{1+2x}}};$$

因此我們轉而嘗試檢查: 當 $0<x\le 1$ 時,

$$\sqrt{\frac{2}{\sqrt{1+x}\sqrt{1+2x}}}>\frac{1}{2}\frac{7}{\sqrt{9+7x}}$$

是否成立? 將最後的這個不等式兩邊四次方, 再取倒數, 我們要檢查的變成是: 當 $0<x<1$ 時, 二次多項式函數

$$h(x)=\Big(\frac{8}{49}\Big)^2(9+7x)^2-(1+x)(1+2x)=\frac{-1}{2401}(1666x^2-861x-2783)$$

是否爲正值? 因爲 $h(0)>0$, $h(1)>0$ 且 $y=h(x)$ 圖形最高點在 $0<x<1$ 間出現, 就可以知道當 $0<x<1$ 時, $h(x)>0$。所以在 $0<x<1$ 時, $g'(x)>0$, 因此 $g(x)$ 遞增。但是 $g(0)=0$, 所以, 若 $0<x\le 1$, $g(x)>0$。

預備定理 (六): 對任意自然數 n, 則 $\sqrt{9n{+}9}>\sqrt{n}+\sqrt{n{+}1}+\sqrt{n{+}2}>\sqrt{9n{+}7}$ 必成立。

證明: 由預備定理 (四)(五) 知, 對任意自然數 n,

$$\sqrt{9+9\frac{1}{n}}>1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+2\frac{1}{n}}>\sqrt{9+7\frac{1}{n}}$$

分別乘以正數 $\sqrt{n}$, 得到 $\sqrt{9n+9}>\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}>\sqrt{9n+7}$。

在主要定理出現前, 我們還要先證明一個不等式。

預備定理 (七): 對任意大於 1 的實數 w, 則 $3w-1<\sqrt{w^2-1}+w+\sqrt{w^2+1}<3w$ 必成立; 所以, 對任意自然數 w, $3w-1=[\sqrt{w^2-1}+w+\sqrt{w^2+1}]$ 也必成立。

證明: 對任意大於 1 的實數 w, 我們先證右側的不等式: $\sqrt{w^2-1}+w+\sqrt{w^2+1}<3w$, 也就是說 $\sqrt{w^2-1}+\sqrt{w^2+1}<2w$。我們知道：當 $x>0$ 時, $p(x)=\sqrt{x}$ 有 $p''(x)=-\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x^3}}<0$, 所以 $y=p(x)$ 圖形的凹口向下, 因此當 $s>t>0$ 時, $\frac{p(s)+p(t)}{2}<p\Big(\frac{s+t}{2}\Big)$ 成立, 特別是 $\frac{p(w^2+1)+p(w^2-1)}{2}<p(w^2)$, 這說明 $\frac{\sqrt{w^2+1}+\sqrt{w^2-1}}{2}<w$ 成立, 我們也完成右側的不等式證明。我們再證左側的不等式: $3w-1<\sqrt{w^2-1}+w+\sqrt{w^2+1}$。也就是說, 對任意大於 1 的實數 w, 我們要證明函數 $q(w)=(\sqrt{w^2-1}+w+\sqrt{w^2+1}-(3w-1)=\sqrt{w^2-1}+\sqrt{w^2+1}-2w+1$ 必定大於 0。對任意大於 1 的實數 w, 利用算幾不等式, 我們知道導數

$$\begin{aligned} q'(w)&=\frac{w}{\sqrt{w^2-1}}+\frac{w}{\sqrt{w^2+1}}-2\geq 2\sqrt{\Big(\frac{w}{\sqrt{w^2-1}}\Big)\Big(\frac{w}{\sqrt{w^2+1}}\Big)}-2\\ &=2\sqrt{\frac{w^2}{\sqrt{w^4-1}}}-2>2\sqrt{\frac{w^2}{\sqrt{w^4}}}-2=0, \end{aligned}$$

所以 $q(w)$ 遞增, 又 $q(1)=(1+\sqrt{2})-2>0$, 因此 $q(w)>0$, 我們也完成左側的不等式證明。

定理二: 對任意自然數 n, 則 $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]=[\sqrt{9n+8}]=[\sqrt{9n+7}]$ 必成立。

證明: 對任意自然數 n, 我們先說明: $[\sqrt{9n+8}]=[\sqrt{9n+7}]$ 必成立。如果 $[\sqrt{9n+8}]>[\sqrt{9n+7}]$, 那將會有一個自然數 m, 使得 $\sqrt{9n+8}\geq m>\sqrt{9n+7}$, 平方後, $9n+8\geq m^2>9n+7$ 會推出平方數 m^2 是 9 的倍數加 8。但是整數 m 被 9 除, 只有 $9k$, $9k\pm1$, $9k\pm2$, $9k\pm3$, $9k\pm4$ 這些可能的表示法, 所以 m^2 被 9 除, 只有 $9K$, $9K+1$, $9K+4$, $9K+7$ 這些可能的表示法, 也就是說 m^2 不會是 9 的倍數加 8, 這個矛盾說明 $[\sqrt{9n+8}]>[\sqrt{9n+7}]$ 是錯的, 因此 $[\sqrt{9n+8}]=[\sqrt{9n+7}]$ 必成立。

由預備定理 (六): 對任意自然數 n, $\sqrt{9n+9}>\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}>\sqrt{9n+7}$ 必成立, 因此配合上一段證明, 我們有一個基礎不等式:

$$[\sqrt{9n+9}]\geq[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]\geq[\sqrt{9n+8}]=[\sqrt{9n+7}].$$

現在, 任意選一個自然數 n, 只有下列兩種可能 (a) $\sqrt{9n+9}$ 不是自然數; 或者 (b) $\sqrt{9n+9}$ 是自然數。

我們來看第一種情形: (a) $\sqrt{9n+9}$ 不是自然數。此時 $[\sqrt{9n+9}]=[\sqrt{9n+8}]$ 必須成立。否則 $[\sqrt{9n+9}]>[\sqrt{9n+8}]$, 將會有一自然數 m, 使得 $\sqrt{9n+9}\geq m>\sqrt{9n+8}$, 但是已知 $\sqrt{9n+9}$ 不是自然數, 所以 $\sqrt{9n+9}>m>\sqrt{9n+8}$, 因此 $9n+9>m^2>9n+8$, 那麼 m^2 介於相鄰整數 $9n+8$ 與 $9n+9$ 之間, 矛盾! 所以 $[\sqrt{9n+9}]=[\sqrt{9n+8}]$ 必須成立, 代回我們的基礎不等式, 得到 $[\sqrt{9n+9}]=[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]=[\sqrt{9n+8}]=[\sqrt{9n+7}]$必須成立。

我們再來看第二種情形: (b) $\sqrt{9n+9}$ 是自然數, 所以 $3\sqrt{n+1}$ 是一個自然數 r。因爲 $\left(\dfrac{r}{3}\right)^2=n+1$ 是自然數, 所以 r 是 3 的倍數。令 $r=3w$, 所以 $\sqrt{9n+9}=[\sqrt{9n+9}]=r=3w$, 亦即 $3\sqrt{n+1}=r=3w$, 因此 $n=w^2-1$, w 爲大於 1 的自然數。由 $9w^2>9n+8=9w^2-1>9w^2-6w+1=(3w-1)^2$, 我們又知道 $3w-1=[\sqrt{9n+8}]$。現在, 我們已經有的基礎不等式

$$[\sqrt{9n+9}]\geq[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]\geq[\sqrt{9n+8}]$$

變成

$$3w\geq[\sqrt{w^2-1}+w+\sqrt{w^2+1}]\geq[\sqrt{9n+8}]=3w-1,$$

再配合預備定理 (七):

$$3w-1=[\sqrt{w^2-1}+w+\sqrt{w^2+1}],$$

我們就得到 $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]=3w-1=[\sqrt{9n+8}]$。

這兩種情形中, 我們都得到 $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]=[\sqrt{9n+8}]$, 所以完成我們的證明。

使用完全相同的策略與類似的證明, 我們也可以證明以下結論:

定理三: 對任意自然數 n, 則等式 $[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}]=[\sqrt[3]{8n+3}]=[\sqrt[3]{8n+4}]$ 與等式 $[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}]=[\sqrt[3]{27n+26}]$ 必成立。

致謝: 我們非常感謝彰化師範大學數學系陳國傑教授爲我們展示 Ramanujan 等式, 爲這篇文章奠定重要基礎。

参考文獻

1. Kuo-Jye Chen (2014). On a problem proposed by Ramanujan, 2014 彰化師範大學自然科學研討會會議手冊。

—本文作者任教國立彰化師範大學數學系—