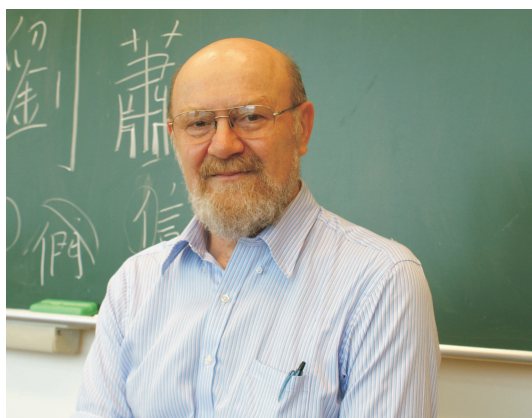


## 有朋自遠方來——專訪

### Michael Aizenman 教授



策 劃：劉太平

訪 問：劉太平

時 間：民國 100 年 7 月 15 日

地 點：中央研究院數學研究所

整 理：陳麗伍、蔡李承、黃馨霈

Michael Aizenman 教授 1945 年生於俄羅斯下塔吉爾 (Nizhny Tagil), 1969 年畢業於耶路撒冷希伯來大學, 1975 年獲紐約葉史瓦大學 (Yeshiva University) 博士學位。先後任教於美國羅格斯大學 (Rutgers University) 及紐約大學, 1990 年起任教於普林斯頓。曾獲 AMS-SIAM Norbert Wiener Award、數學物理 Dannie Heineman Prize 等多項殊榮, 為美國國家科學院院士。Aizenman 教授在數學物理、統計力學及機率等方面, 有卓越獨步的貢獻。其為人謙和理性, 受人敬愛。

劉太平 (以下簡稱「劉」): 謝謝您撥空接受訪談, 您一開始接受的是物理方面的訓練嗎?

Michael Aizenman (以下簡稱「A」): 當別人問我到底是數學家還是物理學家, 我的標準答案是, 我奉行 (美國) 憲法第五條修正案 (不做於己不利的陳述)。我一直都處在兩者的邊界, 也努力讓自己維持在這個邊界上。上大學時, 我曾嘗試主修物理、數學和哲學, 哲學很早就打了退堂鼓。我的 PhD 正式來說是物理, 但之後在 Courant Institute 的第一個博士後, 研究的卻是數學。後來到普林斯頓則是跨足兩系, 普林斯頓有兩個領域共同聘任的傳統, 我簡直如魚得水。

劉: 您大學學位也是雙修嗎?

A: 大學我應該是雙主修, 我不記得偏重哪個。基本上打從開頭我就比較傾向數學, 所以當我回

想是什麼科目吸引我，讓我投注時間和想像時，多半是數學；可是當我學了基礎力學和量子力學時，卻和物理密不可分，我深受其吸引，所以一直在數學和物理之間。

劉：環顧您身邊數學界的友人，我想大多數人的物理背景都比您來得少，對吧？

A：還是有些例外。舉個例子，Lieb<sup>1</sup>做物理，也跨足物理和數學。我對兩個學科的關係有如下與我所觀察相符的看法；物理學家嘗試和自然以及身旁所見萬物產生連結，物理的本質，我不是很確定，但它豐富而多面，總能以它的豐富性及多元面向給人出其不意的驚喜。這些物理現象在局部可以用數學來分析，用數學的話語類比，數學所處理的有點像正切 (tangent)，就像更複雜東西的切空間 (tangent spaces)。這裡所比喻的切空間並不是指線性的東西，因為數學可以是很非線性的，但是嚴謹的數學規則應用於極為局部的一部份，總能在某些其它面向讓人驚歎。兩者的交互關係對我來說非常重要。

劉：了解。就您剛才所提，要看出既能反映重要的物理現象，又可以做些什麼的數學問題，似乎沒那麼容易。

A：也不難。舉例來說，一個很吸引我的主題是統計力學的臨界現象。從物理發端，由實驗真的觀察到臨界指數的普適性，竟達出乎意料的程度，令人驚歎、又運作得非常美好。人們試著用數學來解釋時，構思出統計力學的模型，提出臨界行爲 (critical behaviors)、相變 (phase transitions)、奇異點的本質 (nature of singularities) 的想法。之後到一個階段，我能參與討論，試圖在特定模型釐清這些問題。讓我感到著迷的一個特別的問題，是臨界系統裡尺度極限 (scaling limit) 的觀念，一旦用數學的方式形塑所追求的東西，會發現一方面，開啓精確數學結構的一道門，能通往漂亮的數學，同時也發現數學在某種程度上的侷限。像 Stochastic Loewner Evolution (SLE) 這類主題本身，我沒有貢獻，但是將問題具體陳述，由此而導出問題的解答，我確實有貢獻，對於數學物理學家來說這是很自然的，大大豐富了數學及現代機率。找出那些問題並不難。

劉：至少對您來說不難！就我所能想到的，或許有兩類人。第一種從物理開始，試著形塑出數學問題，就如您剛才所提到的；很高興的形塑數學問題，其他的數學家可能會接手做下去。第二種人，則是尋覓別人告訴他、與物理相關又能運用分析工具做些什麼的問題。假設我們只將人粗略地分成這兩類，如果我的分法有那麼點道理的話，第二種人有怎樣的缺點？

A：嗯，大部分的時間我的確在做數學分析的問題，這些問題的動機某些方面來自物理，或者來自物理學家一些不用數學分析就能打開一扇窗的想法。這是我大部分時間在做的事，多數時候做的是數學，不是發展猜想，猜想就留待我的數學同儕。剛才提到的 SLE，一方面是個成功的故事，我具體構思出問題，通過一些初步的步驟，做了精確縝密的檢視。之後問題被他人接手，如雨後春筍般發展成漂亮的數學。不過某種程度上我把它看作身為數學家的失敗，

---

<sup>1</sup>Elliott H. Lieb (1932~)，美國數學物理學家，專長為統計力學、凝體論及泛函分析。

因為我的初衷是自己來解決問題。但是隨著時間我領悟到，解決一個數學問題的貢獻固然很大，我不想貶抑它，但是某種程度上，構思出一個好的問題可能更有價值。

劉：所以你所謂的失敗其實給了你長久的滿足。

A：一定程度的滿足。但是我真的想解決這個問題，卻讓它從我手中溜走。我曾和一些同事說，解出一個了不起猜想的數學家，應該要有些責任提出另一個問題。

劉：沒錯，所以這樣就留了些東西給後代。或許是因為年紀的緣故，我發現光是看出一個好的問題就得到很大的滿足，不一定非要自己來解。談到構思問題，聽說 Parisi<sup>2</sup>做了些這樣的事。

A：不是在將問題具體成形，Giorgio Parisi 具有洞悉並且具體描述一個結構的眼光，對於不怎麼突出的問題，他能發掘出完全出人意表的答案，得出答案的邏輯起初很難讓人理解。例如朋友告訴我，Parisi 在出席 Toulouse 會議時曾和他討論是否數學家知道無窮維群 (infinite dimensional groups) 的零維表現 (zero dimensional representation) 這類的事，Parisi 想要用它作為接下來他想表述的動機。最後證實他是對的，但不是照著他的步驟得到。大致說來，我發現通常在數學物理領域，人們傾向研究由物理學家擬想出的結構及可能的解法，能成功通常不是循著第一個人指出的路徑來檢視驗證，而是發展出自己對該主題的觀點，再觀察所得到的結果與物理的想法相激盪出的回響。

劉：數學家必須跟隨自己的直覺。

A：沒錯，我的意思是工具很不一樣。其實人們對數學物理學家的工作常有一個錯誤的觀念，物理學家常覺得，數學物理學家只是檢查  $\varepsilon$ ，在細節上下功夫，通常卻不是如此。

劉：事實上，我可以想見好的物理學家欣賞的是，數學家如何真正解決問題，而不是把他們的想法加以嚴謹化。他們會很高興數學家能夠實際找出在其它方面也很有用的不同數學結構，我們的創造具有某些普遍性。

A：沒錯，物理學家需要持續受到這樣的教育。在數學家和物理學家的互動上，令人感到沮喪的一個方面就是物理學家通常不這麼想，或如我描述的那樣看事情。他們的防衛心通常很重，憑藉直覺洞察事物的本質來得出結論，覺得自己越過了早期無法通透的面向。但是當數學家用他們不懂的方法處理題目時，他們變得很抗拒，視而不見我們剛才提到的觀點——不同結構的顯現。

劉：您可以給個例子嗎？

A：物理上重整群論 (renormalization group theory) 早期的一個例子出自 Phil Anderson<sup>3</sup>的

<sup>2</sup>Giorgio Parisi (1948~)，義大利理論物理學家，以在統計力學、量子場論及物理、數學和科學整體多面向的工作聞名。

<sup>3</sup>Philip Warren Anderson (1923~)，美國物理學家，1977年獲諾貝爾獎，經由在出射現象 (emergent phenomena) 的著述，對物理理論及科學哲學有所貢獻。

研究, 那是 1972 年左右一篇很漂亮的論文, 與近藤效應 (Kondo effect)<sup>4</sup>有關, 在相當複雜的系統中, 描述自由度為二或三的重整群流方程 (renormalization group flow equation)。藉由研究, 他們 (與 Hamann 及 Yuval 合作) 導出這個方程並回答了問題, 除此之外他們引入以極為具體的方式描述重整群的概念, 因此導出具體又不凡的結果。但是從那時候開始, 主要作者 Anderson 就對嘗試用數學方式探討這個主題的數學家不甚歡迎, 歷經多年才 (以數學方式) 證明某些關鍵結論是正確的。那麼它的價值何在? 它的價值在於一旦用數學的語言來描述現象, 便可類推至其它不同的學科領域。舉例來說, 臨界現象及相變, 實際上 一旦可以用數學的方式描述, 對這些現象的欣賞重視, 就能推廣至其它領域: 離散數學、資訊理論, 遠超出當初只針對的凝體 (condensed matter) 問題的範疇。數學語言使迥異的觀點得以連結, 有些人的重大貢獻只因為指出在這裡有用的想法, 一旦以某種數學方式具體表述, 就能為其它領域打開一道探究其內涵的門。

Jennifer Chayes<sup>5</sup>領導的團隊 Microsoft research 非常成功, 她與 Bollobas<sup>6</sup>和其他人共事。我們的朋友 Joel Spencer<sup>7</sup> 把統計力學及臨界現象的深刻想法帶入圖論, 因為編碼及訊息理論的關係, 數學家對這些問題非常感興趣。

劉: 您什麼時候取得博士學位, 發表第一篇論文?

A: 我最早的論文和碩士學位有關, 從未完成。那時我中斷了在希伯來大學 (Hebrew University) 研究所的學業, 前往美國攻讀博士。第一篇論文是跟 Joel Lebowitz<sup>8</sup>、Sheldon Goldstein<sup>9</sup>還有 Giovanni Gallavotti<sup>10</sup>一起做的關於無窮粒子系統的動態學, 我們對與統計力學相關主題的動態系統觀點很感興趣。

劉: 是哪一年?

A: 我 75 年拿到學位, 大概是那時候。

劉: 您人生旅程中有不少轉折, 一路走來遇過什麼樣的風景、什麼樣個性的人, 可否描述一二? 某些您遇到的特定的人?

A: 我有機會接觸的人? 到美國的時候, 剛開始我對量子物理的基礎很感興趣, 後來我跟 David Finkelstien<sup>11</sup>有頻繁的互動, 他有這樣的觀點: 量子力學的要義是, 物理實體的邏輯跟我

---

<sup>4</sup>Anderson, Yuval, and Hamann. Exact Results in the Kondo Problem. II. Scaling Theory, Qualitatively Correct Solution, and Some New Results on One-Dimensional Classical Statistical Models. Physical Review B, 11, volume 1, 1970.

<sup>5</sup>Jennifer Tour Chayes, 美國人, 現為新英格蘭及紐約微軟研究院執行董事及傑出科學家。

<sup>6</sup>Bela Bollobas (1943~), 匈牙利籍英國數學家, 研究遍及數學各領域, 包括泛函分析、組合數學、圖論及滲透。

<sup>7</sup>Joel H. Spencer, 現為紐約大學數學科學院 (Courant Institute of Mathematical Sciences) 教授, 研究興趣為離散數學及理論電腦科學。

<sup>8</sup>Joel Lebowitz(1930~), 數學物理學家, 參閱本刊 36 卷 3 期有朋自遠方來 — 專訪 Lebowitz 教授。

<sup>9</sup>Sheldon Goldstein, 現任教於羅格斯大學 (Rutgers University)。

<sup>10</sup>Giovanni Gallavotti (1941~), 義大利數學物理學家。

<sup>11</sup>David Finkelstein(1929~), 現為喬治亞理工學院 (Georgia Institute of Technology) 物理榮譽退休教授, 研究導向主要為量子理論的時空結構。

們習慣的古典邏輯不一樣。他認為這個邏輯前後非常一致，遵循它應該可以建立起某些結構，由此，即便是時空都能依量子邏輯的規則顯現。過了一年的時間我才體悟到這是吸引人的想法，但我想在研究上有更多實質明確的成長，同時我也從 Joel Lebowitz 以及他圈子中的學者們，認識到數學物理的豐富。

當 Joel Lebowitz 的研究生是很特別的經驗，因為氣氛很放鬆，他的課結構不那麼嚴整，在他那裡可以直接接觸到川流而至非常有趣的人。所以我有機會聽到 David Ruelle<sup>12</sup> 及 Oscar Lanford<sup>13</sup> 當著極少數聽眾所做的即席講解和討論，他們都是傑出的學者。當時年輕的我意會到一件事：並不是有的人聰明，有的人比較聰明，事實是每個人各有不同的能力和對事物不同的體會罷了。

有些人擅長掌握數學結構，能頭頭是道條理分明地講解，讓人瞭解其中的美妙，在面對太過混沌不清的情境時，卻可能感到不安。我觀察到 Joel 在研討會中可能迷失在數學機制的細節裡，卻在最後提出非常深刻的問題，讓有些從頭到尾完全跟不上數學結構的人嚇了一跳。後來，我到普林斯頓跟 Elliott Lieb 做博士後研究。

劉：兩人的個性很不一樣。

A：是啊，同時大家仍然在一個很友善的圈子裡。我認為 Elliot 是具有物理背景的數學物理學家，卻能著眼用非常數學的語言來表述結果。同樣的，一方面他一直堅持試著和物理母親保持連結，另一方面他的論文衍生出非常有趣的數學。

劉：我忽然想到，有件事對我來說有些神秘難解，就是文化如何影響一個人，不過這可能不適用於您的情況。華人文化就是個例子，冒昧地說您來自猶太文化，不知道對不對？

A：對，我是猶太人。

劉：非常不一樣，文化帶給我們不同的價值觀。我們都曾接觸兩種不同的文化和其它文化，您是否介意談談？

A：我瞭解你話裡的一些意思，如果你看過楊振寧和李政道的工作，我覺得有些華人物理學家一直強調一種巨觀，以及跨越特定模型研究與例如對稱的蘊涵和對稱的角色這些相關問題之間的橋樑。不過這不是中華文化或華人物理學家獨有的。接觸各種文化確實有必要，你所接觸的文化的確影響你的研究，但只到某一程度。舉例來說，我想你應該注意到，大英的帝國主義多少影響了美國做量子力學問題的方法，而量子力學源自歐洲或德國的傳統，有些微偏向於量子物理基礎面向的討論，理查費曼 (Richard Feynman)<sup>14</sup> 對這個的回應：「閉嘴，先計算再說！」傳達了某種精神，我們或許會把它與美國的青春活力做連結。這樣的區分不是絕對，卻豐富了這個領域。

<sup>12</sup>David Ruelle(1935~)，比利時-法國數學物理學家，以在統計物理與動態系統的工作聞名。

<sup>13</sup>Oscar Lanford(1940~2013)，美國數學家，致力於數學物理學及動態系統理論的研究。

<sup>14</sup>Richard Feynman (1918~1988)，美國理論物理學家，1965年獲諾貝爾物理學獎，以量子力學路徑積分表述的研究著稱。

劉：日本人也很不一樣，但基本上我們都是獨立的個人。

A：不，我們絕對深受文化影響。我要說的是，並不是有人對某個探討方式無感，這個方式對其他人卻是重要的，是程度上不同。

劉：您近來的興趣為何？這個問題問得不好，有一次我問 Joe Keller<sup>15</sup> 這個問題，他回答：「你是指昨天下午，還是今天早上？」您心底希望自己能做什麼？您的夢想是什麼？

A：嗯……大聲說出自己的夢想很難為情，好像有點不夠謙虛，但擁有高遠的目標很重要。有時候我覺得解析數論上的議題為機率及統計力學提供了下一個疆土，有趣的事情在此發生，但是我手上有許多隨機 Schrödinger operators 的研究，結合了機率和分析，而且我們與前面提到的其它領域還沒有完全脫勾。

劉：您是否曾動念嘗試黎曼猜想 (Riemann Hypothesis)？

A：嗯，誰不會？

劉：為什麼那個問題會那麼難？

A：某方面，它涉及引起隨機行為的偽隨機 (pseudo-randomness)。從機率的觀點來看，質數定理大致相當於大數法則，而黎曼猜想是另一個層次，在機率裡可以想成與中央極限定理對應，只是質數沒有任何隨機性。然而當你看著它的變動，像 Mobius 函數，試圖捕捉哪些微小的隨機性質將會造成很大的影響。事實上許多系統與統計力學有關。Boltzmann 對統計力學的描述，如 equivalence of ensembles，與促成對非機率非隨機系統的穩健機率描述有關。針對這些發展出數學工具是我們的挑戰，這類挑戰出現在許多情況。

劉：所以黎曼猜想至少在這方面是重要的？

A：有目標很好，我不知道目標本身是否也很重要，但那條路是引人入勝的。我們已經知道黎曼猜想在數學上有許多推論，我想證明它是有價值的。一個人對自身的夢想和工作有目標很好，這並不意味最重要的結果是證明，重要的是他對問題逐步理解以及衍生而來的結果。我進入數學物理領域時，建構性量子理論被視為值得追求的目標，許多好的事情在數學物理學家的努力下發展出來，並不是因為達成了目標而是被實現為……，原先計畫的目標其實並沒有……這麼說好了，當我做博士後的時候，數學物理學家的當務之急是理論物理的危機，這個危機來自物理學家用場論 (Field Theory) 的觀念作為物理實體描述的基本工具，但在數學上場論是什麼並沒有真正清楚的界定。數學物理學家的目標是造出一些四維的模型，事實上提出來的模型無法得出所要的結果，但是試著理解這個結構的努力，已經引出許多有趣深入的想法及意外的收穫。

---

<sup>15</sup> Joseph Keller(1923~)，美國數學家，史丹佛大學榮譽退休教授。

劉: Glimm<sup>16</sup> 和 Jaffe<sup>17</sup>在這方向努力過, 他們有一段豐富的歷程, 對吧?

A: 對。同樣, 如何劃分個人的心力是個有趣的問題, 應該把心力花在廣為人知的目標, 像在四維中建構場論, 解決黎曼猜想或是登上月球, 還是鼓勵研究那些從草根 (grassroot) 出發的主題? 我覺得強調任一邊都不是最好的作法。

劉: 在這個意義下, 民主在學術界很重要。

A: 一點也沒錯。一方面提出目標、有價值的目標是好的, 但在不嚴格縮減其它領域或其它方向工作的前提下, 長期下來可能會有更多貢獻來自於研究草根的題目; 另一方面, 缺少一些值得追求的目標, 大部分傾向做有趣研究的人, 看來有點茫然無所適從。

劉: 歐洲自文藝復興開始引領科學發展, 多年來東方知識份子不停自問, 這個古老文明到底出了什麼問題? 阿拉伯文明也是同樣的情形, 他們的興盛時期與東方文明中國唐朝等的繁盛時期重疊, 之後不知為何便停滯了。當然, 背後的原因很複雜, 但我們談到這個草根的思維, 真的是這樣嗎? 文明發展有個先決條件, 就是社會必須要有一定的自由。

A: 完全沒錯。擁有追尋個人喜好的自由, 對個人創造力絕對很重要, 同樣重要的是對知識的重視, 會因此引發求知的動機和行動。你提到猶太文化, 很長一段時間猶太人在歐洲沒有上大學的自由, 在某些國家和地區很受限制, 因地而異。我有個印象, 美國科學界引爆猶太人才的湧現, 部份由於那一代人希望孩子能功成名就, 鼓勵下一代打開原先封閉的大門, 所以費曼那一代, 我可以列出長長一串, 通常都不是教授的小孩, 他們用活力和熱忱消弭障礙。雖然他們自己不見得這麼想, 時不時還是聽得到人們這樣說。

劉: 所以早一代的家庭教育非常重視求知等等。

A: 有求知的壓力, 但在求知的路上受到限制, 而在情況緩和, 機會來的時候, 成果就出現了。

劉: 是宗教嗎? 是什麼讓他們把求知看得這麼重要?

A: 我不覺得是宗教, 應該是重視學識以及思、辯、存疑好問的文化。

劉: 很難知道為何他們重視某個特定的價值, 只能說那已成爲他們的傳統。

A: 對, 但是這樣的傳統, 如果將這個圈子裡出現的科學家及數學家的數量看作時間的函數, 數字不是一直很耀眼。到了二十世紀, 尤其在美國, 歐洲也是, 才看到那方面的迸發。

劉: 在我看來這種對知識的追求和其它所有人類的活動, 很多時候是利之所趨, 但絕對不僅止於此, 因爲每個人都努力工作賺錢, 求知不見得是最容易、能夠直接賺錢的方式, 它可以是動機之一, 但是猶太文化勢必受到其它動機的驅使。

A: 任何文化, 我不想特指猶太文化, 任何文化都是如此, 每個人都在尋求某種意義的自我滿足,

<sup>16</sup> James Glimm (1934~), 美國數學物理學家, 參閱本刊 31 卷 4 期有朋自遠方來 — 專訪 James Glimm 教授。

<sup>17</sup> Arthur Jaffe (1937~), 美國數學物理學家, 現爲哈佛大學教授, 與 James Glimm 共同建立起建構性量子場論的主題。

不僅是自我滿足，更是認可。沒錯，賺錢可能是部份的動機，但自我滿足也是個很強的動機，特別是在重視個人知識貢獻的文化中。

劉：舉例來說，華人有些特點，總愛吟詩——這是抒發感懷的最高形式。前中國國家主席江澤民<sup>18</sup>，每到一地都要作詩，他不是詩人，不像亞伯拉罕·林肯 (Abraham Lincoln)<sup>19</sup>是位真正的詩人，但他就是情不自禁。

A：嗯，但我認為年輕一代注意到這些了。在我成長的過程中，高中生接觸的書籍只強調世界在科技發展方面的改善，傳達的訊息是，如果你很傑出，就應該投入這方面。有些人覺得自己學識淺陋，不足以解決科技的問題，不過花時間解數學問題或是其它任何出現的技術性議題，仍然讓他們感到滿足，並不是因為自認自己真的解決某個特定問題，而是這樣做確實帶來一些誘因和鼓勵。

劉：感覺自己也出了一些力。

A：對，在一個領域成功讓人感到很滿足，在更廣義之下的成功也讓人感到滿足。我認為在我們的領域，人們工作的動力來自於從中得到的滿足，某方面來說，在某些意義下我們無法停止對問題的思索。我指的是我自己，因為我碰巧更了解自己，但是我想這是很普遍的，我一直在思考吸引我的問題，不是因為任何的獎勵或是鼓勵，只是很難放下對它們的追索。

劉：我聽別人說 Michael Aizenman 做事有獨到之處。我已經問了些不好的問題，容我再問一個吧！

A：沒有不好的問題。

劉：什麼事情是您很努力做，又與眾不同的？

A：我覺得各有各的獨特，很難說。

劉：我知道這個問題問得不好，讓您尷尬。讓我換句話說，某些事能使您真正感到喜悅，像是「我走在這條路上，滿心歡喜能繼續前進。」或是特定的事情，可大可小。

A：太多焦點放在我身上，很難回答。不過大致來說，我覺得在探討吸引我的主題上我很幸運。剛起步時我就知道自己想從事的是怎樣的工作，其實有人告訴過我，要賺錢這不是個很好的選擇，因為將來大學的研究預算可能會受到限制等等，但我不在意。我很清楚自己要做的的是什麼，我發現自己不知怎地比預期來得成功，天道酬勤，我的人生非常豐富。我很幸運能與不同悟性、喜好和見地的人相遇並且交流，對我幫助很大。我喜歡與人合作，一起發展出想法通常很快樂，但我也喜歡有自己的時間思考自己的問題。起初，我很高興自己確實能在那方面有所貢獻，後來我發現來自各方、年輕的同事們，在我一開始就期待看見並傳遞給他們

---

<sup>18</sup>江澤民 (1926~)，中國退休政治人物，1989 至 2002 年任中國共產黨中央委員會總書記，1993 至 2003 年擔任中華人民共和國主席。

<sup>19</sup>亞伯拉罕·林肯 (1809~1865)，第 16 任美國總統。



的一些問題上有進一步的發展，我也學到為此感到欣喜。

劉：您能否描述一、二？

A：讓我來給個關於先前提到的例子，成功會帶來歡樂，即便我不是最後那個達陣的人。81、82年我引進隨機漫步表示 (random walk representations) 解決了一些統計力學裡的場論問題，這是從洞悉不相交隨機漫步在高維的機率性質而得到的。我受邀到巴黎做這方面的演講，描述問題時，察覺到有些問題我還沒辦法解，因此列出這個問題一個頗為簡化的版本，是關於二維隨機曲線的不相交指數 (non-intersection exponents)。我提出一個問題：不相交的兩條二維布朗路徑 (Brownian paths) 的冪定律 (power law) 是什麼？這是有關我想探討的問題中，最簡單的問題，也是我還不明白的問題，我甚至承諾一瓶好酒給能解決的人。幾年後，那時就和我成為朋友的物理學家 Duplantier<sup>20</sup>，只憑著結合數值和依靠保角場論得出的預測，找到了答案。他得出的答案，是由一些有理數構成的冪次族，並不簡單，但不是經由證明得出。他問我是否可以頒獎了？我說沒有證明，沒有獎，最後經由 Stochastic-Loewner Evolution 技巧的發展，Schramm<sup>21</sup>、Lawler<sup>22</sup>以及 Werner<sup>23</sup>的工作導出嚴謹的證明，證實這個 Duplantier 發現、非常有趣的解法確實是對的。

劉：哇！所以繞了一圈，問題傳回物理學家手中又再回到數學家。

A：一點也沒錯，這導向一些其它我具體敘述、引領 Stochastic-Loewner Evolution 發展的問題，在這些證明 Duplantier 的猜測確實是對的人手中，成就了令人讚歎的數學。那時我被問到獎是為何而頒，我是物理學家還是數學家？因為物理學家重視發現，如果多次嘗試失敗，可是得到些對的結果，發現一個新的法則，獎就是為此而頒。而數學家重視證明，貶抑錯誤的證明，失誤被人一再提及永遠留著案底。但身為數學物理學家，兩者我都看重，所以這個獎頒給這四個人。這是數學界的一項重大成功，Werner 因為這一系列的工作獲得菲爾茲獎 (Fields Medals)，Schramm 早該獲獎，但因為那時年過四十，大了兩週，所以和獎失之交臂。這樣漂亮的數學，事實上是源自一個問題，對我而言這是數學和物理互動的一個例子。你先前的提問，我現在或許可以回答得更好一點。我花了些時間研究臨界滲濾過程 (critical percolation processes)，滲濾模型 (percolation model) 是最簡單的模型，在此模型裡可以用相當簡單的方式描述相變、臨界行為，到此，想知道尺度模型的極限 (scaling limit of the model) 就變得很清楚了。

現在，對於一個離散方格的變數，要如何描述它們的連續極限？直覺來看，可能認為是每個

<sup>20</sup>Bertrand Duplantier, 法國物理學家, 任職法國理論物理研究所 (IPhT, Institut de Physique Théorique)。

<sup>21</sup>Oded Schramm(1961~2008), 以色列美國數學家, 以 Schramm-Loewner Evolution (SLE) 及保角場論和機率論的相關工作聞名。

<sup>22</sup>Gregory Lawler (1955~), 美國數學家, 任職芝加哥大學。研究機率論, 以在 Schramm-Loewner Evolution 的工作著稱。

<sup>23</sup>Wendelin Werner (1968~), 德裔法國數學家, 2006 年菲爾茲獎得主, 研究領域為自身迴避隨機漫步 (self-avoiding random walks) 及 Schramm-Loewner Evolution 等。

連續位置，我講得有點太數學了，省去些細節。我認為我們的數學受到很大的限制，數學分析受限於一個事實，也就是我們能處理的數學概念根據的是數量可數的自由度的集合，如果取隨機函數的尺度極限，可以想像一個函數，每個連續點的值都是另一個獨立的隨機變數。但是數學世界裡沒有這樣的函數，我們不能有不可數的獨立自由度集合，在這個意義之下有很大的侷限，如同信奉畢氏學說者的小秘密一樣，那是數學的秘密，我們只能夠把現實的一小部分描述得很好，所以我們試著思考離散模型的尺度極限，什麼是連續？它讓我們認識到在尺度極限的一個連續點，其實囊括整個崩解於其中的世界，而非一個單一的自由度，希望這樣的觀念是清楚的。

如果從一個離散分割開始，比如將一個單位正方形分割為許多格子，每格的邊賦予一些有趣的變數，以滲濾模型為例，一個鍵 (bond) 代表是否可以傳輸，觀察沿著開放鍵形成的路徑。研究那些路徑的大域行為，從巨觀的觀點來看，這是一個連續模型，問題在於如何以數學的方式理解。你發現可以從巨觀的觀點也可以從微觀來研究這個系統，無論採用哪種觀點，都會遺漏許多訊息。我和 Almut Burchard<sup>24</sup> 合作，試著為這個模型的連續描述構思出一種數學語言，我們考慮隨機曲線的空間，以描述一堆隨機曲線的集合，來描述尺度極限。

Schramm 有另一個想法在二維運作得極好，由此導出了 Stochastic-Loewner Evolution。現在有人從事這個領域的工作，研究帶有某些保角不變性質的隨機曲線所具有的性質，這是已經陳述得很好的領域。數學只掌握到模型的一部分，但是對我來說，最引人入勝的是，精準漂亮的數學與模型所具有更豐富本質的連結。這些問題從嘗試找出臨界行為的特性發端，延展出非常明晰漂亮的數學，在這個意義下這是個成功的故事，雖然這裡數學只捕捉到我們試圖了解的一小部分。

劉：這和您剛開始說的，物理的豐富性以及切空間相呼應。

A：對，我應該提一下，最近兩次的菲爾茲獎是頒給這個領域的 Werner 和 Smirnov<sup>25</sup>。

劉：多少指出了大家心照不宣菲爾茲獎的本質。您說的故事很美，引人深思，的確呼應了您說的「不同的人有不同的才情悟性」。

A：提出挑戰讓人們攀頂，或與他們產生共鳴。

劉：天氣好一點的時候再到台灣來，非常謝謝您！

A：非常感謝！

—本文訪問者劉太平任職中央研究院數學研究所，整理者陳麗伍曾任中央研究院數學研究所助理，蔡李承現就讀史丹佛大學研究所，黃馨霈現為中央研究院數學研究所助理—

<sup>24</sup> Almut Burchard, 多倫多大學教授, 研究興趣包含對稱重排 (symmetric rearrangements), sharp geometric inequalities, PDE 的幾何問題、機率、網路排程及延遲分析。

<sup>25</sup> Stanislav Smirnov (1970~), 俄羅斯數學家, 2010年菲爾茲獎得主。專注於複變分析、動態系統及機率論領域的研究。