數學傳播　39卷2期, pp. 15-29

科學的 Symp 化*

—— Symp 幾何是數學與物理的終極基礎

原作者：Mark J. Gotay†, James A. Isenberg‡

本文原載 Gazette des Mathématiciens 54, 59-79(1992), 得到作者及 Gazette 同意翻譯及刊載, 謹此致謝。

譯　者：尉遲䔧

致謝: 感謝 Jerry Marsden 和 Alan Weistein 針對本文前面幾次草稿的批評指點。這個工作部分由 NSF DMS-8805699 和 PHY-9012301 補助。第一位作者在此感謝本文進行中福特基金會給予的獎助。

物理即幾何。這句銘言是現代物理的準則之一, 主要源自愛因斯坦 — 在他最重要的貢獻廣義相對論中, 將重力現象看成時空幾何曲率的反映。愛因斯坦的卓見是如此簡潔, 觀念上強而有力, 在物理學上廣受歡迎。也導出一個與觀察和實驗結果十分吻合, 精確的重力理論。幾何觀點進一步的成功是過去 40 年間 (註: 本文成於 1992) 所發展的關於基本物理過程的 gauge 或稱 Yang-Mills 場論。如今, 不僅重力是幾何的展現, 連電磁, 核子力都是。熱絡的研究工作持續朝向終極的「統一場論」— 所有基本物理作用力與幾何的天作之合。

廣義相對論和 gauge 場論用的幾何叫黎曼幾何, 以 19 世紀德國大數學家黎曼爲名, 是我們熟悉而且古老的歐氏幾何在彎曲空間上的推廣。不過還有一種不太爲人熟知, 也不那麼直觀的幾何卻與物理有更深的淵源 — symplectic 幾何。這是力學背後的數學, 根植於古典物理的基礎。諸多物理系統與現象如陀螺、磁場、水波的擴散, 甚至重力場本身, 有很大程度都可以用這種幾何來描述、理解。

*因爲 symplectic form 實際上是複幾何內積的負虛部, 譯者選擇用「symp」代替一般慣用的「辛幾何」的「辛」以凸顯其意義。

†Mark J. Gotay (1952∼) 美國數學/物理學家, 現爲 University of British Columbia Pacific Institute of Mathematical Sciences 的 Assistant Director。

‡James A. Isenberg, 美國理論物理學家, University of Oregon 數學系及物理系教授。

所以物理就是幾何 — symplectic 幾何 (symp 幾何)。不僅在公式, 理論層面如此, 甚至在實際的工程方面亦然。symp 幾何逐漸成爲瞭解複雜物理系統, 如超級超導對撞器、偵測土星的伽利略探測器等大尺度行爲不可或缺的工具。在研究主宰這些物體運動的複雜微分方程式中被遺漏的部分, 可以經由 symp 幾何來理解、補救。這類理解常常是至關緊要的, 可能就此挽救 1950 年代晚期探索 1 號衛星的失控墜毀, 當時它繞著一個動力上不穩定的軸旋轉。

除了在物理與工程中的關鍵角色, symp 幾何也在數學中扮演越來越重要的角色, 不僅 symplectic 的想法風行草偃, 甚至有跡象顯示很大一部分的數學終將 “symplectized”。我們很可能會見證基礎科學 symplectic 革命的到來。已經有很強的跡象佐證 symp 幾何將成爲本世紀數學、物理以及連接它們最重要而且最有創造力的一個領域。

補充1:若干歷史

Menaechmus 對亞歷山大大帝忠告:「幾何無 (爲皇家鋪設的) 捷徑 (There is no royal road to Geometry)」。不過說到通往 symp 幾何的路, 如果沒有捷徑, 這一路上確實有許多 (數學的) 王公貴族絡繹於途。symp幾何的根源可以追溯到 19 世紀和 20 世紀初期, 許多最傑出的數學和物理人物的工作, 他們包括: Lagrange, Poisson, Hamilton, Jacobi, Liouville, Hertz, Noether 和 Poincaré。他們對力學有影響長遠的貢獻, symp 幾何由此而生, 並且與力學不可分割地連結。數學經常發軔於物理, symp 幾何尤其如此; 由此產生的數學, 發展成熟時的技巧與洞見, 回過頭來豐富了物理。雖然 symp 幾何從頭開始就在「那裡」, 卻因爲早期理論對分析以及計算的強調而模糊了力學的幾何本質。這種定見如此強勢, Lagrange在他的不朽著作 *Mecanique Analytique* (1788) 的序言中誇言:

讀者在書中找不到任何圖。我建立的方法既不需要建構也不需要幾何或力學的推論過程: 需要的只是循著一個規律而且一致的程序規則做代數運算。

直到一百多年之後, 距離 1854 年 Riemann 劃時代的數學工作也有相當一段時間, 才出現 1889 Darboux 和 1899 Hertz 將幾何的概念運用到力學, 把任何運動系統, 不論多複雜, 都看成是「粒子」在某個更高維彎曲空間中的移動。分析時代的喪鐘, 終於在 1889 年由偉大的法國數學家 Henri Poincaré 敲響, 他體認到純量化的技巧不足以解決天體力學中的許多問題, 尤其是「n-體問題」中的穩定性 (例如, 行星們在相互重力吸引力之下的運行)。

這個著名的失敗開啟了力學的「定性時期」, 幾何終於得到它應有的地位。symp 幾何的第一個定理, 被稱爲 Poincaré 1912 年的「最後幾何定理 (last geometric theorem)」, 其中包含了預言 n-體問題中週期軌道的存在。但是力學的幾何化依然進程緩慢, 整體說來 symp 的面向仍是模糊的。即使到了 1940 年代, 物理學家在使用 symp 想法時還是謹慎並且流於浮面。(當時力學的情況可以參考 Cornelius Lanczos 所著 *The Variational Principles of Mechanics*

(University of Toronto Press,1949)。)

此時數學家在 Sophus Lie, Poincaré, 和 Elie Cartan 的研究工作所鋪展的道路上, 從完全不同的角度重新發現了 symp 幾何。但是卻直到 1940 年代, 因爲中國數學家李華宗[1] (鮮少人知) 的工作, symp 幾何才獨樹一幟成爲數學的一支。其後十年之中, 法國數學家 Charles Ehresmann, André Lichnerowicz 和 Georges Reeb 爲它搭好未來發展的舞台以及在力學上的應用。到了 1960 年代中期, symp 幾何已是當時數學的通用辭, 幾何與力學的 symp 結合也已牢不可破。在以美國與蘇俄的 symp 幾何學家爲主, 分別組成的新興學派推動下, symp 幾何歷經一個爆炸性的成長期, 至今仍然方興未艾, 持續發展。

****

symp 幾何相對來說少爲人知, 而且經過這麼長時間才發展起來, 部分的原因是, 相對於人的直觀, 它是一種艱深而且幾乎有些詭異的幾何。我們將它與一般較熟悉的歐氏幾何 (以及推廣後的黎曼幾何) 對照比較, 二者的要義可以從探討最簡單的 $\mathbf{R}^2$ 平面的情況一窺堂奧。

就如它的希臘字根 $\gamma\epsilon o\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha\epsilon$ (土地的丈量), 幾何是源自於測量的科學。所以它聚焦於度量線的長度, 兩線所夾的角度等, 這些資訊以數學的方式編譯成歐氏幾何的基本觀念: *度量* (metric)g。所謂度量就是根據下面的公式, 爲平面上一對向量$v=(v_1,v_2)$, $w=(w_1,w_2)$連結上一個數字：

$$g(v,w)=v_1\ w_1\ +\ v_2\ w_2.$$

它是對稱(即 $g(v,w)=g(w,v)$), 而且 *非退化的*(即, 對於所有 w, $g(v,w)=0$ 若且唯若 $v=0$)。有了這個裝備, 向量的長度可以定義爲 $|v|=\sqrt{g(v,v)}$; 由此得出畢氏定理

$$|v|^2=(v_1)^2\ +\ (v_2)^2\ .$$

類似於此, 二個向量之間的夾角θ可以經由下式決定

$$\cos\theta=\frac{g(v,w)}{|v|\cdot|w|}.$$

特別地, v 和 w 成直角, 若且唯若 $g(v,w)=0$。g 的對稱性保證 v 和 w 之間的角度與 w 和 v 之間的相等, 而 g 的非退化性質則確保沒有一個非零的向量, 能和所有的其它向量垂直。如此各種熟悉的幾何資訊都可以經由g還原。

順著同樣的脈絡, $\mathbf{R}^2$上標準的 symp 形式 (symplectic form) Ω 也是將一對向量連結到

[1]譯注: 李華宗 (1911∼1949), 廣東新會人, 留學英國愛丁堡大學專研微分幾何, 取得博士學位, 歷任四川大學、武漢大學教授。1946∼1948 任中央研究院數學所研究員, 在酉幾何、symp 幾何、李群與微分幾何的開創工作已成爲現代數學的主流課題, 是中國現代數學的開拓者之一, 可惜英年早逝。

一個數字的對應, 它的公式如下:

$$\Omega(v,w)=v_1\ w_2\ -\ v_2\ w_1.$$

注意到公式中的次序以及其中重要的負號 — 因此, Ω 是 反對稱:$\Omega(v,w)=-\Omega(w,v)$。這表示 Ω 不像歐氏度量 g, 它不能定出長度或角度的觀念。事實上, 一個向量的 symp 長度 $|v|=\sqrt{\Omega(v,v)}$ 永遠爲零, 更糟的是每個向量都與自己垂直!

但是 symp 形式有它聰明的作用 — 明確定出「有向面積」的概念。考慮一個由二個向量 v, w 定出的平行四邊形, 它的面積就是 $|\Omega(v,w)|$。$\Omega(v,w)$ 的正負則由 $[v,w]$ 這對向量的定向與平面標準的定向兩相比較來決定; 二者一致爲正, 反之爲負。如果二個向量次序對調, 則定向顛倒符號相反, 這就是反對稱。就如 g, symp 形式也是非退化的, 也就是說只有在平行四邊形垮下來 (v, w 平行) 時面積爲零。

所以 symp 幾何純粹是一種「面積」的幾何[2]。稍後我們會看到古典力學如何與這看似隱晦的、對定向面積的強調連結。

$\mathbf{R}^2$ 平面上的 symp 幾何與歐氏幾何已經很有趣而且不簡單。但是物理、數學以及許多平常的經驗並不只發生在平的平面上, 必須要推廣。兩種方法可以讓幾何更有用 (而且迷人!) : 增加維數, 及考慮較複雜的 (彎曲) 空間。二者都要緊, 事實上我們所在的宇宙 — 時空 — 就是一個彎曲的四維空間。接下來將一一討論在歐氏幾何及 symp 幾何中如何進行這兩種推廣。

歐氏幾何推廣到高維很直接。在平日的三維空間 $\mathbf{R}^3$ 或抽象的任意維數的 n-維空間 $\mathbf{R}^n$ 中, 都有線, 以及線與線之間的夾角。所以在這些空間中可以造出一個度量, 決定每個向量的長度, 與一對向量所夾的角度。

symp 幾何推廣到高維度就複雜多了。因爲面積基本上是二維的結構, 事實上, 在奇數維空間如 $\mathbf{R}^3$, 若要定義「有向面積」就不可避免導致一些不想要的現象出現 (退化 degeneracies)。另一方面, 在 $\mathbf{R}^4$ 中可以定義如下的 symp 形式; 把 $\mathbf{R}^4$ 看成二個 $\mathbf{R}^2$ 的和 $\mathbf{R}^2\oplus\mathbf{R}^2$。則在此空間中, 平行四邊形的有向面積, 定義爲它在這兩個平面上的影子的有向面積的和。同樣的作法適用於 $\mathbf{R}^6$, $\mathbf{R}^8$ 等等。重點是唯有偶數維空間可以容許 symp 結構。(後面我們將會看到物理上導致如此的原因。)

現在考慮另一條推廣幾何必須走的路。對歐氏幾何這是熟知的故事: 十九世紀, 幾何學家如 Bolyai, 高斯 (Gauss) 和 Lobachevski 想知道如果「平行線」不保持平行, 而是靠近或分開, 會是甚麼樣的幾何? 他們發現那麼三角形的三角之和可能大於或小於 180 度, 可能有六個邊的「正方形」(每個角都是直角)。所有歐氏幾何裡熟悉的測量公式, 都被新而且奇異的公式取而代之。

[2]從以上的討論, symp 形式似乎僅是向量乘積而已, 但這只是 $\mathbf{R}^2$ 上的巧合, 在更高維時兩者毫無關連。

補充2: 流形上的幾何

人們熟悉的歐氏幾何與 symp 幾何, 在平面 $\mathbf{R}^2$ 上的度量公式到了一般「彎曲」空間, 如球面或鞍面就得修改。在 (正曲率的) 球面上及 (負曲率的) 鞍點畫一個半徑爲 r 的圓盤如下圖所示。當 r 相對而言夠小的時候, 圓盤的周長 C 爲

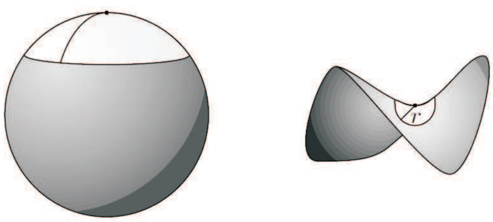
$$C = 2\pi(r - 1/6\kappa r^3 + \cdots),$$

κ 是曲率, 此時爲一常數, 球面時爲 1, 平面時爲 0, 鞍面則爲 -1。只有在 $\kappa = 0$ 時才有我們平常「標準的」公式 $C = 2\pi r$, 顯示出球與鞍面的黎曼幾何其實是非歐的。

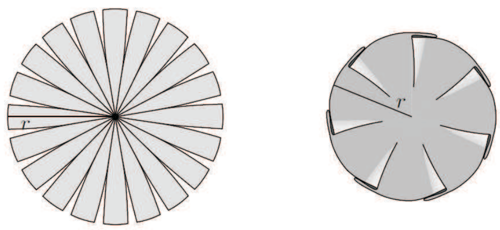
同樣地, 球面與鞍面的 symp 幾何也與平面不同。如若計算圓盤的面積 A 得到,

$$A = \pi(r^2 - 1/2\kappa r^4 + \cdots),$$

當 $\kappa \neq 0$ 時與平面上 $A = \pi r^2$ 不同。



注意到, 球面上圓盤的周長與面積都比平面上的小。這可以如是觀察, 把圓盤切下再攤平, 它會裂開如左下圖所示。對鞍面做同樣的事, 切下的圓盤會摺起如右下圖, 解釋了爲什麼鞍面的 C 與 A 比平面的來得大。



非歐幾何或黎曼幾何特別有意思的兩個特點: 一是空間中不同點的幾何可以很不同。所以此處三角形的內角和可能是 200 度, 而彼處另一個三角形的內角和則是 165 度。所有這些訊息還是可以由一個度量 g 得到, 不過必須容許這個度量逐點不同, 它現在是個度量函數。第二個特點是這些非歐幾何的空間經常和 $\mathbf{R}^n$ 的構造十分不同, 比如它們可以「捲曲」, 以不同的方式

閉合。這些「彎曲」或「扭曲」的空間稱爲 流形, 是如球面這類曲面的推廣。它們在不同的物理或數學的脈絡中自然出現, 而且可能非常複雜。補充 2 和 5 中有些圖像的例子, 關於流形以及流形上的非歐幾何, 更進一步的討論可以參考 W. P. Thurston 及 J. R. Weeks 1984 年 7 月在 Scientific American 上的文章「The Mathematics of Three-dimensional Manifolds」。

大致說來, 黎曼幾何是歐氏幾何推廣到任意維彎曲的空間。Elie Cartan 的觀察抓住了黎曼幾何的要點 「黎曼流形是由無窮多小塊的歐氏空間所組成。」在每一個這樣任意小的小片 (直觀上, 這些小片就代表流形上的平直「切空間」) 上, 度量 g 取固定的值。因此, 計算曲線的長度時, 先把它分成一串的「切向量」, 由它們所在的切空間上的度量算出各別的長度, 再全部加總得到曲線的長度。

symp 幾何同樣適用前面的討論。將 $\mathbf{R}^2$ 上的 symp 幾何推廣到偶數維流形而且允許幾何逐點變化, 每個切空間上的 symp 形式 Ω 定義出有向面積。計算 symp 流形上曲面的有向面積時, 可以先將它拆成許多無窮小的平行四邊形, 再將它們的有向面積加起來即得。如同黎曼幾何, 在這更廣泛的架構之下, 計算有向面積的「一般」規則不再適用。(見補充2。)

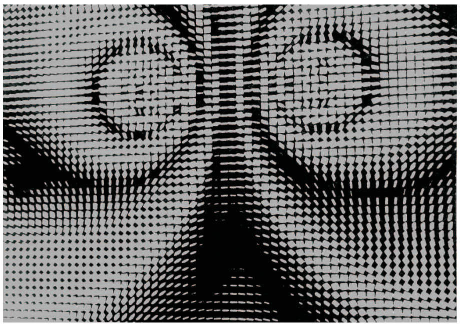
在這個節骨眼上, 黎曼幾何和 symp 幾何截然不同。構造黎曼幾何可以想成是將一片片切空間上的歐氏幾何黏合起來, 這種黏法可以任意進行, 只要它們可以平滑地黏合起來。類似的建構在 symp 幾何就會面臨 symp 形式 Ω 在鄰近點的一個限制: 它們必須滿足每個緊致三維域的有向表面積爲零 (所謂的「Jacobi 恆等式」) [3]。symp 幾何許多最有趣, 有時又讓人費解的面向, 就肇始於這個條件。

黎曼幾何沒有這種黏合條件, 結果「每一個」流形 (與維數無干) 都可以賦予黎曼度量。但是 Jacobi 恆等式並非永遠成立, 所以有定不出 symp 構造的 (偶數維) 流形 (例如六維球) [4]。從這點看來, symp 幾何相當特別。事實上, 現在連哪些流形是 symp 流形都不清楚, 把 symp 流形特徵化以及分類的研究才剛剛開展。這方面 Mikhail Gromov 有個重要的結果: 他發現 $\mathbf{R}^4$ 上的一個「異常的」(exotic) symp 結構, 和前面說過 $\mathbf{R}^4$ 上的「標準」結構不同。這個異常幾何的存在, 雖然早在好幾年前就由理論上證實, 但直到 1989 年才明確地寫出它的 symp 形式。現在利用電腦繪圖 (補充3) 可以將這個異常結構與標準結構並排比較。這些以及類似的題材是目前最活躍的領域 — symp 拓樸。讀者可以參考 Ian Stewart: The Symplectic Camel (Nature, September 1987) 以及同一期中 Claude Viterbo 的文章。

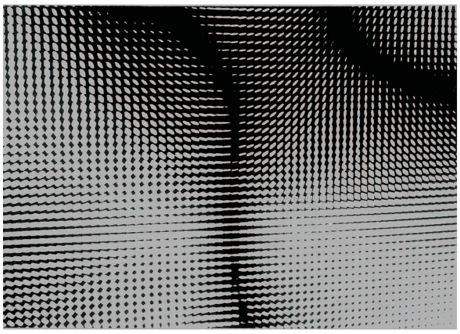
[3] 技術上, Jacobi 恆等式等同於 2-形式 Ω 是封閉的: $d\Omega = 0$。針對這點我們觀察到形式的外微分類似於向量場的 Lie brackets。

[4] S^6 不可能是 symp 流形是基於上同調的原因。但還有其它原因使流形不可能有 symp 結構, 例如 S^4 上甚至無法定出非退化的反對稱雙線性形 (無論是否封閉), 這種障礙就屬於比較「代數的」了。

補充3: $\mathbf{R}^4$ 上的 symp 幾何

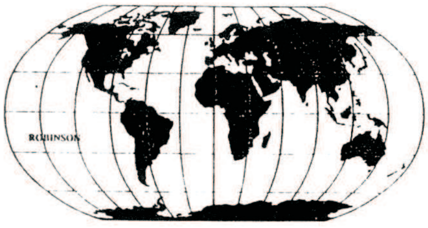


將 $\mathbf{R}^4$ 上的異常 (exotic) symp 幾何與標準的 symp 幾何對照, 可以對它的性質有所體會。因爲無法將 4 維的物體具象化, 我們只好觀察 $\mathbf{R}^4$ 中以原點爲中心的3維單位球面上的情形。在球面上的每一點, 兩者的 symp 形式都定義出一個 symp 平面。這裡有兩張照片顯示部分的平面。注意到異常 symp 結構的平面 (上圖) 比標準結構的 (下圖) 要扭曲得多。(電腦圖像來自 University of Calgary and Alberta 的 Larry Bates 和 Charles Herr。)



Jacobi 恆等式最重要的結果是 symp 幾何是「平的」。換句話說, 所有維數相同的 (偶數) symp 流形用放大鏡看的時候都一樣, 無法由「局部」來區分。只有在對空間整體做大域的觀察時, 不同 symp 流形之間的差異才顯現。(這也是 $\mathbf{R}^4$ 上的奇異 symp 結構如此難掌握的部分原因 — 局部度量無法在標準與奇異之間做出區分。針對這點, 我們必須說明補充 3 中的扭曲圖形是大尺度的現象, 無法從局部偵測得知。) 這一點最能凸顯 symp 幾何與黎曼幾何的差異。黎曼幾何沒有這個性質, 它們就是彎的。球面的任一部份, 不論多麼小, 都無法映到平面上而不扭曲它的形狀 (即長度和角度)。但是球的部份表面卻可以映到平面使得相對大小 (即面積) 保持不變, 這是繪製地圖的人熟知的事實。再者, 我們強調「平」這件事並不排斥複雜的大尺度結構: 圓柱面的 symp 幾何及黎曼幾何都是平的, 但它不是平面。

補充4: 繪圖法



地圖嘗試以平面來表現球面。每一張 (黎曼幾何的) 地圖多少會扭曲形狀, 即便是目前被認爲「最佳」的地圖, 1963 的 Robinson 投影 (左圖)。然而, 用 symp 幾何可以畫出大小毫不變形的地圖。右圖是 1805 年 Mollweide 的橢圓等面積投影地圖。這個現象反映了 symp 流形的「平坦」。

symp幾何也相當「能屈能伸」, 至少相對於黎曼幾何而言。爲了感受這點, 我們先詳述對稱的概念。還是考慮球面, 若對任意通過中心的軸做剛性旋轉, 它的黎曼幾何不變。所以這種旋轉是黎曼對稱, 也就是說這種變換保持長度與角度。若對球做不均勻的旋轉使得某個點比它鄰近的點慢, 這樣的變換扭曲了長度及角度, 也改變了幾何。由此可知球面的黎曼幾何只有有限的對稱, 橢圓球面的對稱更少, 而大多數的黎曼流形根本就沒有對稱。相形之下, 每個 symp 流形都有大量的對稱 (也就是能保持有向面積的變換)。事實上每個 symp 流形上的所有對稱所成的集合總是無窮維的集合[5]。因此相較於黎曼流形, symp 流形更能有大程度的變形; 這是因爲 symp 流形都是平的, 所以不像黎曼流形那麼剛硬。

這些觀察提供了一些瞭解 symp 幾何特性的洞見, 不過 symp 幾何不光是本身有意思: 過去二十年 symp 技巧在數學其它領域的應用有爆炸性的增長。其中最顯著的也許就是群表現理論, 形成今日的「幾何量子化理論」(稍後在談物理時將再遇到這個理論)。分析的許多分支, 數論, 近來甚至結理論 (knot theory) 都受益於 symp 的想法。一個特別有意思的發展涉及 catastrophe 理論; 在此脈絡中 symp 幾何釐清雷射光學中的一些神秘。V. I. Arnold 的書 *Catastrophe Theory* (Springer-Verlag, 1986) 對這些結果有淸楚的記述。

事實上, Arnold 近來鼓吹的「symp 化」哲學潛藏著更大的動量。他臚列出大量的證據, 顯示許多「一般的」數學想法及建構不僅在 symp 幾何中有類似相應之處, 事實上 symp 幾何就是它們的根柢所在。(這個說法在古典物理的確成立。) 很可能一大部分的數學將用 symp 名詞

[5] 流形上的幾何構造, 其對稱所成的集合在結合律之下形成一個 (李) 群。已知黎曼流形上的 *isometry* 群都是有限維。而它在 symp 幾何中的類比 *symplectomorphism* 群則很龐大。(事實上, 這個群的李代數與此流形上所有封閉 1-形式的集合同構。)

重寫。Arnold 描述這樣的「symp 化」過程是:『$\cdots$少數最高階的運算之一, 同時作用在$\cdots$所有的數學上。』它很有可能引致一場數學的革命, 一場與複數的發明相當的革命。Stewart 如是說: 當數學家發現複數不止是多出來的一個巧妙的小東西, 他們必然感受到幾乎所有的數學想法, 從曲線的幾何到偏微分方程的分析都可以複數化。數學由是爆發, 一夕改觀。

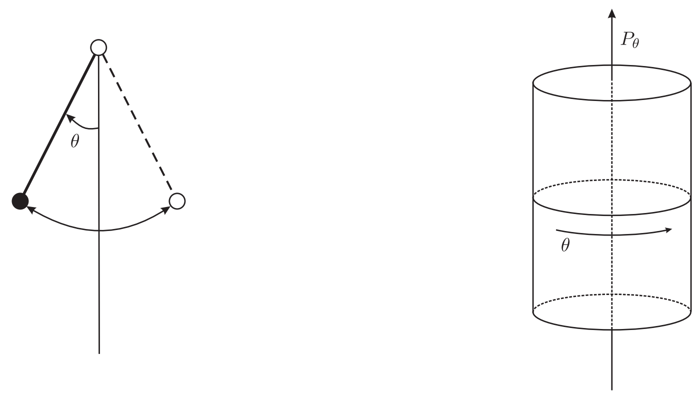
symp 幾何很可能再度照亮數學的天空, 不過這有待來日; 我們且先探討它在物理中扮演的角色。

symp 幾何是 Lagrange 於 1808 年從事天體力學的奠基性工作時「發明」的。最早它是個分析技巧, 可用大量簡化的形式寫出行星運行的方程。(見 Alan Weinstein, Lectures on Symplectic Manifolds (American Mathematical Society (1977)) 中對 Lagrange 的工作以及 symp 幾何優美的數學討論。) 這些技巧被 William Rowan Hamilton 大大地推廣擴充到所有力學。今日的 Hamiltonian 力學就是這些想法和計算過程。這套理論又在 Jacobi, Liouville 及 Poisson 等人手中擴大修正, 基本上形成現在所有古典物理的結構基礎。

Hamilton 力學典型的例子是粒子動力學 — 研究粒子在不同作用力之下的運動, 例如電子通過陰極射線管中的電磁場。要決定粒子的軌跡不僅需要知道它的初始位置, 還要知道它的初始速度或初始動量。如此才能「預言未來」, 也就是預知粒子在未來所有時間的位置和動向。

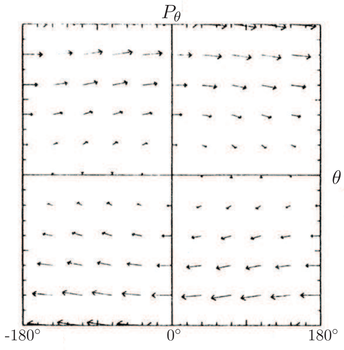
因此粒子動力學的研究, 是在所謂相空間 (phase) 中進行, 就是由粒子所有可能的位置或「位態 (configurations)」q, 以及所有可能的速度或「動量 (momenta)」p 所構成的空間。例如, 在日常的 $\mathbf{R}^3$ 中運動的粒子, 其相空間是 $\mathbf{R}^6$— 由 (x, y, z, p_x, p_y, p_z) 三個位置分量, 三個動量分量構成。同樣的, 平面擺的相空間是以 (θ, p_θ) 爲參數的圓筒, 這裡 θ 代表擺所在位置的角度, p_θ 則是相應角度的角動量。其它物體, 如相對論下的自旋粒子耦合剛體的相空間就更複雜了。

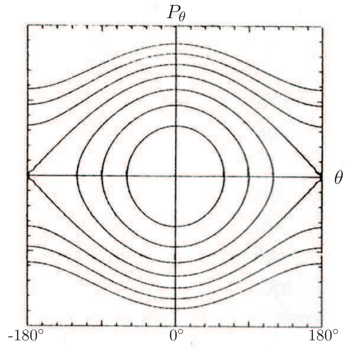
補充5: 平面擺的相流



平面擺是有重量的擺錘繫在輕的桿子的一端, 在固定平面上自由擺動。擺錘所有可能的位

置可以用角度 θ, $-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, 作爲參數來刻畫。對應的角動量 p_θ 可以取任意值。因此它的相空間是個圓柱面 (circular cylinder), θ 以逆時鐘方向繞圓筒, p_θ 則沿著軸變化。由於 -180° 與 180° 代表的是同一個位置 (上圖), 這兩個圖形必須視爲一樣, 所以是圓。





作用於擺錘的力是重力和桿子的張力。相空間中力向量的型態和所造成的動力軌跡見圖所示。爲了清楚起見, 我們把相空間「攤」成長方條; 左右兩邊的垂直線代表同一條線對應於 $\theta = \pm 180^\circ$。中央的點代表穩定平衡, 也就是擺下垂靜止不動的狀態。繞著這點的橢圓對應於左右搖動的情形。擺幅增大直到「恰好」到達頂點, 這時是個不穩定的平衡 (在$\theta = \pm 180^\circ$, $p_\theta = 0$), 擺錘停止在頂端不動。其它波浪狀的軌跡代表擺錘繞著整個圓圈做順時針 (上), 或逆時針 (下) 擺動。

****

這背後的想法是; 一旦知道粒子在相空間的初始態 (state) (q, p) 以及作用力, 就有足夠的訊息能描畫出粒子隨著時間變化的運動。所有這些都可以簡潔地視覺化 (補充5)。對相空間中的每個點指定一個箭頭 (或「流向量 (flow vector)」) 以表明 (淨) 作用力, 那麼給定初始態的粒子就順著箭頭指示的唯一軌跡 (「流線 (flow line)」) 運動。這些所有可能的軌跡 (「流 (flow)」) 將相空間填滿, 任意二條軌跡都不相交。如果只針對位態空間 (q) 考量而不是相空間 (q 和 p) 就無法如此乾淨俐落地描述粒子運動。所以相空間是動力學研究的適當場域。

我們所描摹的粒子運動圖不僅形似, 在實質上也類似流體的流動。事實上, 光從數學的角度來說, 動力學就是相空間中的流體流。但是這個「相流」滿足很特殊的性質:面積守恆, 也就是流體的2維截面的面積在移動中保持不變。由於流形上的流體流動可以看成流形上隨著時間而改變的變換, 我們得到如下的結論: 動力學是由相空間上隨著時間改變但保持面積守恆的變換構成。而只要有面積就一定有 symp 形式。

這些觀察組成力學與幾何間的基本連結 — 粒子動力學的相空間是 symp 流形, 而動力學對應於隨時間變化的 symp 變換。這些事實在物理上有深遠的影響。確實, 就是相空間上的

symp 結構使得 Hamilton 力學在描述物理世界上極爲成功。

到底 symp 形式有甚麼物理上的作用? 這是兩個基本上相關的作用。首先, 它檢選出廣義位置q和廣義動量p如何配對。像探測木星的 Galileo 號如此複雜的系統, 有數百個位置變量 q 和動量變量 p, 這些變量正確的配對, 是系統正確運作的關鍵。數學上, symp 形局部地將 $2n$ 維空間拆成 n 個相互截交 (transversal, 即兩兩相交的交集爲 $\{0\}$) 的平面, 換句話說, 把相空間的 $2n$ 個獨立方向 $(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)$ 分成 n 對 $(q_1, p_1; \cdots; q_n, p_n)$ [6]。從物理的觀點這解釋了爲甚麼 symp 流形是偶數維: 因爲每個位置與相應的動量配成對。[後文中將看到 q 和 p 的糾結, 也在量子力學中有驚人的影響。] 其次, symp 形做的恰恰就是如何將作用在系統上的力, 轉換爲相空間中流向量的指派, 由此得以計算相流以及系統所有可能的運動。簡言之, 它將動力學的數據 — 作用力 — 轉換成運動學的訊息 — 系統的運動。有關物理中 symp 幾何的「爲何」及「如何」可參看 Ralph Abraham 和 Jerrold E. Marsden 合著的 *Foundations of Mechanics* (Benjamin-Cummings, second ed., 1978), 以及 Victor Guillemin 和 Shlomo Sternberg 合著的*Symplectic Techniques in Physics* (Cambridge University Press, second ed.,1989)。

除了這些主要的功用, symp 結構在力學中也有許多用途。它有效地把物理中的對稱 (平移, 旋轉,「內部 (internal)」或「規範 (gauge)」等等) 連結到系統演變中的不變量 (能量 — 動量, 角動量, 電荷, 等等)。這類「守恆律」對於系統如何運作的一般分析非常有用, 尤其是在經常無法得到確切量化結果的非線性動力學。symp 方法在探究穩定性的問題上非常重要 (例如, Galileo 號探測器天線的小幅震動是否會變得無法控制?), 也大幅提升了我們模組, 並且精確地預測複雜機械系統的動力行爲的能力。一個漂亮的應用 (牽涉到上述的許多想法) 用在一個老問題: 爲何貓落下時總是腳先著地 — 那是因爲它在空中就像一顆在某個 Yang-Mills 場中移動的粒子!

補充6: Yang-Mills 貓

用球狀關節連結兩個圓柱的力學模型可以解釋貓的落下過程。從控制理論的角度, 這是如何操作此系統, 使得兩個圓柱在繞著本身軸的自轉以及兩者相對的旋轉之下, 能最有效的達到希望的定向。symp幾何提供這個問題簡潔的描述, 同時大大簡化了求解。實效上, 貓能以腳著地是由解 Yang-Mills 方程來解釋! 和老奶奶的故事相反, 它與貓的尾巴不相干; 無尾的 Manx 貓也是腳先著地。(傳聞有實驗證明此事。)

[6] symp 形的局部表法: $\Omega = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$ 更凸顯了這點, 其中 $\wedge$ 代表形式的外積。

★★

所以, symp 形在理論上和實際上都是古典力學的要素。最近在 S. Sternberg 提出的建構中, symp 形有了更超越的角色 — 作用力也被含攝在 symp 結構中, 現在所有的東西都在那兒了! 我們兜了一整圈: symp 幾何是力學的數學, 而 Hamilton 力學恰恰就是相空間上的 symp 幾何。雖然 symp 幾何在力學中最常爲人所見, 但它的用途遠遠超過物理的這一小支。的確, 無論多複雜的古典系統大多可以用 Hamilton 的技巧來研究: 星雲的形成模型, 電路以及原子核的集體模型都是。如果把相空間推廣到無窮維, 則同樣可以用來研究古典場。如此, 對於重力場以及其它的場, 彈性理論, 電漿甚至侵蝕現象, 我們都能有更進一步的認識。symp 幾何的幾個近親也同樣重要, 如觸幾何 (contact geometry), 它是 symp 幾何在奇數維流形的推廣。它在光學中的角色就像 symp 幾何之於力學。[因此光學和力學有這麼相近而平行的發展: 它們是數學上的堂兄弟。]

這篇文章到目前爲止考量的僅止於古典物理。但是二十世紀最重大的課題之一, 就是幾乎所有 (如果不是全部) 物理系統的基本描述都必須是量子力學的。古典和量子的區別明顯而且深遠, 可是詳究其細節將離題太遠。我們僅做些基本的觀察。(量子理論更多有趣的面向在

Richard P. Feynman 的書 QED (Princeton University Press, 1985) 中, 有很好的介紹。)

要點在於古典物理是完全決定的 (deterministic) 而量子力學生來就是機率 (probabilistic) 的。對古典物理, 一個觀測者 (原則上) 可以同時測量物理量至任意精確度, 但是量子力學則不可能: 某些成對的物理量在同時測量時, 其精確度有*無法避免*的限制。這就是 Heisenberg 有名的「測不準原理」。比方說, 想同時測量一個電子的位置 q 和動量 p, 兩者的誤差 Δq 和 Δp 必須滿足下列不等式

$$\Delta q \Delta p \geq h/4\pi$$

這裡 $h = 6.6246 \times 10^{-34}$ 焦耳-秒是 Planck 常數。因爲它如此之小, 在多數巨觀系統中顯得微不足道, 但在微觀系統中則不然。

symp 幾何是否在量子物理中也扮演它在古典理論中相當的角色? 看來並不如此。量子力學中的狀態 (states) 不是以古典相空間的點來代表。事實上, 物理系統的量子狀態空間是無窮維的 *Hilbert* 空間。它與古典的位態空間 (即 q 所成的空間) 有關, 而不是與它的相空間有關 (即 q 與 p 所成的空間)。因此古典物理中基本的 symp 要件 — 相空間 — 在量子物理中「消失」了。可是, 就如 Cheshire 貓的微笑 (見愛麗斯漫遊記), 量子物理中仍然可以見到 symp 幾何的殘留。其中之一, 在上面提到的測不準原理的公式中明顯可見: 位置和其相應動量的 symp 配對。事實上, 對於不以 symp 方式配對的量, 沒有測不準原理。另外「Bohr-Sommerfeld-Maslov 量子化規則」也是 symp 遺跡, 它解釋了爲甚麼某些物理參數, 如電荷和基本粒子的自旋只能取離散值。

但是 symp 幾何在物理系統從古典描述過渡到量子描述, 也就是*量子化*中, 涉入甚深。要充分體會這個意義, 讓我們來看一個物理系統的古典和量子描述, 兩者如何關連。*原則上*, 如前所述, 每個物理系統本質上都是量子力學的。不過, 對於大多數 (足夠巨觀的) 系統, 量子描述有一個唯一的「古典極限」— 一個古典描述, 在某種意義之下精確地逼近量子描述。*實際上*, 在另一方面, 相較於全面的量子陳述, 人們幾乎一貫地對系統的古典極限自始就有較好的瞭解。[理由有二: 我們日常生活常識的環境是古典的, 也就習以爲常以古典的方式思維, 而且古典逼近又比量子描述簡單太多。] 因此, 物理學家面對從古典極限的知識來建構系統的量子描述, 多於由量子來重建古典的描述。換句話說, 在需要時對某些個古典系統進行「量子化」。

不幸地, 這不是一個可以直接了當解決的問題。困難之一在於, 雖然一個量子系統的古典極限 (如果存在) 是唯一的, 但是常有許多不同的量子系統有*相同的*古典極限。雪上加霜的還有個「行不通 (no-go)」定理 — 不可能找到一個量子化的架構, 對*每*一個古典系統一體適用。

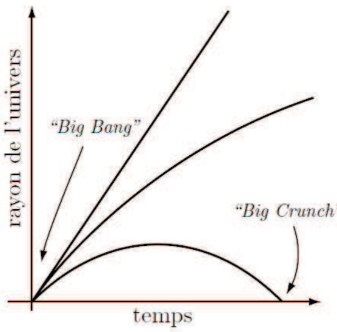
即便有這些障礙, 對有限的某類系統, 有系統地量子化的努力仍持續進行。最成功的作法之一是*幾何量子化理論*。基於 M.I.T. 的 Bertram Kostant 以及 Marseille 的 Jean-Marie Souriau 的工作, 幾何量子化是 symp 幾何一些最精微細緻的想法的漂亮應用。

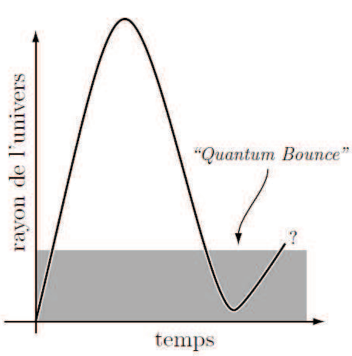
幾何量子化的想法是用古典相空間的 symp 幾何去建造量子的 Hilbert 空間。其中的關鍵步驟是極化 (polarize)相空間: 在不變動情形下將位置 q 和動量 p 分離開來。如此將相空間縮減到位態空間, 如前所述, 位置空間與量子 Hilbert 空間密切相關。一旦相空間被極化, 就有希望造出這個系統的量子理論。

雖然幾何量子化是個強而有力的工具, 但它也可能既困難又不易掌控。比如, 通常極化可以有些不同的選擇, 反映了許多量子系統有相同的古典極限的事實。所以經過幾何量子化, 可能產生數個不等價的量子理論, 這時就要訴諸實驗來選擇物理上正確的理論。另一個極端是, 存在不能極化的 symp 流形。是否存在相空間無法極化的真實物理系統則尚未證實; 不論如何, 人們還不清楚這些「純粹古典的」symp 幾何有甚麼用。幾何量子化在物理的諸領域中, 可能派上用場的是廣義相對論。經由愛因斯坦的理論, 古典物理的重力場已經有相當的瞭解。可是, 大自然裡所有的基本作用力中, 獨獨重力沒有一致的量子描述。這是理論物理的主要謎團, 是「量子重力」成爲活躍的研究領域的原因。重力場這般難以量子化的原因之一, 在於它的相空間既是無窮維又高度非線性。想對量子重力場有初步的認識, 一個常用的策略是: 假設重力場在空間中處處一樣 (但可以隨時間變化),「凍結」相空間中有限維度之外的維度。由此建立起 (相對而言) 容易處理的宇宙模型, 以及它的重力場, 稱爲「均質宇宙論 (homogeneous cosmologies)」。它們是研究重力量子化稱手的「實驗室」, 而幾何量子化在這些「實驗」中, 證實是有最用的。

在這個實驗室裡, 我們 (本文作者) 做的一個實驗是與重力的奇異點 (singularities) 有關的有趣問題。根據廣義相對論, 這些密度高得難以想像, 重力上極端的現象, 是宇宙演化某個時刻必有的狀態。一個這樣的奇異點 —「大霹靂 (Big Bang)」— 幾乎可以確定, 在宇宙誕生時發生。將來是否有另一個終結的奇異點 —「大粉碎 (Big Crunch)」? 現階段觀測得到的數據無法做出定論, 但是如果重力吸引強大到凌駕宇宙目前的擴張, 宇宙將不可避免地崩解至烈焰焚燒的末日。

補充7: 宇宙的命運





愛因斯坦的古典重力理論預言宇宙是從一初始奇異點 — 大霹靂 — 演化而來。但是宇宙的未來則是未知數; 左上圖簡述標準情形 (均質均向的模型)。宇宙目前仍在膨脹, 它的命運取決於重力吸引減緩膨脹的速度。關鍵就在宇宙的平均密度 ρ, ρ 的臨界值是 $\rho_c \approx 10^{-30} gm/cm^3$。$\rho = \rho_c$ 的模型剛好躲過崩塌 (左上圖中間的曲線)。$\rho > \rho_c$ 的模型 (第三條線), 膨脹不敵重力吸引, 這個模型崩解走向最終的奇異點 — 大粉碎。目前觀測值是 $\rho \approx 10^{-31}$, 結論尚在未定之天。

當宇宙擠縮到次原子大小 (右圖陰影部分) 時, 最主要的影響預期來自量子效應。宇宙學家一直在思考是否量子效應能阻止最終極的崩壞。可以想像的, 宇宙也可能「反彈」到一個新的擴張狀態。

****

這個預言建立在古典的廣義相對論上。不過, 當重力把宇宙擠壓到次微觀尺度, 這時主導的應該是量子效應, 有許多推想認爲這種效應可以讓崩解減緩甚至停止。本文的作者們在均質宇宙論的架構下, 用幾何量子化來探討這個可能性。雖然這個議題離塵埃落定尚遠, 但種種跡象 — 不幸地 — 顯示, 量子效應無法阻擋宇宙最終災難性地崩解到一個奇異點。

在上面的討論中我們一直沒有回答一個重要的問題: 這個不尋常的字「symplectic」源自何處? 它來自希臘字 $\sigma\nu\mu\pi\lambda\epsilon\kappa\tau\iota\kappa u s$ 是拉丁字「complex」的前身。Hermann Weyl 將它引用到數學中, 將當時不常用的「line complex 群」重新命名爲「symplectic 群」, 以避免語意上的混淆。姑且不論它的字源,「symplectic」這個形容詞意指「編結在一起」或「織成」。這真是絕妙傳神, 就是這種纏繞交織 — 清楚地顯現在前面提到的 symp 形式中 — 最能彰顯 symp 幾何與 Hamilton 力學的特性, 事實上也是它們的精髓。正是由於數學與物理錯綜複雜的糾纏, 賦予 symp 幾何威力與前景。

—本文譯者爲台大數學系系友—