

## 《一個數學家的嘆息》讀後

張海潮

《嘆息》一書的作者 Paul Lockhart (簡稱 L) 是一個怪咖。他本來在美國布朗大學數學系任教, 公元2000年, L 突然決定離職, 自我“下放”到中小學去當老師。L 去的這間學校是紐約市布魯克林區的 Saint Ann's school, 該校的學生從幼兒園到高三都有, L 在這裏什麼年級都教。

促成 L 下放的原因, 照 L 自己的說法是因為第一: L 覺得大學很腐敗, 已經不是探討學術的園地, 而淪為爭名逐利的地方。第二: L 不再想教大學生, 因為從中學上來, 這些學生的數學已經毀了, 他們再也不能欣賞數學的真與美。

原來 L 認為數學, 正如音樂或美術, 是一種藝術, 並且是藝術最純粹的形式 (the purest form of arts)。在《嘆息》這本書一開始, L 虛擬了一個音樂家從惡夢中醒來, 他原本是為了音樂的真與美去學彈琴, 但是在音樂教育的過程裏, 卻被各式各樣的符號和格式弄得倒盡了胃口。

L 又以美術教育為例來批判數學; 他說在一個美術課中, 老師一定會根據學生的特質個別指導, 對學生的繪畫提供差異性的建議。並且, 幾乎每一位美術老師都讀過藝術史, 洞悉這門藝術近三百年的發展。但是誰都知道數學老師無論在差異性指導和對數學史的理解都不及格。

從藝術的角度審視數學的本質, 真與美, 或是檢驗數學教育的缺失 — 忽略學習者的想像力和差異性, 對我而言, 有如晴天霹靂, 覺得非常慚愧。

長久以來, 數學老師必須面對學習方的質疑, 到底學數學有什麼用? 數學老師也竭盡所能解釋數學是多麼有用。但是由於科技的進步, 基礎數學的用處全都隱藏在高科技的底層, 表面上完全看不到。例如: 三角函數之用於測量, 完全被雷射測距儀取代, 高中教材中所有有關測量的題目都變得十分勉強, 因為與現實生活脫節。

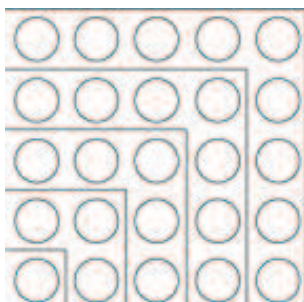
關於這一點, L 如何回應呢? L 認為:

一件事物如果有實際上的用途, 並不表示它的本質就是如此。音樂可以鼓舞軍人上戰場, 但這不是音樂的本質, 米開朗基羅為教堂裝飾, 但他心中其實有更崇高的目的。

數學應該被當作藝術來教, 世俗所謂的「有用」, 是真與美自然引發的副產品。貝多芬當然能寫出漂亮的廣告配樂, 但是他們學習音樂的動機當然是為了創造美好的事物。

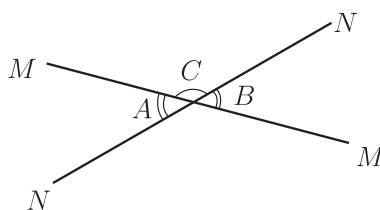
對於數學的真與美, L 舉了兩個例子。

第一個是下面這個圖:



我們看到  $1 + 3 = 2^2$ ,  $1 + 3 + 5 = 3^2$ ,  $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ ,  $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$ , 這個圖告訴我們, 連續奇數相加會得到一個平方數, 圖形所展示的是平方數如何分解, 這是平方數的本質, 而圖示的說明則用了最美的方式。

第二個是證明兩直線相交, 對頂角相等:



圖中有  $M, N$  兩條直線, 傳統的證法是看出  $A + C = 180^\circ$ , 並且  $B + C = 180^\circ$ , 所以  $A = B$ , 但是 L 認為  $A$  是  $M$  和  $N$  而  $B$  是  $N$  和  $M$  的夾角, 這兩個角之相等是“天作之合”, 是  $M$  和  $N$  相交的本質, 其正確性有如  $3 + 5 = 5 + 3$ , 是左右對稱, 也是上下對稱。

幾乎所有的人都想問 L: 你為什麼不早點告訴我, 數學這麼好玩? 這麼有趣? L 的回答應該是: 首先, 當你還是一個很小、很小的小孩子, 當你嘗試用手指頭計算每天吃的糖果的時候, 你就是一個 L 心中的數學家 — 嘗試用數學來探索周遭有趣的問題。但是, 當你掉到了一些「數學老師」所佈下的天羅地網時, 數學的真與美漸漸流失, 你必須背誦

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

以及它的變體

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

但是卻不知道這麼難看的公式是從何而來。你要怪誰？你的數學老師可能像你一樣，從來不曾領悟過數學的真與美。並且，在一種武斷而壓制的教學中，老師們僅有的「善」也喪失了，於是，他會說“你怎麼這麼笨，連  $\log 2 = 0.3010$  都不會？”但是，老師，你可以告訴我為什麼  $10^{0.3010} = 2$  呢？因為無知而失去了真，因為庸俗而失去了美，又因為專斷而失去了善，這就是現在數學教育的現場。

我因此推薦《嘆息》給選我《數學思想通識課》的同學，一位文組的同學讀後寫了份感想，我轉載一些與大家分享：

我非常討厭數學，討厭到甚至是只要一講到「數學」兩個字，就會開始掉眼淚。但是這本書，卻讓我能敞開心房，去接受數學。原來，三角形面積公式：底乘高除以二，竟然只是這麼簡單的概念；原來，半圓裏的三角形，它的頂點無論在圓周的哪裏，都是直角，也是如此易懂的概念！以前我看到那些證明、公式，總認為他們是妖魔鬼怪，原來他們也可以這麼純粹、充滿創意！

這本書，可以說是數學教育的烏托邦。雖然我也知道，這套教育理念要實現，可能真的有它的難度存在。但是我仍希望，這樣的想法能夠在臺灣的教育界流行，讓數學老師發現僵化的數學教育並不可行。目前的方法——背誦大量公式、作大量困難的習題，只會讓學生更討厭數學、更不願意敞開心胸去接納數學。若老師能重視帶領學生思考問題的過程，才可能引發學生學習的興趣。

其實閱讀這本書，是讓人難過的。因為想到自己的青春歲月，就這樣因為不適合的教育方式，而無法好好的發揮自己的想法、無法盡情揮灑創意。把數學只是變成冷冰冰而死板的公式。最終，無法在這樣的體制下存活的腦袋，只能選擇關機、放棄。原本，在高中畢業之後，我就發誓這輩子再也不和數學產生任何瓜葛。但是在閱讀完這本書後，我改觀了！數學應該是一個好玩的遊戲，作數學不需要上課或讀書，只需要充滿想像力，對世界充滿好奇心。未來，我想我會重新面對數學，不會再認為數學差是因為自己太笨了！

親愛的讀者：這位同學並沒有誇大其辭——數學教育真是積重難返，苦海無邊啊！

—本文作者為台大數學系退休教授—

## 延伸閱讀

1. 這才是數學：從不知道到想知道的探索之旅 (Measurement), 保羅·拉克哈特 (Paul Lockhart) 著，畢馨云譯，經濟新潮社。
2. W. Schmidt, Book Review: A Mathematician's Lament, Notices of AMS, April 2013, 461-462.