數學傳播 39卷1期, pp. 51-62

【一題兩觀之二】

可以喝到幾瓶汽水—— 兼談台灣中小學數學教育*

張鎮華

1. 小女兒的難題

小女兒五月下旬從美國回來, 帶回一身重感冒, 白天由岳母和內人陪同去看病。我晚上回來, 很高興又能和她共進晚餐, 問些近況話家常; 雖然平常還是常透過網路用視訊和她對話, 這樣坐在身旁的感覺就是不一樣。

突然, 她說:「我來考你一則算術, 看看你的數學程度好不好。這是我回來前, 我們一些朋友算得亂七八糟的問題。我男友也不會, 他還常常說自己是高中資優班數學最好的。」她總是不會忘記在適當時候, 損她在柏克萊攻讀機械博士的男朋友。

「好, 妳說說看。」

「有一群人想要喝汽水。假如他們有20塊錢, 1瓶汽水賣2塊錢, 他們可以買到10瓶汽水來喝。當他們收集到2個瓶蓋, 就可以換1瓶汽水; 收集到4個空瓶, 也可以換1瓶汽水。請問, 他們最多能喝到幾瓶汽水?」

「應該很容易才對。首先, 喝完10瓶汽水, 就有10個瓶蓋、10個空瓶。可以用10個瓶蓋換5瓶汽水、用8個空瓶換2瓶汽水, 這樣就有7瓶汽水, 還有2個空瓶。」

我用手指記住這2個空瓶, 繼續算:「接著, 喝完7瓶汽水, 這樣總共就喝了17瓶汽水, 而且新產生7個瓶蓋、7個空瓶, 加上剛剛的2個空瓶, 實際上就有7個瓶蓋、9個空瓶。再換5瓶汽水, 這樣還剩1個瓶蓋、1個空瓶。」

再算了一兩步, 我的記憶容量就不夠用了, 因此說:「不行了, 我需要一張紙記錄下來。」

小女兒得意了:「就是要考你心算行不行, 用紙算是違反規定的。其實, 我也在紙上記錄過, 還是很混亂。」

「真的, 這就有一點困難了。」

我也意識到, 硬算下去, 並不是辦法, 應該另謀對策。

*本文大部分內容曾以「小女兒的難題」爲題, 刊登於高中數學學科中心電子報第 88 期 (2014-7-29)。投稿數播前徵得二刊編者的同意投稿。

2. 暫時停止閱讀片刻—建立自己的思考模式

行文到這裡, 我強烈建議各位讀者暫停閱讀, 給自己半個鐘頭或十分鐘的時間, 自己想一想。

在繼續那一天我和小女兒的故事之前, 我來打岔寫另外一些故事。我和小女兒談話結束後, 她要我也問問其他小朋友這個問題。

「你能不能問問那些奧林匹亞的學生, 看他們會不會。」她很不甘心, 因爲我總是認爲她沒有能力參加奧林匹亞數學競賽。

隔幾天我接受一位記者電話訪問時, 就問了她這個問題, 我的用意其實是要以此爲例, 向她解釋數學教學與思考。接下來, 我乾脆把問題寄給系上師生、大學同學、組合數學界的朋友、中學老師, 希望大家把這個問題問自己的小孩、學生, 最好是中小學階段的學生, 而我最在意的是他們的思考過程。

接下來的一些日子, 答案紛紛寄到。我摘錄一些與他們的往返信件, 並加上自己的看法。

3. 數學閱讀—你可以喝到幾瓶汽水

我的記者朋友來兩次信, 點出兩個問題。

記者朋友的第一封信 :「謝謝您的分享, 但基本上我一個人喝不了那麼多汽水 : PS.數學訓練考驗的是背後的應用和解決問題的能力。這是此次採訪最大收獲 :)。」

我原來給她的問題是 :「你可以喝到幾瓶汽水?」, 這才知道, 情境不對。所以從那之後都改口說 :「有一群人想要喝汽水。」

現在的中小學教育, 大家也一直在問, 學校教的數學和日常生活沒太大關係, 而且數學又那麼難, 真不知道爲何要學數學。

2012 年 PISA 測驗後, 我們看到一些統計資料, 顯示台灣小朋友對解數學式子的題目得分很高, 但是對要讀情境再解題的應用問題則相對較弱。如果我們問 :「$30000 \div 58 =?$ (接近的答案)」這樣的問題, 台灣的學生得分很高。但如果我們問 :「富士山每年從7月1日到8月27日開放參觀, 今年開放期間約有三萬人來參觀, 請問平均一天大約有多少人來參觀?」這樣的問題, 台灣的學生得分就比世界平均要低很多。

這是否表示台灣的學生比較笨? 當然不是, 那只是因爲我們的學生這方面的學習不夠。其實, 很早以來, 就一直有一群用心的老師努力地設計有情境的數學問題教學生、考學生。但就我的了解, 有其實行上的困難。

困難之一 : 有些情境的設計很假, 學生看到問題後還是不爲所動。設計有情境的數學問題, 材料要由日常生活而來, 所以需要耗費較多時間構思, 其設計難度很高。以 PISA 爲例, 它的題目都很貼近生活, 但是 PISA 每三年才能考一次, 我們的老師卻要天天教書、常常考試。

困難之二：用情境問題教學, 所需時間極多。以我國數學授課時數居世界各國之末的現實, 老師們無能爲力。

困難之三：升學相關的各類考試作答時間很短。如果能夠把題目出成：「$20 \div 2 = (\ )$。」, 考試就不會問：「有一群人想要喝汽水。假如他們有20塊錢, 1瓶汽水賣2塊錢, 他們可以買到幾瓶汽水來喝?」

我們的教學時間和考試方式, 導致了情境式數學教育的困難。我們沒有訓練學生數學閱讀的習慣, 使得數學與生活脫了節, 老師們空談數學的用處, 感動不了學生。

對於台灣的入學考試, 我有兩個偏見。第一個就是數學考試的時間太短。我常常在一些公開場合發表謬論, 建議把 80 分鐘的數學考試改爲 180 分鐘, 大部分的回應是「成本太高」。我雖然明白行政上的考量, 不過總是覺得, 我們的取才方式太過廉價, 80 分鐘要評量出一個人的數學素養談何容易。用另外一種觀點來說, 如果考試的時間夠長, 就比較有機會讓學生感受到, 數學的學習不完全著重在記住公式快速解題, 這我稱之爲「用考試影響學習的策略」。我自己給研究生的考試, 常採取晚飯後不限時間的方式, 要他們體會做研究是長時間的堅持, 而我的考題也不一定是書上的內容, 我要看看學生的反應。

我的第二個感覺是, 我們的考試被社會對「公平」的計較綁架。數學考試的範圍被限定要是課程綱要中打三顆星的才能考, 如果有些內容是部份教科書才有的, 爲了公平也不能考。這種種規範, 究其根源, 因爲學生家長都在計較分數、計較能考取的學校。我個人不是評量專家, 但是我也考過托福、GRE 這類的考試, 從來就沒有一個「綱」需要參考。

記者朋友的第二封信：「謝謝您的分享, 如果那個題目有進一步的答案, 記得也不吝跟我分享喔。」

我知道她平時業務極多, 簡直是忙昏頭, 應該是沒有時間靜下來, 好好地「享受」這道題目的思考。

我們現在許多的中小學數學教學現場也是這樣, 因爲老師們實在沒有時間, 他們有好多內容要教, 只好說出問題之後, 很快就給答案。好奇的學生回家後會追究理由; 好一點的學生, 會選擇把答案跟公式記住, 節省下來的時間還有許多功課要做; 腦子實在轉不過來的學生, 乾脆就算了, 既然聽不懂, 何苦傷腦筋? 或者實在沒辦法, 也只能硬著頭皮自嘆不夠聰明。

有心的數學老師, 他們的無奈, 就是教學時間不夠。

4. 簡化型的喝汽水問題—再停止閱讀片刻

有一封來信說, 以前在網路上看過這個問題。這讓我嚇了一跳, 如果有人看過答案, 這個題目就失去我原來想要探試大家反應能力的原意。我趕緊上網搜尋, 找到下面這一則簡化版本的喝汽水問題。

有一群人想要喝汽水。假如他們有 20 塊錢, 1 瓶汽水賣 1 塊錢, 他們可以買到 20 瓶汽

水來喝。當他們收集到 2 個空瓶, 就可以換 1 瓶汽水。請問, 他們最多能喝到幾瓶汽水?

這看起來比小女兒的問題簡化。如果你剛才的暫停閱讀, 還沒有太多進展, 我建議你再停止閱讀片刻, 想一想這個簡化型的題目, 相信對你的思考會有提示作用。

其實, 我們做研究的時候也常常採取這個方法, 太難的問題做不動時, 先練習想一個簡化的情況, 有感覺之後再回來往深處想, 這樣來來回回, 終於會走到目標。教學的時候, 也未嘗不可視學生反映, 做適當的調整。弱一點的學生, 用簡化的問題鼓勵他; 強一點的學生, 用強化的問題激勵他。

確定你停止閱讀片刻了。

5. 數學作文

我們的數學教學缺乏的不僅是數學閱讀, 更缺少數學作文的訓練。大多數人一貫的想法是, 數學只要寫式子就好, 作文是國文課的專屬。從這一次我收到大家寄來的答案, 對此顯露無遺。

許多人寄來的答案, 是用打字的式子、或是手寫的式子, 有的還用三角形、星星等當代號, 但是幾乎都缺少了說明, 大家似乎都覺得, 只要式子寫出來, 答案正確, 那就可以了。有些時候似乎也是如此, 但並不是每一個答案都能一目瞭然, 幸好我熟悉此道問題, 總能看懂。倒是有一位在美國的朋友 A 君的朋友 D 君, 寫來下面的信。

「這是一個相當有趣的算術問題：有一群人想要喝汽水。假如他們有 20 塊錢, 1 瓶汽水賣 2 塊錢, 他們可以買到 10 瓶汽水來喝。當他們收集到 2 個瓶蓋, 就可以換 1 瓶汽水; 收集到 4 個空瓶, 也可以換 1 瓶汽水。請問, 他們最多能喝到幾瓶汽水?

我將此問題寫信問我在紐約市工作的兒子, 兩分鐘內, 就收到他的回信告知正確答案。思路似乎只有一條, 就是依照你的文章第一頁的推想, 一直演算下去。因為演算有點複雜, 我運用我學科學所得的經驗, 將它整理成如下的表格, 就一目瞭然了。

汽水 (sodas)	瓶蓋 (lids)	空瓶 (bottles)
10	10	10
5+2	0+7	2+7
3+2	1+5	1+5
3+1	0+4	2+4
2+1	0+3	2+3
1+1	1+2	1+2
1+0	1+1	3+1
1+1	0+2	0+2
1+0	0+1	2+1
35	1	3

由此繼續觀察, 每多買一瓶汽水, 就可喝四瓶, 並剩下一個瓶蓋及三個空瓶。從此以下, 一直重覆。

1	1+1	3+1
1+1	0+2	0+2
1	0+1	2+1
4	1	3

再回到起頭, 買兩瓶汽水, 總共可喝三瓶, 剩下一個瓶蓋及三個空瓶。

汽水 (sodas)	瓶蓋 (lids)	空瓶 (bottles)
2	2	2
1+0	0+1	2+1
3	1	3

但從此之後, 每多買一瓶汽水, 就可喝四瓶, 並剩下一個瓶蓋及三個空瓶。也是一直重覆。因此, 就大膽的假設:

「The general formula is (N is the total # of sodas ≥ 2)

Total $= 3 + (N-2) \times 4$.

Always with 1 lid and 3 bottles left.」

整個思考過程寫得清清楚楚, 很容易看懂。我覺得我們的學生需要有這樣的數學作文能力, 但很可惜的是, 他們在這方面的訓練幾乎爲零。我自己也是後來開始寫論文時, 才開始學習此事。

另外, 依照 H 君的來信, 他覺得「數學作文」也和考試方式有關。近年來, 數學考試大都以選擇題和填充題爲主, 使得學生鮮少有機會以有條理的方式寫下解題流程。他覺得「數學作文」的重要性不比「國文作文」低,「數學作文」訓練的是邏輯思考的完整性, 而「國文作文」(除論述文以外) 大都是以情感抒發爲主, 且評分方式較爲主觀, 容易使得學生爲了分數, 不得不寫一些迎合閱卷老師口味的文章, 或流於華麗詞藻的堆砌, 不太適合作爲考試評比的重點 (對於近來國中會考分數評比爭議的有感而發)。

6. 數學實驗—電腦是很好的實驗工具

朋友 A 君是一位電腦專家, 在我們收到 D 君來信之前, 他就已經寫了一個程式, 很快的算出答案是 35。我於是挑戰他的程式 : 如果一開始不是 10 瓶, 而是 10^{100} 瓶, 答案如何? A 君寄來各種數值的答案, 包括下面這些 :

10 瓶 答案 35

100 瓶 答案 395

1000 瓶 答案 3995

10000 瓶 答案 39995

100000 瓶 答案 399995

我不確定電腦有沒有真的跑出我問的大數值的答案。就在同時, 我們收到了 D 君的公式。

朋友 A 君來信 :「D 君的公式出現, 此程式沒價值。」

我以前有一些經驗, 覺得電腦對數學實驗有很大幫忙, 我曾經用電腦算出一些數據, 觀察到一些現象, 最後想辦法把它們證明出來, 並寫成一篇文章。

我這樣回信 :「這個程式有其價值, 只要我們不是每一次都問程式, 而是用它跑一些例子, 我們就有機會藉由程式『觀察』出 D 君的公式。我把這叫做『數學實驗』。實驗完之後, 看到的現象, 最好能夠說明, 爲何是這個答案, 這也是爲何前一次我在給 D 君的回信中問他, 公式是觀察出來的, 還是證明出來。有一些數學問題, 人們觀察到許多現象, 但總是說不清楚理由何在。有名的例子是 Collatz 猜想[1]:

從某一正整數 x 開始, 逐次操作 : 當 x 是偶數時, 把它除以 2; 當 x 是奇數時, 把它變爲 $3x+1$。最後總是會變到 1。例子如下。

例子一 : $6\to 3\to 10\to 5\to 16\to 8\to 4\to 2\to 1$。

例子二 : $28\to 14\to 7\to 22\to 11\to 34\to 17\to 52\to 26\to 13\to 40\to 20\to 10\to 5\to 16\to 8\to 4\to 2\to 1$。

據說電腦跑了很多數目, 都是對的, 但是就是證明不出來。」

我常常在想, 現在電腦這麼發達, 我們是否可以讓中學生學習如何撰寫電腦程式, 利用電腦幫忙做一些數學實驗? 電腦的功能應該超過「家電用品」。

7. 數學歸納法—證明更一般的定理

中國古代「算經」中教導算術的方法, 與現在我們熟悉的西式, 寫一般公式的方法不同。「算經」總是對同一類型的問題, 給出一序列從小數據到大數據的問題, 如果都算清楚了, 表示你很有經驗, 算其他同類型的例子也不會有問題。這是一種很實在的訓練。

西式的訓練, 講究的是通式, 因爲有了通式, 代入不同的特殊值, 就能得到特定問題的答案。至於要如何得到通式, 最好還是先熟練特例的演算, 再歸納出通式, 就如同前述 D 君的經歷。不過, 西式的訓練中, 還要求要證明, 離散型公式的證明常用到數學歸納法。這方法有各種變化, 它的原型是 :

[1]本猜想於 1937 年由 Lothar Collatz 首先提出, 又稱爲 $3x+1$ 問題、Ulam 猜想、Kakutani 問題、Thwaites 猜想、Hasse 演算法、Syracuse 問題等。可參考: Jeffrey C. Lagarias ed, The Ultimate Challenge: the $3x+1$ Problem, American Mathematical Society, 2010.

> 用 $P(n)$ 表示以正整數 n 爲參數的一個性質。如果 $P(1)$ 成立, 並且當 $n \geq 2$ 時 $P(n-1)$ 成立可以導出 $P(n)$ 成立, 則 $P(n)$ 對所有正整數 n 都成立。

當我收到35這個正確答案寄來時, 如果那個人是小學生, 我就問他, 如果一開始有 100 瓶汽水, 那會如何? 年紀越大的我就給他越大的數值。如果寄來的答案是個通式, 我就會問他如何證明或說明。

如果一開始有 n 瓶汽水, 我們用 a_n 表示最後可以喝到幾瓶汽水。根據 D 君以及其他一些人的答案, 我們是要證明：

$$\text{當 } n \geq 2 \text{ 時}, a_n = 4n - 5。$$

如果真的要用數學歸納法來證明, 其實是會有一些困難的。底下我摘錄一段某學生寄來他朋友的證明：

「拿 2 喝 3, 剩一蓋三空; 拿 3 喝 7, 剩一蓋三空; 拿 4 喝 11, 剩一蓋三空。她先觀察這幾個數目, 都差 4, 她猜測一開始拿 n 瓶汽水, 最後可以喝到 $4n-5$ 瓶, 剩一蓋三空。$k = 2, 3, 4$ 都是已經驗證過的。假設 $k = n$ 成立, 拿 n 瓶, 最後喝到 $4n-5$ 瓶, 剩一蓋三空。$k = n+1$, 再補一瓶上去, 喝掉, 剩一蓋一空, 此時可以再換到新的兩瓶, 最後又可以喝到三瓶, 剩一蓋三空。所以拿 $n+1$ 瓶最後可以喝到 $4(n+1)-5$ 瓶, 剩一蓋三空。」

這個證明的人深知, 要證明一個定理, 有時需要證明一個看似更難的定理。她證明的是：

$$\text{當 } n \geq 2 \text{ 時}, a_n = 4n - 5, \text{而且剩下 1 個瓶蓋及 3 個空瓶。}$$

上述的「剩下 1 個瓶蓋及 3 個空瓶」是必要的, 這可以從實驗過程中, 某一步到下一步看出來。所以, 數學歸納法的重點, 是要將實驗過程, 某一步到下一步的操作寫清楚。

8. 資優教育—天才與自閉症之間

朋友寄來他兒子的答案, 信是這樣寫的：「我家讀國小三年級的老大, 能夠很清楚地算這道問題。

附加檔案是他改題目 (他問我如果換成這樣問會怎樣? 我回答請他自己算。) 以後的算式, 我猜想他原先在心裡就是這樣做計算的。新題目是二個瓶蓋與三個空瓶都能換一瓶汽水。

我對他自己寫出的算式感到十分訝異, 雖然他最後的答案是錯誤的 (因爲還需要再往下算一步)。

他本身患有輕微自閉症, 早前自己學會如何將一個非平方數手動開根號, 並用一張 A4 的紙手動計算根號 2 到小數後 8 位。」

其實, 改過的題目比原來的題目難。朋友兒子的答案整頁是在算一開始有 5 瓶汽水的答案 22 (應該是23), 右邊寫下通式 $(n-5)+22$。雖然整張紙沒有任何一個中文字作說明, 但是看

得出來, 他得到正確的答案, 而且知道其中的道理。

我給朋友的建議是要好好栽培這個小孩。

有個學生乾脆把問題改到最一般的形式 : a 個瓶蓋可以換一瓶汽水、b 個空瓶可以換一瓶汽水。他還算出一個公式出來。

9. 再回到那天晚上與小女兒的故事

把時間拉回到那天晚上, 繼續我和小女兒的故事。

「女兒, 我覺得這和公比爲 $3/4$ 的等比級數很有關係。妳看看, 喝掉 4 瓶汽水之後, 就可以用 4 個瓶蓋和 4 個空瓶換 3 瓶汽水, 平均起來, 每喝 1 瓶汽水, 就能再換到 $3/4$ 瓶汽水, 這跟算銀行複利是一樣的, 是個等比級數求和的問題。」

小女兒有點高興 :「是阿, 我們有一位最聰明的朋友也是這樣算的, 他還說接下來要用微積分, 好像學問很大。」

我實在看不出爲何要用微積分, 不過小女兒又說 :「可是, 他的答案跟正確答案有一點小差距, 而且還有小數點。」

看起來, 那位出題的朋友已經很得意地宣告了正確的答案, 現在差的只是要他們有個合理的交代。

「女兒, 我想等比級數這一招有缺陷, 我再換一招。我們把喝掉 4 瓶汽水之後用 4 個瓶蓋和 4 個空瓶換到 3 瓶汽水, 叫做一『回』。所以說, 如果至少有 4 瓶汽水, 就可以操作一回, 這樣, 汽水少了 1 瓶, 同時也喝了 4 瓶汽水。所以我們可以逐回操作, 總共操作了 7 回, 也就是共喝了 $4 \times 7 = 28$ 瓶汽水, 同時剩下 3 瓶汽水。所以我現在只要會算有 3 瓶汽水, 實際可以喝多少瓶汽水就可以。」

我很努力地算, 但還是很容易混亂, 一開始算出 6 瓶, 因爲女兒已經有點佩服我了, 所以很客氣地提醒我 :

「$28 + 6 = 34$, 還是差一點。」

最後我不辱使命, 終於正確地算出 $28 + 7 = 35$ 的答案。

以數學的本能, 立刻就可以說 :「更一般來說, 如果一開始有 n 瓶汽水, 實際就可以喝 $4(n-3)+7 = 4n-5$ 瓶汽水。」

於是我得到了英雄式的崇拜 :「真的很厲害, 這樣如果是 100 瓶也會算了, 97 瓶也會算, 305 瓶也會算。再告訴我公式一下。」

「當然了, 一百萬瓶都會算。不過, 我還是希望你懂得我解釋的道理, 不只是記住公式。」

「這樣比較容易嘛。」

記住公式的確比較容易。比方說, 學生要應付考試就比較快速有利, 特別是現在這個常常考選擇題的時代。但是, 光是記住公式也有其缺點, 當你忘記公式的時候, 公式就回不來了。

10. 精益求精—化繁為簡、反璞歸真

我一邊做家事, 一邊仍耿耿於懷爲何剛剛3瓶還是算得不清不楚。

「女兒, 其實我們還可以解釋得更簡單一點。」

她不解的看著我, 我說：「我們可以用 3 瓶汽水操作一回, 讓它剩下 2 瓶汽水。」

「但是只有 3 瓶汽水, 又不到 4 瓶, 要如何操作一回?」

「可以這樣說。先喝 2 瓶汽水, 用 2 個瓶蓋換 1 瓶汽水, 這樣的效果就和我們一開始有 4 瓶汽水可以操作一回是一樣的, 只是剩下的是 2 瓶汽水、而不是 3 瓶汽水。」

「所以呢?」

「所以, 如果一開始有 n 瓶汽水, 我們就可以操作 $n-2$ 回, 同時剩下 2 瓶汽水。剩下的 2 瓶汽水喝完之後, 瓶蓋又可以換 1 瓶汽水, 喝完之後剩下的 1 個瓶蓋和 3 個空瓶就沒有用了。就是說我們可以喝 $4(n-2)+3=4n-5$ 瓶汽水。」

「答案還是一樣阿。」

「是的, 但是你不覺得, 最後一步比較簡單嗎?」

11. 等差數列—我怎麼會記得公式

小女兒並不是喜歡念書的人, 我認爲她是我們家中唯一不念博士學位, 但是卻最有想法的。我興起了爲人師表的野心, 要來考驗她小時候學過的數學。

「女兒, 你知道什麼是等差數列嗎?」

「你看不起我嗎? 就是後項減前項是常數的數列。」

「很好, 那你看看, 我們剛才討論的, 是否就是等差數列?」

「有一點像。」

「如果一開始有 n 瓶汽水, 我們用 a_n 表示最後可以喝到幾瓶汽水。我們就可以得到：

$$a_1=1, a_2=3,\ \text{而且當}\ n\geq 3\ \text{時},\ a_n=a_{n-1}+4\text{。}$$

所以說, 從第二項開始, 就是等差數列了。利用等差數列求一般項的公式就可以從第 2 項及公差求出一般項。」

「但是, 我怎麼會記得公式呢?」

小女兒在我面前總是沒有隱藏。現在的學生, 縱使不記得, 不知道敢不敢承認, 因爲這「應該」是「很簡單」的公式。大概也沒有老師會去考這樣的公式, 但是據說有人會考再難一點、轉個彎的題目, 像是「有一個等差數列, 其第 10 項等於 35, 第 2014 項是 8051, 請問第 103 項是多少?」實在也看不出來這樣的問題有多少意思。

「不記得公式也沒關係, 從頭算看看就可以。」

「如何算?」

我拿了一張日曆紙, 把式子列出來:「我現在把等差數列的式子逐一列出來, 像這樣。把這些式子通通加起來。等號左邊的一些項兩兩對消, 最後只剩下 a_n 這一項; 等號右邊有一個 3 和 $n-2$ 個 4, 加起來是 $3+4(n-2)=4n-5$, 就是我們之前得到的答案。」我順手用筆畫出兩兩對消的動作。

$$\begin{aligned}
a_2 \qquad\quad &= 3,\\
a_3 - a_2 &= 4,\\
a_4 - a_3 &= 4,\\
a_5 - a_4 &= 4,\\
&\ \vdots\\
a_{n-1} - a_{n-2} &= 4,\\
a_n - a_{n-1} &= 4.
\end{aligned}$$

「好吧。」

課上到這裡, 看出她的興趣已到盡頭, 下課鐘應該要響了。我一直都記得大女兒對我的忠告。

「爸爸, 你知道學生最討厭什麼樣的老師嗎?」

「是什麼?」

「他們最討厭下課鐘響了, 還不準時下課的老師。」

12. 如果老闆人很好

看起來, 35瓶是大家的共識。有個答案很可愛, 他說:「除此之外, 如果老闆人很好, 可以先跟他借一瓶汽水喝, 然後就會多出一瓶蓋一空瓶, 和原本剩下的一瓶蓋三空瓶, 又可以換兩瓶汽水, 一瓶還回去給老闆, 另一瓶喝掉, 最多可以喝到37瓶汽水。」其實, 還可以喝到更多。當換到兩瓶汽水時, 不急著把一瓶還給老闆, 先把兩瓶喝掉, 得到二瓶蓋二空瓶, 再用二瓶蓋換一瓶汽水還老闆, 這樣就可以喝到38瓶汽水。還不只如此。要記得, 剛才還剩下二空瓶。如果再跟老闆借兩瓶汽水, 喝完之後, 就會累積出二瓶蓋四空瓶, 可以換兩瓶汽水還老闆。這樣總共就可以喝到40瓶汽水。

13. 十秒鐘解題術

有三個朋友用下面或類似的觀點, 秒殺問題。

「一瓶汽水 2 元, 有 20 元, 買了 10 瓶, 2 瓶蓋可換 1 瓶汽水, 4 個空瓶可換 1 瓶汽水, 如照命題走, 喝了 35 瓶剩 1 個蓋子 3 個空瓶。

但是一個瓶蓋占 1/2 的費用, 一個空瓶爲 1/4, 內容物才值整瓶汽水的 1/4 價值。所以我們真可享用的內容物一瓶的量只值 0.5 元, 很合理的, 20 元應可以喝 40 瓶的量。因瓶蓋與空瓶對老闆有價, 對他來說, 讓我們兌換汽水他不吃虧, 只是我們要自備容器。就像我們用杯子去星巴克買咖啡, 可省掉容器的成本, 還比較環保。不占便宜不吃虧, 就要 40 瓶內容物。」

當然啦, 如果老闆人不夠慷慨, 最後的 1 個瓶蓋和 3 個空瓶 (值2.5元) 硬是不給換汽水, 這樣還是只能喝到35瓶。

14. 波利亞的解題策略—為何要學習數學

綜合以上故事, 依 H 君的建議, 我們來討論數學學習的一件重要事情。

中小學的數學學習, 從熟悉計算、公式、甚或定理開始, 但不能停止於此, 更不能只重複地練習類似的計算, 而應該適當地學習「如何解決問題」。相較於其他科目, 數學更著重於解題過程中的心智思考流程。

趁此機會, 我來介紹匈牙利數學家喬治 · 波利亞 (George Polya) 的「解題四步驟」:

(1) 瞭解問題。

(2) 擬定計畫。

(3) 實行計畫。

(4) 回顧。

這種思考流程, 不只可用來解決數學題目, 更可用來解決生活中遇到的問題。

但可惜的是, 現今的中小學數學課程, 大多是老師講解公式、定理、題型, 學生要做的只是「機械式」地代入公式求解。(也就是上述的 (3) 實行計畫)

所以大部分學生看到沒見過的問題時, 因平時缺乏經驗, 便無法進一步瞭解問題。(也就是前面說的「數學閱讀」障礙)

就算瞭解問題, 也因沒有現成的公式定理可用, 平時也無針對問題擬定解決計畫的訓練, 就只能乾瞪眼。(這也跟「數學作文」有關)

而解決完一個問題之後, 大多數學生往後看到相同題型就直接套用老師的解法, 不會去思考這個解法的思維流程, 更遑論去找出更好的解法或是用此方法去解決更一般的問題 (「精益求精」)。

當然, 以現有的教學時數及授課內容, 上課老師很難有時間去訓練學生熟悉以上四步驟。更何況教育部還要縮減數學的教學時數。

但我相信, 良好的數學課程, 不只能訓練出數學人才, 更能提昇每個人解決問題的能力。

15. 我是來鬧的

輕鬆一下, 我以最後收到的一封信來結束本文。

「你的題目是叫大家看清楚問題的本質, 從不同角度去看問題。補充一下不同的觀點。

管理學院的答案是 : 瓶子會破, 蓋子會掉, 換瓶換蓋大概可以多喝十幾瓶。

商學院的答案是 : 三瓶以上兩百瓶以下, 買大瓶汽水比較划得來, 兩百瓶以上改租汽水機更便宜。

大老闆們的答案是：招待貴賓, 汽水是小錢, 回收瓶蓋, 麻煩, 有失身分, 多買點汽水準備著。員工旅遊, 叫他們自己帶白開水喝。」

我的回答：「鬧得好。」

16. 確實最多只能喝到 $4n-5$ 瓶汽水

最後, 感謝審稿人提出一個非常重要的問題：「文中提出兩個策略, 從 n 瓶汽水開始, 可以喝到 $4n-5$ 瓶, 但仍須清楚說明其他策略不可能喝到更多瓶。」爲數學的嚴謹性再續一段。

一個偷懶的說法是利用「十秒鐘解題術」的概念：一個瓶蓋占 $1/2$ 的費用, 一個空瓶爲 $1/4$, 內容物才值整瓶汽水的 $1/4$ 價值。如果能說明, 不論用何策略, 最後一定會剩下一個瓶蓋、三個空瓶, 就知道喝的汽水瓶數 a 滿足 $a/4=n-1/2-3/4$, 因此 $a=4n-5$。

我們提一個直接的說法。不管用何種策略, 如果從 n 瓶汽水開始, 每次操作是指「喝 1 瓶汽水得到 1 個瓶蓋及 1 個空瓶」、「用 2 個瓶蓋換 1 瓶汽水」或「用 4 個空瓶換 1 瓶汽水」, 我們用 n_i、a_i、b_i、c_i 這四個非負整數分別表示第 i 回操作後「剩餘的汽水數」、「總共喝過的汽水數」、「剩餘的空瓶數」、「剩餘的瓶蓋數」。如果總共操作了 r 回, 最後沒有汽水可喝、也不能用瓶蓋或空瓶換汽水, 則可以知道下列事實。

(1) $(n_0,a_0,b_0,c_0)=(n,0,0,0)$。

(2) $n_r=0$、$0\le b_r\le 3$、$0\le c_r\le 1$。

(3) (n_i,a_i,b_i,c_i) 依第 i 回操作的不同方式, 是下面三種之一：

$$(n_{i-1}-1,a_{i-1}+1,b_{i-1}+1,c_{i-1}+1)、$$
$$(n_{i-1}+1,a_{i-1},b_{i-1},c_{i-1}-2)、$$
$$(n_{i-1}+1,a_{i-1},b_{i-1}-4,c_{i-1})。$$

由性質 (1)、(3), 用數學歸納法可知, 對任意 i 恆有

$$4n_i+a_i+b_i+2c_i=4n。$$

因爲 $n_r=0$, 所以第 r 回是做第 1 種操作, 因此 $1\le b_r\le 3$、$c_r=1$。又因爲總共用過 $a_r-c_r=a_r-1$ 個瓶蓋換汽水, 所以 a_r-1 是偶數, 故 a_r 是奇數。同理, 因爲總共用過 a_r-b_r 個空瓶換汽水, 所以 a_r-b_r 是 4 的倍數, 故 b_r 是 1 或 3。

如果 b_r 是 1 的話, 因爲第 r 回是做第 1 種操作, 所以 $(n_{r-1},a_{r-1},b_{r-1},c_{r-1})=(1,a_r-1,0,0)$; 從而第 $r-1$ 回是做第 2 或第 3 種操作, 所以 $(n_{r-2},a_{r-2},b_{r-2},c_{r-2})=(0,a_r-1,0,2)$ 或 $(0,a_r-1,4,0)$; 因此第 $r-2$ 回就只能做第 1 種操作, 此時 b_{r-2} 和 c_{r-2} 都必須是正數, 矛盾; 所以 b_r 必定是 3。

總結得知, $4\times 0+a_r+3+2\times 1=4n$, 所以總共喝了 $a_r=4n-5$ 瓶汽水。

—本文作者爲台大數學系教授—