數學傳播 39卷1期, pp. 46-50

【一題兩觀之一】

一個益智問題

蔡聰明

[**問題**1]: 假設一瓶飲料2元, 2個瓶蓋可換1新瓶, 4個無蓋空瓶也可換1新瓶, 請問20元最多可以喝到多少瓶的飲料?

1. 首先考慮「連續」的情況

假設 1 個瓶蓋可換 1/2 瓶飲料, 1個空瓶可換 1/4 瓶飲料, 所以每喝 1 瓶飲料就可換回 $1/2+1/4=3/4$ 瓶飲料, 永不止息喝下去。因此, 總共可喝

$$10+10\times\frac{3}{4}+10\times\left(\frac{3}{4}\right)^2++10\times\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots=40\text{ 瓶。}$$

這 40 是個理論值。若不諳無窮級數, 爲了避開它, 我們也可這樣論述:

我們觀察買 1 瓶飲料的效應, 除了得到 1 瓶之外, 還可換得 3/4 瓶: 1個瓶蓋的 1/2 瓶加上 1 個空瓶的 1/4 瓶。因此, 實際上我們只付了 $1-3/4=1/4$ 瓶的價錢。從而, 2 元買 1 瓶就可以達到 $1\div 1/4=4$ 倍的效果。今 20 元可買 10 瓶, 故總共可達到 $10\times 4=40$ 瓶, 有 4 倍乘數效果。

2. 離散的情況

假設在換瓶的過程中, 若湊不成 2 個瓶蓋又湊不成 4 個空瓶時, 換新瓶遊戲就要停止。例如, 剩下 1 個瓶蓋不能換 1/2 瓶, 剩下 1 個空瓶不能換 1/4 瓶。

我們採用一種換瓶的策略, 列表法以避免混淆與計算錯誤。

(i) 採取每次全數喝光的策略

未喝瓶數:	10		7		5		4		3		2		1		2		1		
喝的瓶數:	10	+	7	+	5	+	4	+	3	+	2	+	1	+	2	+	1	=	35
瓶蓋數:	10		7		6		4		3		3		2		2		1		
空瓶數:	10		9		6		6		5		3		4		2		3		

答案: 理論值爲 40 瓶, 而實際上總共可喝 35 瓶, 剩下 1 個瓶蓋與 3 個空瓶。

(ii) 採取盡可能換光瓶蓋與空瓶的策略

未喝瓶數:	10		8		6		5		4		3		1		2		1		
喝的瓶數:	8	+	8	+	4	+	4	+	4	+	3	+	1	+	2	+	1	= 35	
瓶蓋數:	8		8		4		4		4		3		2		2		1		
空瓶數:	8		8		4		4		4		3		4		2		3		

答案仍然是: 總共可喝 35 瓶, 剩下 1 個瓶蓋與 3 個空瓶。

當然還有其它的換瓶策略, 讀者務必要採取一種不同的策略做一遍, 做了之後才會有感覺。然而要把所有的策略都試過, 並不可行, 更不合數學之道。

問: 採取任何換瓶的策略, 答案是否都相同? (答案是肯定的。)

3. 一般理論的考量

我們用數學的語言, 考慮一般的情形。

[**問題** 2]: 根據原題的換新瓶規則, 問 $2n$ 元購入 n 瓶飲料, 最多總共可喝幾瓶?

考慮離散情況, 假設初始未喝的瓶數爲 n, 相應的理論值爲 $4n$, 喝的總瓶數爲 d_n, 最後剩餘的瓶蓋數爲 c_n, 剩餘空瓶數爲 b_n, 消失的瓶數爲 m_n。我們要來探求 d_n 與 d_{n-1}、d_{n-2}、... 之間的遞迴關係式。

因爲至少要喝掉 2 瓶才能啟動換瓶的機制, 我們不妨由喝 2 瓶開始:

未喝瓶數:	n		$n-2$	$n-1$	$n-3$	$n-1$			
喝的瓶數:	0	+	2	+	2			總共 $= 4$瓶	
瓶蓋數:	0		2	0	2	0			
空瓶數:	0		2	2	4	0			
交換瓶數:			1		2				

所以得到遞迴的一階差分方程與初期條件:

$$\begin{cases} d_n = d_{n-1} + 4, \ n \geq 3 \\ d_2 = 3 \end{cases} \tag{1}$$

同理, 由喝 3 瓶開始亦得相同的 (1) 式。若由喝 4 瓶開始, 就得到:

$$\begin{cases} d_n = d_{n-1} + 4, \ n \geq 4 \\ d_3 = 7 \end{cases} \tag{2}$$

若由喝 5 瓶開始, 就得到:

$$\begin{cases} d_n = d_{n-2} + 8,\ n \geq 5 \\ d_3 = 7 \end{cases}$$

這被含納在 (2) 式之中。

解 (1) 式或 (2) 式都得到相同的結果。理論上可喝 $4n$ 瓶, 實際上喝到的瓶數 d_n 稍微少一點, 其一般公式如下:

當 $n = 1$ 時, $d_1 = 1$,　剩下 $(c_1, b_1) = (1, 1)$ (少喝 $m_1 = 3$ 瓶)。
當 $n \geq 2$ 時, $d_n = 4n - 5$, 剩下 $(c_n, b_n) = (1, 3)$ (少喝 $m_n = 5$ 瓶)。

4. 消失的五瓶在何處?

剩下1個瓶蓋與3個空瓶, 若可無止境繼續交換下去, 就得到:

$$\frac{5}{4} + \frac{5}{4}\Big(\frac{3}{4}\Big)^1 + \frac{5}{4}\Big(\frac{3}{4}\Big)^2 + \frac{5}{4}\Big(\frac{3}{4}\Big)^3 + \cdots = 5\text{瓶。}$$

因此, 40 瓶是最大的極限, 可以看作理論值, 實際上的離散操作是達不到的, 因爲總是會有剩下無法交換的蓋子 1 個與空瓶 3 個, 這在「連續」操作之下又會產生 5 瓶, 這就是那消失的 5 瓶。

[**習題**] (**銀行創造貨幣**)

假設銀行的存款準備率爲 20%, 亦即每接受 100 元的存款, 只要保留 20 元作爲準備金, 其餘 80 元又放貸出去。今某甲存入 B_1 銀行 100 萬元, 則 B_1 銀行的存款增加 100 萬元。B_1 銀行保留 20 萬元作爲準備金, 其餘的 80 萬元貸款給某乙, 而乙向丙支付貨款 80 萬元。丙將 80 萬元全部存入 B_2 銀行, 於是 B_2 銀行的存款增加 80 萬元。B_2 銀行保留 $80 \times 20\% = 16$ 萬元作爲準備金, 其餘的 64 萬元全部貸款給某丁。讓這個過程不止息地進行下去。試求銀行存款、貸款與準備金的總金額? (答：500、400、100 萬元。由此看出, 由初始的 100 萬元就創造出 $500 + 400 = 900$ 萬元這麼多的貨幣! 乘數是 9 倍。通常中央銀行就透過升降銀行的存款準備率, 來控制通貨量, 提升存款準備率就是緊縮通貨, 降低存款準備率就是寬鬆通貨。)

5. 最後剩餘的模式

我們詳細列出原問題答案的狀況：假設初始未喝的瓶數爲 n, 則相應的理論值爲 $4n$, 喝的總瓶數爲 d_n, 最後剩餘的瓶蓋數爲 c_n, 剩餘空瓶數爲 b_n, 消失的瓶數爲 m_n。經過簡單計算, 把結果列成下表:

n	$4n$	d_n	(c_n, b_n)	m_n
1	4	1	(1, 1)	3
2	8	3	(1, 3)	5
3	12	7	(1, 3)	5
4	16	11	(1, 3)	5
5	20	15	(1, 3)	5
6	24	19	以 下 全 同	

事實上, 最後剩餘的所有可能模式爲

$$\{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3)\}$$

我們可以驗證：當 $n=1$ 時, 必然是 (1,1); 當 $n \geq 2$ 時, 配合上一節的解差分方程可知, 只有 (1,3) 是唯一的可能, 其餘皆不可能。

因此, 原題最多可喝 $d_{10} = 35$ 瓶, 而最後的剩餘 $(c_{10}, b_{10}) = (1,3)$, 這導致消失了 $m_{10} = 5$ 瓶。

6. 問題的各種主題變奏

我們還可再做各種「主題變奏」, 例如改變換新瓶的規則:

[**問題** 3]: 用 $2n$ 元買進 n 瓶飲料, 換新瓶的規則各如下:

(i) 4 個瓶蓋或 5 個無蓋空瓶都可換 1 新瓶。
(ii) 2 個瓶蓋或 2 個無蓋空瓶都可換 1 新瓶。
(iii) 3 個瓶蓋或 6 個無蓋空瓶或 9 個商標都可換 1 新瓶。
(iv) 2 個瓶蓋或 3 個無蓋空瓶或 6 個商標都可換 1 新瓶。
(v) 2 個瓶蓋或 4 個無蓋空瓶都可換 1 新瓶, 而瓶蓋上又附有中獎的約定, 例如：中 5 瓶、10 瓶的機率分別爲 0.01 與 0.0001。

求最多可以喝到多少瓶的飲料? 最後剩餘的模式是甚麼? 對於第 (v) 小題, 會牽涉到機率與期望值的演算, 問題稍深刻, 但有趣。

生產公司爲了促銷商品, 訂下一些獎勵規則, 要如何訂? 在成本、利潤與極值的考量下, 每瓶的售價要訂爲多少, 等等。這是商業上一個很切實際的數學應用問題, 從小學生、國中生、高中生到社會人士都可以做, 讓頭腦做思考的體操, 堪稱老少咸宜。

緣由與致謝辭:

5/7 日我到礁溪旅遊, 遇到某公司的職員告訴我這個問題, 並且說公司每個人算得的答案都不同, 感覺很好奇又怪異。問題的出處不知, 可能是網路上流傳的一個問題。5/29 同事張鎮華教授又拋出這個相同的問題給全系的同事, 顯然他已有答案, 但沒有公佈。此題若僅限於在頭腦裡心算, 不准用紙和筆計算, 很容易出錯, 這可能是有多種答案的理由。最後我要感謝我的兒子蔡弘霖 (學音樂) 與我的學生黃梓彥 (台大數學所) 的參與討論, 他們總是概念清晰且流暢。

—本文作者爲台大數學系退休教授—