

數學教育

W. Thurston 談美國數學教育

翻譯：黃馨霈

William Thurston (1946~2012), 1982年菲爾茲獎得主, 是低維拓撲研究的領導人物, 教學研究之外也關懷社會議題。本文「Mathematical Education」原載 Notices of the AMS, 37(1990), 844-850 (副標題為本刊所加), 得到作者家人及 AMS 同意翻譯及轉載, 謹此致謝。 — 編輯室

數學教育的現況令人難以接受, 這個事實雖然備受大眾關注, 真正的改變卻是緩慢的。

決策者往往不能理解數學或是數學教育的本質。不同學校系統的「改革」各行其是, 常背道而馳, 突顯了我們不能只認知到問題的存在及重要性, 必須對問題有更深入的了解。

對於美國能否找到這些問題的解決方法, 我十分樂觀。因為不了解產生的問題是可以解決的, 我們缺乏的不是奉獻的精神、資源和才智, 而是 — 方向。

1. 徵候

數學教育的問題有許多徵候。現今美國主修數學的大學生約是 15 年前的一半; 研究生中儘管外籍生占了一些比例, 仍然不到15年前的二分之一。此外, 美國學生在標準化測驗的各方面表現, 都低於其它工業化國家的學生。

美國成年人碰到數學家的典型反應, 令人沮喪, 他們滿懷抱歉地回憶修過的最後一門數學課, 通常就是一門他們跟不上進度、感到失落的課。

許多公司將缺乏數學能力視為人力的主要問題。科技使我們在一些工作上, 不再需要具備如加總漢堡訂單等基礎數學的能力, 也取代了不需要特別技能的工作, 像是生產線的工作, 同時也創造出許多需要相當程度複雜數學的其它行業。

大學的數學課堂裡, 學生少有反應, 怯於思考問題的各種面向, 怯於獨立思考。走訪不同年級的課堂, 可以發現學生的活力及自動自發的程度, 隨著年齡的增長急遽下滑。年輕學子對數學與生俱來的興趣和好奇心似乎已經消失殆盡。

比起二十年前, 在大多數情況下, 已經很難要求學生做課外的作業或學習。

即便是高中數學 (包含微積分) 表現優異的學生, 基礎數學知識仍嫌狹窄。

2. 分層和分割 — 各自為政

問題的主要來源, 同時也是解決問題的主要障礙, 是龐大的數學教育體系, 上自研究所下至幼稚園的層層劃分。尤其中學數學和大學數學教師間鮮少交流, 從事大學課程改革和從事研究的學者缺乏充分的溝通。這種分立部分由於多個專業機構林立, 包含主要代表數學研究的 American Mathematical Society (AMS)、關注大學數學教育的 Mathematical Association of America (MAA) 以及主要由中學數學第一線教師組成的 National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 另外更有代表兩年制學院、應用數學、統計、作業研究和資訊工程等等的機構。

AMS 和 MAA 兩個組織中, 只有三分之一的成員重疊, 多數 AMS 的成員甚至不知道 NCTM 的存在, 反之亦然。除了透過自己的孩子, 從事學術研究的數學家 and 學校老師少有接觸。大多數的師培單位幾乎沒有研究學者。儘管數學研究和師資培育是許多大學的強項, 大部分從事數學研究的學者都未參與師資培育的工作。

雪上加霜的是分化問題: 中小學教育被分成許多個別的學區和學校, 他們是真正的決策單位, 大學教育則被切割成多個擁有決策大權的系所。雖然許多人在思考這些問題而且付諸行動想要解決, 這些個別的努力也頗為成功, 可惜彼此間的整合及心得分享少之又少。

3. 數學是不同於一般的「高」科目

數學在教育上需要特別注意的特點是它的「高度」, 也就是一個概念建立在先備概念上的程度。數學的推理可以很清楚明確, 原則一旦建立就能依理而行, 也就是說要一下子建立起非常可靠、極為有力, 在概念上非常高的結構是可能的。

這個結構不像樹, 反倒像有許多相連支柱的鷹架。鷹架一旦穩固, 往上增建不難, 但若前一層不穩, 繼續擴建根本不可能。

教學的困難在於修課學生對先備知識的精熟程度不一, 對於懂得多少和哪些不懂, 往往有所隱瞞。舉例來說, 很多修微積分的學生做分數加法時, 至少, 在符號上會出錯。典型的錯誤如

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

這個式子, 比

$$\frac{ad+cb}{bd}$$

來的簡單得多。

無法掌握分數的加法讓學生有罪惡感, 即便是對自己也不願承認, 更不願請教他人如何加減分數, 以及為什麼要這樣子做。

對於已經懂得分數加法的人，這其實是很無趣的課題，但它是代數不可或缺的技能，而代數又是微積分的主要工具。對於個別的學生，要找出根基不穩的地方加以補強不怎麼困難；但面對一個學生異質性很高的班級，要拿捏教學內容的程度，讓所有學生都能理解而又有趣並不容易。

4. 數學是門廣博的學問

數學也很廣博。有許多在主要課程中從未探討過的主題，在微積分中出現。而教過的主題中，也有許多有趣的分支領域未曾被探究。

在我父母的年代（1940年代），大學代數是大學的第一門數學課，過了不久微積分成爲大學數學的第一門課，到了 1960 年代初，微積分成了明星高中的課程。如今富裕學區的高中生大都上過大一微積分，因此大部分頂尖大學優秀的數理科系學生，在入學前就已經修過這門課。像在普林斯頓大學（Princeton），去年就有三分之二的新生，至少能免修一學期的微積分。

隨著學習進程提前而來的代價，是刪減分支主題的趨勢。以我高中時爲例，一般會唸立體幾何、球面幾何和平面幾何，現在這些主題已不復存在。典型學生受到的數學教育，形式是細長單薄的，達到基礎能夠撑起的高度之後，就無法成長，最終停滯或一蹶不振。

而數學教育在社會對標準化測驗的日益依賴之下，助長了內容延伸和窄化的趨勢。標準化測驗的設計涵蓋大部分標準課程的主題，如果測驗中出現只有半數學生唸過的主題，將有失公平。只要不失公平，這種測驗作爲數個評量的方式之一是不錯的。然而，好成績常被當作目標，爲了提高分數，議員、報紙和家長向督學及學校董事會施壓，督學和學校董事會向校長施壓，校長向老師施壓，老師再向學生施壓，以至於許多數學課程經過特別設計，用來提高某些標準化測驗的成績，著實可悲。

我們不會只用一根溫度計來診斷肺炎，也不會以爲在病人嘴裡放冰塊就可以治療，同樣的，我們應該用類似的明智態度看待數學教育中的評量。

如果能改弦更張，從一系列標準課程轉變爲多元化的課程，多包含些較接近實際的主題，以此削弱數學教育「高」的型態，更能達到數學教育長遠的目的。諸如有限數學（finite mathematics）及機率的課程都是這方面的趨勢，當然，還有更多發展的空間。

5. 數學是直觀而且實際的

學生普遍和現實及數學直覺的本質脫節，從幼稚園到中學，他們常常遇到老師無法以平常心看待不同於常規的事。小孩子會用許多千奇百怪的方法解數學，但是跳脫傳統的做法常受到老師的否定，一方面了解孩子的思維和語彙並不容易，老師也沒有試圖理解，另一方面老師認爲用別的方法或解釋並不恰當。

學生因爲獨立思考及自我表達受到壓抑，在進入大學的時候，養成一種習性，想先知道什

麼是必須學的；只要上課內容脫離教學大綱和課本，就有學生問考試是否要考。

除非數學與人們有實際的連結，否則一門課一旦結束，學生幾乎不可能再想到數學或是運用數學。

6. 資優與競賽

除了著重考試外，數學資賦優異及跳級也受到強調。對天資聰穎的學生來說，數學這門科目要跳級學習相對容易。

與資優相關的問題有許多，跳級的學生往往在日後發現基礎知識出現斷層，在這個節骨眼上，卻可能因為尷尬，不敢承認而裝懂，後果往往不堪設想。

另一個問題在於，早慧的學生了解到，獎賞來自於「超越」同齡者，而不是學習和思考的品質。但是學習是一生的事，持這樣的態度是短視的。到了 25 或 30 歲時，他人會用工作能力，而非資賦過人來評斷他們。當其他有天賦但並未提早學習的人迎頭趕上，自己變得跟一般人沒兩樣時，常讓他們感到沮喪萬分。這樣的問題在富裕學區更是雪上加霜，父母常迫使孩子在他們真的準備好之前，儘快地跳級。

第三個與跳級有關的是合群的問題。年紀比較小的學生往往對數學課程的內容駕輕就熟，卻很難融入其他修課學生之中。

相關的還有將數學看作比賽或一項體育賽事的流行趨勢。在美國，中學普遍成立數學聯盟，來自各地區的中學生定期聚會，在固定時間內解決給定的題目。

此外更有全州、全國和國際的比賽。對獲得佳績的人來說，這些競賽饒富趣味和教育意義。但是也有缺點，這些競賽強化了是否擁有「數學天分」的觀念；在強調解題速度的同時，犧牲了深度的思考和推敲；過度強調背後藏著一些花招的難題，而不是較為實際，需要有系統、持續探討的問題。

許多解題速度不夠快或沒有經過練習的人，因而感到氣餒，但是若有充分的時間思考，他們可能是擅長做問題的。有些在競賽中名列前茅的人日後真的成為數學家，但有許多頂尖數學家，過去在數學競賽的表現並不出色。速度對數學的確有幫助，但只是助益之一。對於那些沒有成為數學家的人，數學競賽的應試技能跟他們的關係更是微乎其微。

這些競賽有點像拼字比賽。擅長拼字和擅長寫作之間雖然有一些關聯，但是州比賽的冠軍不見得有成為優秀作家的天賦，有些寫作好手並不是拼字高手。如果一般人將寫作與拼字的能力混為一談，會讓許多未來可能成為作家的人因而卻步。

我認為解決上述問題的方法是建立一個系統，利用數學的廣度，讓學習能力強的學生在超越同齡的同儕前，能深入題材並且涉獵一些與之相關的主題。

7. 迷悟之間

令人驚訝的是，數學是能夠壓縮的。你可能奮戰好一段時間，一步一步多方設法，研究一些過程或想法。一旦真的了解問題，洞悉全局，心智就會產生巨大的壓縮，你可以將之歸檔，需要時快速全面地喚起記憶，還能將它自如地運用在其它心智活動。伴隨這個壓縮而來的心得是做數學的真正喜悅之一。

但是即便是費了好一番功夫才掌握的數學概念，要我們回頭來理解對這些概念仍然懵懂的人的思路，卻很困難。記得小學五年級的時候，有一天我很驚訝地發現 134 除以 29 就是 $134/29$ ，多麼簡便！對於那時的我，134 除以 29 是枯燥冗長的計算，而 $134/29$ 卻一點也不費力。我很興奮地告訴父親這項重大發現，他卻說這很理所當然， a/b 和 a 除以 b 是一樣的意思，對於他只是符號上小小的不同罷了。

有位學生寫到參訪一所小學的經歷。他被要求去教小朋友分數的減法，赫然發現第一次學習分數的減法要涉及的層面有多少，而這是化約在他腦中再普通不過的事。

這樣的事在各個程度的數學中屢見不鮮、不斷發生。那些得來不易、威力強大的工具，數學家們用起來幾乎不假思索、得心應手，對學生卻非如此。數學家因而不容易了解學生的想法，這個心理上的障礙使他們無法感同身受地傾聽學生的意見。

因此，在數學教學中努力克服這個障礙、設法給學生足夠的空間，讓他們有機會自行找出解決辦法，尤其重要。

8. 勝任與退縮

同樣地，程度較好的學生知道許多其他學生不知道的事情。當他們賣弄數學詞彙，彷彿所有受過教育的人都應該知道，而你卻連一丁點概念也沒有時，真的很受挫。程度沒那麼好的學生並不知道，只要時機成熟自然也會（可以）學會這些理論及相關字彙，而後能自如地運用。記得在我還不了解諸如負數、小數、長除法、無窮、代數、變數、方程式、微積分、積分、微分、流形、向量、張量、函數層、譜這些名詞之前，常被這些數學詞彙和概念嚇到。好長一段時間之後，我才明白這是學習過程中的模式，並且在面對不知道的數學概念時，發展出一些免疫力。

老師們也常對數學感到害怕。中學老師不太敢和大學老師交流，對於大學教授是否接觸過他們所需處理的問題存疑，這樣的存疑不無道理。高中和大專院校教師之間的整體交流如此之少，以至於很少有教授知道中小學的教育問題。小學老師則對自身的理解沒有把握，怯於與人交流。

9. 問題和解決之道是相同的

不同程度的數學教育，上自研究所下至幼稚園，面臨的問題和解決的方法大同小異。缺乏溝通是其中一大缺失，雙向溝通一旦開啟，潛在的助益極大。

過去兩年來，我接觸了參與不同程度數學教育的人士，部分因為我是全國數學教育理事會 (Mathematical Sciences Education Board, MSEB) 的一員，這是集合多元數學及教育背景人士的組織，包含了一些老師。我獲益匪淺。

1990年的春季班，我和 John Conway、Peter Doyle 借用許多我學到的點子，共同在普林斯頓大學開設一門新課程 — 「幾何與想像」。我們避免講課，強調學生之間的分組討論，以團隊方式授課。強調手作教材、合作學習以及問題解決。我們要求學生寫日誌，用好的英文完整寫下想法。最後每位學生在這堂課都完成一個主要的專題計畫。上面提到的這些點子都是借用目前 K-12(美國幼稚園到高中數學教育) 的想法，以 NCTM 課程標準為主。

爲了製造課程的高潮，我們辦了一場「幾何市集」，跟科展有點像，雖然沒有獎品，但現場有爆米花機，活動很有趣。這門課比起過去我們教過的任何一門課，都來的有生氣。學生學了很多數學，也解決一些過去我們在傳統大學課堂裡不敢提出的問題。

我們討論的主題之一就是數學教育，學生們拿到本文的初稿後，根據個人經驗寫出 70 篇反思後的論文。他們的建議對本文的完成幫助很大。

10. 被排擠的群體

爲何女性和非亞裔少數族群成爲數學家的人這麼少？

我認爲中小學數學教學及課程的貧乏與此大有關係。學校教授數學的方式無法達到數學教育的真正目的，要在中小學數學課的一般經驗中，感受到數學的深度、活潑、力度和廣度非常困難。我相信多數能精通上述面向而且最終成爲科學家、數學家或電腦程式設計師等等的學生，都利用課外其它管道學習數學；有時是家庭，有時是書籍，有時是一位特別的老師，但更常透過學校的「書呆子 (nerd)」團體學習。我高中時就隸屬於這樣的團體 (雖然當時還沒有「nerd」一詞)，對此我十分感謝。不過白人、亞裔男性之外的女性、西班牙裔或黑人要加入，就另當別論了。

由於當前數學教育下的頂尖學生，主要利用課外管道學習，因此應該從改善課堂數學教學的品質，來平衡課堂內外的落差，特別是幫助黑人、西班牙裔及女性。至於那些還不習慣數學講授模式的學生，教學上不必降低程度，應該從個人真實經驗出發，這點格外重要。

學生會感到氣餒與課堂教學的品質大有關係。我們對早慧、高分及競賽的強調，放大了學生之間在其它地方原本就有的細微差異。

11. 目標及標準化測驗

數學教育的用處何在？

11.1. 生活中的數學

首先，數學是日常生活的基本工具。當你逡巡在商店的貨架之間，看到 13 盎司的袋裝咖啡，以及 16 盎司的罐裝咖啡，罐裝標示醒目地寫著「加量 23%」，能否利用這些資訊，決定要買哪個？或者買了一輛有著各式賣點如融資、折扣回饋及玩意的新車時，是否了解到底是怎麼一回事？如果多數人都懂的話，這些把戲就無用武之地了。

其次，數學推理是重要的公民素養。不同物質引起的健康風險評估，你能了解背後的論證，能判斷它們的重要性嗎？你是否有能力針對政客們提出的統計數據，判斷其意義及重要性？你會簡單的縫紉和木工所需的丈量嗎？會編列預算？看得懂報章雜誌裡的圖表？是否能察覺許多常被用來誇大或貶低某一趨勢的手法？

再者，在日益複雜及技術發達的社會裡，許多支撐社會運作的工作都需要數學作為工具，用途多變而且無所不在。齒模技師、傳真機維修員、速食店經理、房產經紀人、電腦顧問、簿記員、銀行行員、護士和律師，在工作上都需要對數學有一定程度的了解。

最後，數學大量地使用（有時濫用）在科學的大多數分支。許多理論科學實際上就是數學，統計就是最常見的應用之一。許多科學家使用一般常用的電腦統計套裝軟體，降低了計算的必要，但使用統計套裝軟體的人，往往不太清楚其中的基本原理，因而不當應用統計測試或圖示。

11.2. 數學是活的

對我來說，這些實用目標雖然重要，卻是次要的。數學所擁有非比尋常的美、力度和一致性，遠超過我們的想像。當我們進入新的階段，發現新的喜悅，發現它與舊有熟悉領域意想不到的連結——數學一直在變化，變化得很快，這是由於數學涉及的是一種堅實可靠的推理。

數學如同不切實際的幻想，卻能實現而且長存。做數學感覺像憑空造物，但這個過程實際上使我們知覺敏銳，才能發現周遭無所不在的一些式樣 (patterns)。G. H. Hardy 在他對數學著名的辯白中，讚美數論的純粹、抽象及不證自明、無法用於實際的特性。如今數論應用廣泛，特別是在通訊的編碼和解碼上。

身為數學家，美與實用這兩個數學的目標，我相信最終是相近的。天生對美的追尋，引領著我們認識數學至一定的深度，並且產生一定的連結，正是這些模式的深度與美，使得它們可以出乎意料地展現在其它數學、科學及世界中。

與人分享數學的喜悅以及翱翔於知性世界的體驗，正是數學教育的目的。

11.3. 測驗與「評鑑」

可惜的是，中小學數學教育的目標已經窄得難以想像，甚至比上述的實用目標來得狹隘，更不用說其它的了。最近政客和大眾紛紛要求學校系統進行「評鑑」，這樣做很好，只是針對教育的評鑑，依據的常常是狹隘的選擇題測驗。

好比以為通過伊莉莎白時代英語單字計時測驗的學生，就是精通莎士比亞；又或者能從四個選項中正確地找出句子的文法型態，就學會寫作。

現今州和地方的教育局，洋洋灑灑列出學生在各年齡層所應熟習的技能，而不是列出一套課程：橫式加法 vs. 直式加法，二位數相加得到二位數答案的加法 vs. 二位數相加得到三位數答案的加法等等。

1990年7月24日紐約時報都會版的頭版文章，比較了位於布魯克林貧困區，兩所環境類似的小學。第一所學校辦學「有成」，每天開設兩堂閱讀課，第二堂專門教授標準化「測驗應試技巧」，並讓學生練習做標準化的閱讀測驗。全校有80.5%的學生，成績達到或高於該年級平均。另一所辦學「不佳」的學校，學生花在準備考試的時間只有三個月，因此只有36.4%學生，成績達到或高於該年級平均。

報導的記者舉了一個辦學「有成」的校長，如何確立學校的基調的例子：

『光只有正確答案她並不滿意，她要求對的步驟。在四年級的一堂課裡，她注意到，紮辮子的 Keanda Snagg 嘗試用一個大膽但正確的方式，切入一道要求算出兩家店中，哪一家的平均價格較低的問題。

她對 Keanda Snagg 說：「你的作法好像沒有做什麼。」

她盯著 Keanda 做每道計算，比起算術，她更強調基本的原則，例如將數字依序清楚地擺進正確的欄位。』

沒有親眼看到，我無法評斷哪所學校比較成功，我知道的是，考試成績和以上的例子，都不代表成功。

12. 思考和死記硬背

狹隘的目標讓人識見不明。

當才智能夠全力施展，所學能與真實情形或現象結合時，人會更聰明。如果有人不懂你講的東西，很自然的反應就是將內容分解為更小的片段逐一講解。如果仍然行不通，就再回頭補充更多細節讓對方了解。

但人的心智與電腦運作方式不同，比起理解整體大意，要了解細小精確的規則並不容易，反而更難。人要讀懂電腦組合語言程式很難，儘管電腦剎那就能掌握並且執行，但世上最強大的電腦，還沒有聰明到可以安全駕車、在人行道漫步，或得出有趣的數學發現。

用一次學一個規則的方式學數學，就好比學習語言，先記憶單字和語言細則，再建立起片語和句子，最後學閱讀、寫作及會話。事實上，說母語的人往往察覺不到語言規則的存在，而是在更高的層面將語言內化，下意識地吸收語言規則和型態。比起學習語言本身，特意去學語言規則和型態反而更難。事實上，人類傾注心力想教電腦使用語言一直未能成功，顯示至今沒有人能用準確的規則，適當描述語言。

與其嘗試將主題切割成瑣碎的細則及片斷來教學，倒不如根本不教。

13. 問題和答案

通常在自行設法解決問題之後，人們更懂得欣賞、領會數學的理論。教數學時，我們很自然地先依邏輯順序，講解所有的技巧和答案，而後才舉例及提問，以為如此學生在遇到問題時，可以具備解題所需的技巧。

更好的方式則是把有趣未解的問題及未經講解的例子讓大家知道，無論學生、老師或任何人是否準備好回答這些問題。針對一個數學主題，最佳的心理次序跟最有效率的邏輯順序很不一樣。

身為數學家，我們都知道尚未解決的問題永無止盡。相反地，沒有把數學消化到一定程度的學生，卻把數學當作枯燥無聊的例行公事。

所以我們應該要讓數學變得更有意思，同時更像學生現實生活中可能遭遇的情境——不見得一定有答案。

14. 我們能做些什麼？

因人而定。

在分層體系裡，要單一組織或個人直接影響整個體制很不容易，但從部分著手可以間接影響整體。我將以在大專院校任教的數學家觀點，來談這個問題。

首先，大學數學系應該開發課程，讓學生有機會重新認識數學。補救課程很普遍，但成效有限：不管第一次學的時候懂不懂，重複上同樣的課程就是冗長乏味，這樣的課注定存在學生缺乏學習熱忱和自發性的問題。

數學系應該為大一新生和非數學本科系，但會用到一些數學的學生提供更多課程，從比較基本的題材教起，但不必重複已學過的主題。舉例來說，拓樸學、數論、對稱和群論、機率、有限數學、代數幾何、動力系統（混沌）、電腦繪圖以及線性代數、射影幾何、透視圖形、雙曲幾何和數理邏輯等的初階課程，就符合這樣的要求。

其二，我們要努力創造教育體系中，各個不同群體之間更佳的溝通管道；在專業領域中彰顯教授們在教育上的成就，而不是只侷限在課堂或系所；要為不同系所尋找彼此交換有趣想法的管道，例如不同系所的大學部課程主任們與系主任們之間的互訪；觀摩他人的課堂；在專業的會議上，安排更多針對教育相關課題的演講和特別小組，以及更多針對教育成就的獎項。

大學數學教育趨勢（Undergraduate Mathematics Education Trends）通訊，以及MAA FOCUS就是其中的兩個管道，有很多其它的出版品也刊載關於大學教育的文章。每年由國家數理研究委員會組織的系主任研討會，是另一個交流媒介，儘管其議程涵蓋範疇比教育還廣。然而，這些與我們所能建立的管道相比，仍然極為不足。

更為重要且困難的是搭起各階層間溝通的橋樑：對大專院校來說，與高中的溝通聯繫最為重要。溝通必須是雙向的：大專院校的教授們能從中小學教師身上，學到許多教學技巧。MSEB 以及他們協助催生的州立數學聯盟，就是這樣的管道。不過我們需要的是更多更大量的交流。

在一個成效明顯不彰的體制中，怎能期待位居最上層的資深教授指導後進做得更好？研究生和年輕教授往往比資深教授更會教數學，資深教授有時受制於教學的困境，安於一成不變的教學方式，放棄嘗試任何新的可能，即便他們排除萬難，課堂教學傑出，卻往往沒有參與整個體制的改善。

對教學真的感興趣的教授，往往受到其他教授的質疑，認為研究才是重點，關注教學意味在研究上沒有成就，資深教授有時會直截了當地告誡年輕一輩，不要浪費太多精力在教學，否則一輩子都無法升等。

我們勢必要體認到，對社會和所處機構做出重要的貢獻，有許多不同的方式。單用研究來評斷數學家是不智的，教育也是一項重要而且有挑戰性的工作，許多人投入並非出於必要，而是出於選擇。衡量一個人的標準是他的成就，而不是假設他將時間心力花在其它地方，可能會有的成果。

最急需改變的是專業的獎勵制度，我們需要的是比現況更好的制度。大學數學系常把教學的重要掛在嘴邊，卻只在聘任的最後階段，無法用研究品質定奪時，才將教學納入評比。

人會受群體的影響激勵，當大家一起討論教育，投入的心力越多，它對我們就益形重要。學術的文化可以改變，也已經在改變，改變的過程大都經由非正式的方式（如午餐閒聊），不是經由官方的決定。當時機成熟，而我認為現在就是數學教育改變的時候，各相關單位一點點的努力，就能促成巨大的改變。

數學教育所需的革新，將經由大專院校及各方的合作努力達成。好的數學想法會透過數學社群的非正式管道迅速散播，當我們更加關注教育，好的教育理念也會隨之快速遠播。

—本文翻譯者黃馨霈為中央研究院數學研究所助理—

延伸閱讀

1. K-12 數學教育的危機 — 伍鴻熙談美國中小學數學教育，《數學傳播季刊》第37卷3期（147號），14-24。
2. 趙潔，林開亮，國小學數學師資培訓教材《數的基礎理論》簡介 — 兼論伍鴻熙教授的教育工作，《數學傳播季刊》第37卷3期（147號），25-47。
3. 上網搜尋 geometry center，可以取得 Geometry and the Imagination 的課程講義以及其它相關資訊。