數學傳播 38卷4期, pp. 53-67

均值不等式: 從歷史到課堂

汪曉勤

早在西元前6世紀, 畢達哥拉斯學派已經知道算術中項、幾何中項和調和中項。畢達哥拉斯學派哲學家阿契塔 (Archytas, 鼎盛於西元前400～前365年) 在《論音樂》中定義了上述三類中項, 其中算術中項和幾何中項的定義與今天相同, 調和中項的定義爲: “如果在三項中, 第一項超過第二項的量等於第一項的若干部分, 第二項超過第三項的量等於第三項的同樣部分, 那麼我們就得到調和中項。”[1] 後來, 畢氏學派哲學家又相繼研究了另外七類中項, 尼可麥丘 (Nicomachus, 1世紀) 和帕普斯 (Pappus, 3世紀) 統一了各類中項的定義。設 , 在 a、b 中插入中項 x, 其中四類中項的定義見下表。

表1: 四類中項的定義

序	定 義	等價形式	名 稱	簡稱
1	$\dfrac{b-x}{x-a}=\dfrac{a}{a}=\dfrac{b}{b}$	$x=\dfrac{a+b}{2}$	算術中項	A
2	$\dfrac{b-x}{x-a}=\dfrac{b}{x}\Big[=\dfrac{x}{a}\Big]$	$x=\sqrt{ab}$	幾何中項	G
3	$\dfrac{b-x}{x-a}=\dfrac{b}{a}$	$x=\dfrac{2ab}{a+b}$	調和中項	H
4	$\dfrac{b-x}{x-a}=\dfrac{a}{b}$	$x=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$	反調和中項	C

古希臘數學家沒有研究過我們所熟悉的另一類中項 —— 均方根。若 x^2 是 a^2 和 b^2 的算術中項, 則稱 x 爲 a 和 b 的均方根: $x=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, 簡記爲 R。

已知某兩類中項, 則其他各類中項均可以用它們來表示, 見表2。從表 2 可見, 若 $b>a>0$, 則根據兩類中項的大小關係, 即可推得所有五類中項之大小關係:

$$H<G<A<R<C \tag{1}$$

本文的目的是從古代兩河流域、希臘和中國的數學史材料中尋找上述均值不等式的推導方法。在第 1 節, 我們從古巴比倫的“和差術”出發推導均值不等式; 在第 2 節, 我們受巴比倫泥

表 2: 五類中項的大小關係

已知	H	G	A	R	C
H,G	$\frac{G^2}{H}\left(\frac{H}{G}\right)^2$	$\frac{G^2}{H}\left(\frac{H}{G}\right)$	$\frac{G^2}{H}$	$\frac{G^2}{H}\sqrt{2-\left(\frac{H}{G}\right)^2}$	$\frac{G^2}{H}\left[2-\left(\frac{H}{G}\right)^2\right]$
H,A	$A\left(\frac{H}{A}\right)$	$A\sqrt{\frac{H}{A}}$	A	$A\sqrt{2-\frac{H}{A}}$	$A\left(2-\frac{H}{A}\right)$
H,R	H	$H\sqrt{M}^{*}$	MH	$\left(\frac{R}{H}\right)H$	$\frac{1}{M}\left(\frac{R}{H}\right)^2H$
H,C	H	$H\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{C}{H}\right)}$	$H\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{C}{H}\right)$	$H\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{C}{H}\right)\frac{C}{H}}$	$H\left(\frac{C}{H}\right)$
G,A	$A\left(\frac{G}{A}\right)^2$	$A\left(\frac{G}{A}\right)$	A	$A\sqrt{2-\left(\frac{G}{A}\right)^2}$	$A\left[2-\left(\frac{G}{A}\right)^2\right]$
G,R	$\frac{G}{\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{R^2}{G^2})}}$	G	$G\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{R^2}{G^2})}$	$G\left(\frac{R}{G}\right)$	$\frac{G(\frac{R}{G})^2}{\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{R^2}{G^2})}}$
G,C	$\frac{1}{N}\left(\frac{G}{C}\right)^2C^{**}$	$\left(\frac{G}{C}\right)C$	NC	$C\sqrt{N}$	C
A,R	$A\left[2-\left(\frac{R}{A}\right)^2\right]$	$A\sqrt{2-\left(\frac{R}{A}\right)^2}$	A	$A\left(\frac{R}{A}\right)$	$A\left(\frac{R}{A}\right)^2$
A,C	$A\left(2-\frac{C}{A}\right)$	$A\sqrt{2-\frac{C}{A}}$	A	$A\sqrt{\frac{C}{A}}$	$A\left(\frac{C}{A}\right)$
R,C	$\frac{R^2}{C}\left[2-\left(\frac{C}{R}\right)^2\right]$	$\frac{R^2}{C}\sqrt{2-\left(\frac{C}{A}\right)^2}$	$\frac{R^2}{C}$	$\frac{R^2}{C}\left(\frac{C}{R}\right)$	$\frac{R^2}{C}\left(\frac{C}{R}\right)^2$

$^{*}\ M=\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{1+8(\frac{R}{H})^2}\right),\ 1<M<\frac{R}{H}.$ $^{**}\ N=\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{1+8(\frac{G}{C})^2}\right),\quad \frac{G}{C}<N<1.$

版上的梯形分割問題的啟發, 獲得均值不等式的幾何模型; 在第 3 節, 我們根據《幾何原本》中的有關命題, 獲得均值不等式的幾何證明; 在第 4 節, 我們借鑒阿基米德 (Archimedes, 前 287∼前 212) 著作的評注者的方法獲得均值不等式的比例證法; 第5節證明, 均值不等式實爲芝諾多魯斯 (Zenodorus, 約西元前2 世紀) 有關等周命題的特殊情形; 在第6節, 我們進一步改進了帕普斯的幾何作圖法; 在第7節, 我們利用趙爽“勾股圓方圖注” 中的有關圖形來證明均值不等式; 在最後的第8節, 我們借助劉徽證明 “勾股容方” 公式所用的圖形來研究均值不等式。

　　爲方便解說, 本文將相關文本內容翻譯成現代數學符號; 文中所有圖形均依據有關文本之原意重繪而成。

一、和差之術

雖然我們在兩河流域泥版上沒有看到有關均值不等式的內容, 但兩個正數的算術中項和幾何中項之間的關係卻已爲當時的祭司所熟知。古巴比倫數學泥版上含有大量的二元問題: 已知 $a+b$ 和 $f(a,b)(a>0,b>0)$, 求 a 和 b, 其中 $f(a,b)$ 具有 $pa+qb(p^2\neq q^2)$ (如泥版 VAT 8389), ab (如泥版 YBC 4663), a^2+b^2 (如泥版 BM 13901) 等形式。祭司充分利用了以下恒等式

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=a \tag{2}$$

$$\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=b \tag{3}$$

進行換元, 這就是所謂的 "和差術" [2]。例如, 若已知 $a+b$ 和 ab, 則利用 (2) 和 (3) 得

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab \tag{4}$$

若已知 $a+b$ 和 a^2+b^2, 則利用 (2) 和 (3) 得

$$2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]=a^2+b^2 \tag{5}$$

從而各求得 $\dfrac{a-b}{2}$, 進而求得 a 和 b。由 (4) 和 (5) 馬上可以得到不等式

$$ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leq\frac{a^2+b^2}{2} \tag{6}$$

此即 $G<A<R$。

二、梯形分割

在古巴比倫時期的數學泥版上, 有許多三角形和梯形的分割問題。其中有兩類典型的問題: 用平行於底邊的直線將三角形分割成若干部分, 每一部分 (梯形或三角形) 的高相等; 用平行於上下底的直線將梯形分成滿足條件的兩個部分。

數學泥版 YBC 4675 (圖1) 如下問題:“梯形上底爲7, 下底爲17, 兩腰分別爲310和290, 面積爲3600。用平行於上、下底的直線將梯形分成面積相等的兩部分, 問: 等分線有多長?” [3] 如圖2所示, 設梯形上、下底分別爲 a 和 b, 兩腰分別爲 l_1 和 l_2, 梯形等分線長爲 d, l_1 被分割成 p、q 兩段, l_2 被分割成 u、v 兩段。雖然祭司使用了錯誤的梯形面積公式

$$A=\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{l_1+l_2}{2}\right)$$

但所得梯形等分線長度公式卻是正確無誤的:

$$d=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

圖1: 數學泥版 YBC 4675
(採自文獻[3]之Plate 26)

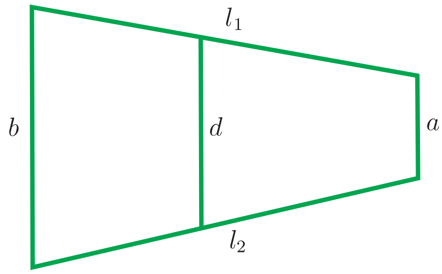

圖 2: 梯形二等分問題

祭司已經知道, 用平行於一條底邊的一組平行線將三角形分割成等高的部分 (三角形和梯形), 那麼, 那些平行線段依次構成了等差數列。例如, 泥版 YBC 4608 的第 5 題大意爲: 六兄弟分直角三角形土地, 土地的面積和長度 (長直角邊) 已知, 各部分的長度 (梯形或三角形的高) 相等, 求各份土地的面積之差 [3], 如圖 3 所示。祭司所得的 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 構成等差數列。由此, 我們不難推斷, 祭司知道這樣的事實: 梯形中位線是上下底的算術中項。

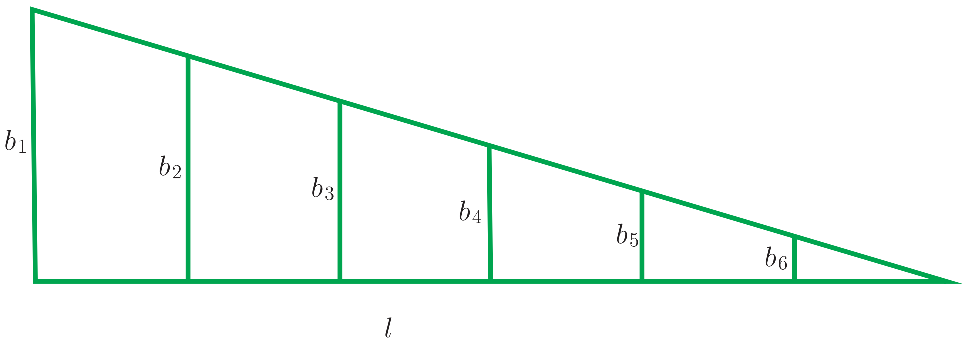

圖3: 泥版 YBC 4608上的三角形分割問題

這讓我們很自然地想到了在同一個梯形中作出不同中項的問題。爲便於作圖, 我們選擇特殊的直角梯形來解決這一問題。如圖 4, 直角梯形 $ABCD$ 的上下底分別爲 $AD=a$, $BC=b$ $(a<b)$, 高爲 $AB=a+b$。在 AB 上取點 E, 使得 $AE=AD$, 過 E 作平行於 AD 或 BC 的直線, 交 CD 於點 F, 易證: $EF=\dfrac{2ab}{a+b}$, EF 恰好過梯形對角線 AC 和 BD 的交點 I。延長 BA 和 CD 交於點 O, 以 OB 爲直徑作半圓, 延長 DA, 交半圓於點 K, 再以 O 爲圓心、OK 爲半徑作圓弧, 交 OB 於 G, 過 G作 AD或 BC 的平行線, 交 CD 於 H。易證: $GH=\sqrt{ab}$, 且梯形 $AGHD$ 和梯形 $GBCH$ 相似。

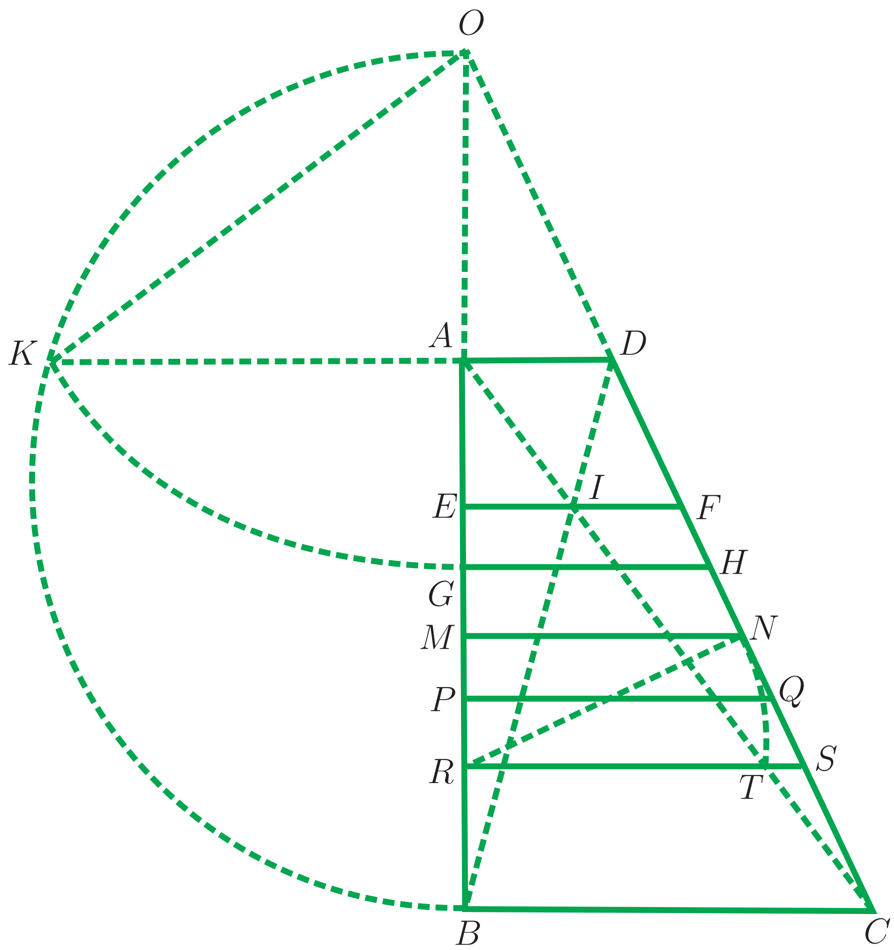

圖 4: 五類中項的梯形模型

取 AB 和 CD 的中點 M 和 N, 得梯形的中位線 MN, $MN=\dfrac{a+b}{2}$。在 BM 上取點 R, 使得 $BR=AD=a$, 過 R 作 AD 或 BC 的平行線, 交 CD 於 S。易證: $RS=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$。以 R 爲圓心、RN 爲半徑作圓弧, 交 RS 於點 T, 過 T 作 RS 的垂線, 交 CD 於 Q, 過 Q 作 AD 或 BC 的平行線, 交 AB 於 P。易證:

$$PQ=RT=RN=\sqrt{RM^2+MN^2}=\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

由 $AD<EF<GH<MN<PQ<RS<BC$, 即得五類中項的大小關係 (1)。

三、矩形之變

古希臘數學家似乎並沒有對各類中項的大小進行比較, 但他們已經研究過部分中項的幾何作圖法以及它們之間的數量關係。歐幾裡得 (Euclid, 前325年~前265年) 在《幾何原本》卷六

命題13中給出了兩條已知線段之間的幾何中項的作圖法。如圖5, 以 AB 爲直徑作半圓 ADB, 則 CD 即爲 AC 和 CB 之間的幾何中項。

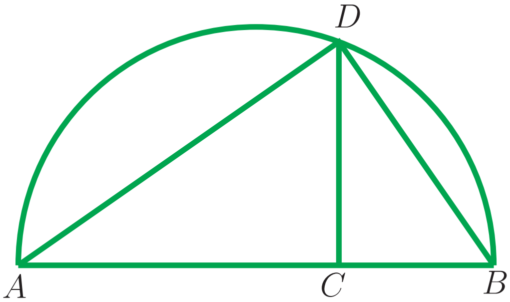

圖5：《幾何原本》卷六命題13中的作圖法

《幾何原本》卷二命題5實際上給出了算術中項與幾何中項之間的關係: “將一條線段二等分, 再分成不相等的線段, 則由二不相等的線段構成的矩形與兩個分點之間一段上的正方形之和等於原線段一半上的正方形。”[4] 如圖 6, 設 $BD=a$, $AD=b$, C 是線段 AB 的中點, 在 CB 上作正方形 $CBEF$, 過 D 作 AB 的垂線, 分別交 FB 和 FE 於 H 和 K, 過 H 作 AB 的平行線, 分別交 CF 和 BE 於 G、N。過 A 作 AB 的垂線, 交直線 GN 於 M。易知:

$$\begin{aligned} \square AH = \square AG + \square CH = \square BG + \square HE \\ \Rightarrow \quad \square AH + \square GK = \square CE \end{aligned}$$

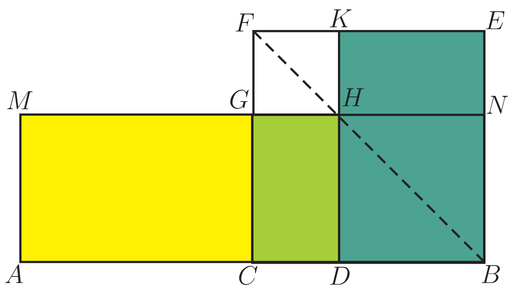

圖6：《幾何原本》卷二命題5中的作圖法

這就是:

$$ab+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \tag{7}$$

(7) 與 (4) 等價。歐幾裡得的證明思路就是“將矩形化爲等積的矩尺形”。如果說, 歐幾裡得的圖 6 還不夠直觀的話, 那麼從圖 7 中則更能清楚地得出等式 (7)。

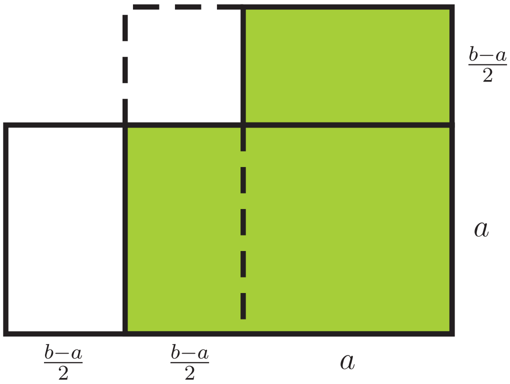

圖 7：《幾何原本》卷二命題 5 的另一種證明

由 (7) 馬上可以得到不等式

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \tag{8}$$

即 $G < A$。

四、比例之用

古希臘數學家阿基米德在證明球體積公式時, 利用了如下命題: “設 a、b 是兩條已知線段, $a < b$。在 a、b 之間插入兩個算術中項 c 和 d (即 a、c、d、b 構成等差數列), 則 $a^3 : c^3 < a : b$。” [5]

西元 6 世紀, 希臘數學家歐多修斯 (Eutocius) 對上述命題作了證明: 設 x 和 y 滿足 $a : c = c : x = x : y$, 則 $(c-a) : a = (x-c) : c = (y-x) : x$, 因 $a < c < x$, 故 $c - a < x - c < y - x$。又因 $c - a = d - c = b - d$, 故 $d - c < x - c$, $b - d < y - x$。於是得 $x > d$, $y > b$。因此, $a^3 : c^3 = a : y < a : b$。

很難想像阿基米德會對更簡單的情形視而不見: 設 a、b 是兩條已知線段, $a < b$, A 為 a、b 的算術中項, 則 $a^2 : A^2 < a : b$, 而這正等價於均值不等式 $G < A$。因此, 我們有理由相信, 阿基米德對於均值不等式是了然於心的。借鑒歐多修斯的方法, 我們發現了均值不等式十分簡單的兩種證明。

方法一: 設 $a < b$, a、b 的算術中項為 A, 幾何中項為 G, 則因 $A - a = b - A$, $a < A$, 故

$$\frac{A-a}{a} > \frac{b-A}{A}$$

此即

$$\frac{A}{a} > \frac{b}{A}$$

故得 $G < A$。

方法二: 設 $a<b$, 算術中項爲 A, 幾何中項爲 G, 則因 $\dfrac{G}{a}=\dfrac{b}{G}$, 故

$$\frac{G-a}{a}=\frac{b-G}{G}$$

由 $a<G$, 得 $G-a<b-G$, 故 $G<A$。

五、等周問題

在阿基米德之後, 獲得與均值不等式等價結果的數學家是芝諾多魯斯。他寫了一本名爲《論等周圖形》的書, 專門研究等周問題。在書中, 他給出了許多命題, 其中一個是:“在邊數相同、周長相等的所有多邊形中, 等邊且等角的多邊形的面積最大。”[1]

在四邊形情形中, 我們考慮長爲 b、寬爲 a $(a<b)$ 的矩形以及與之等周的正方形 (邊長爲 $\dfrac{a+b}{2}$), 即有不等式 (8) 成立。

爲了證明上述命題, 芝諾多魯斯運用了兩個引理, 其中第一個爲: “在等底等周的所有三角形中, 等腰三角形的面積最大。”[1]

如圖 8, $BD=a$, $AD=b$ $(b>a)$, $AC=BC=\dfrac{a+b}{2}$。延長 AC 至 E, 使 $AC=CE$, 連接 DC, DE。因 $AD+DE>AE=AC+BC=AD+BD$, 故 $DE>BD$。於是, 在 $\triangle CBD$ 和 $\triangle CDE$ 中, $\angle ECD>\angle BCD$, $\angle ECD>\frac{1}{2}\angle BCE=\angle CAB$。因此, 過點 C 作 AB 的平行線, 必與 AD 的延長線相交於點 F。連接 BF, 即得 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABF}>S_{\triangle ABD}$。

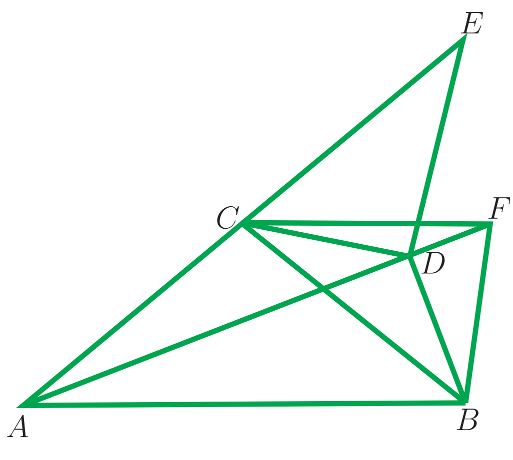

圖8: 等底等周的三角形

若 $\triangle ADB=90°$, 則得

$$\frac{1}{2}ab<\frac{1}{2}\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\sin(\angle ACB)<\frac{1}{2}\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2$$

於是得不等式 (8) 。

六、推陳出新

西元 3 世紀末, 古希臘亞歷山大時期最後一位重要的幾何學家帕普斯在其《數學彙編》卷三給出了更多中項的幾何作圖法[6]。如圖9, 設 $BC=a$, $AB=b$, 過點 A 作 AB 的垂線 DE, 並在其上取點 D 和 E, 使得 $AD=AE$, 過點 C 作 AB 的垂線, 交 BD 於 F, 連接 EF, 交 AB 於 G。則 BG 就是 AB 和 BC 之間的調和中項。事實上, 由上述作圖可得:

$$AB:BC=AD:CF=AE:CF=AG:CG=(AB-BG):(BG-BC).$$

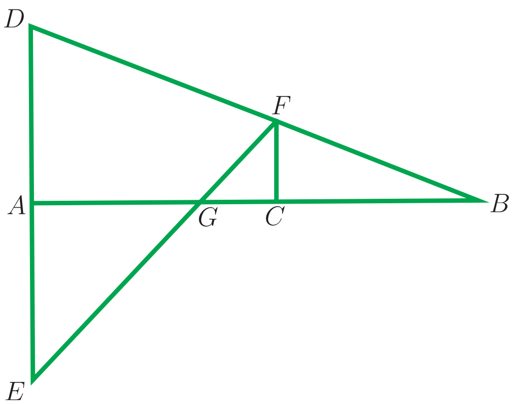

圖9: 帕普斯的調和中項作圖法

圖10: 帕普斯《數學彙編》拉丁文版 (1588年) 書影 (采自文獻[6])

但帕普斯並不滿足於單個中項的作圖, 他希望能夠在同一幅圖形中作出不同的中項。在《幾何原本》卷二命題13的基礎上, 帕普斯在同一個半圓上作出了三類中項。如圖11, 以 AB 為直徑作半圓 ADB, $CD\perp AB$, OD為半徑, $CE\perp OD$, 則 OD、CD、DE 分別為 AC 和 CB 之間的算術、幾何和調和中項。

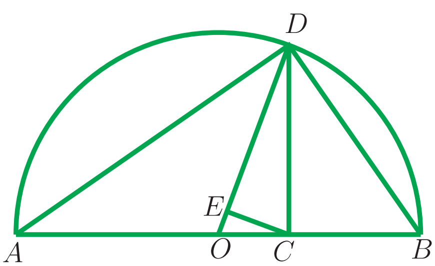

圖 11 : 帕普斯三類中項的作圖法

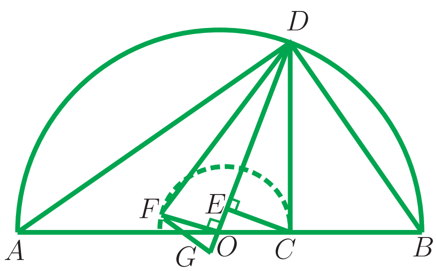

圖 12 : 五類中項的作圖法

在帕普斯作圖法的基礎上, 我們可以進一步作出 AC 和 CB 之間的所有五類中項。如圖 12, 以 O 爲圓心, OC 爲半徑, 作圓, 過 O 作 OD 的垂線, 交圓於 F, 連接 DF; 過 F 作 DF 的垂線, 交 DO 的延長線於 G。於是, DF 和 DG 分別爲 AC 和 CB 之間的均方根和反調和中項。設 $CB=a$, $AC=b$。因 $DE<DC<OD<DF<DG$, 故得均值不等式 (1)。

另一方面, 如果我們對於帕普斯的調和中項作圖法進行改進, 同樣可以實現他的在同一幅圖中表示不同中項的想法。如圖 13, 設 $AC=a$, $AB=b$, 以 CB 爲直徑作圓 O, 過點 A 作圓 O 的切線 AD, D 爲切點, 連接 OD。作 $DE\perp AB$, 垂足爲 E。在 OB 上取點 F, 使得 $OF=OE$, 作 $OG\perp AB$, 交圓 O 於 G, 連接 AG、GF。易證:

$$AD=\sqrt{ab},\quad AO=\frac{a+b}{2},\quad AE=\frac{2ab}{a+b},\quad AF=\frac{a^2+b^2}{a+b},\quad AG=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

考慮到 $DE\perp AE$, $OD\perp AD$, $OA\perp OG$, $AG\perp GF$, 故有

$$AC<AE<AD<AO<AG<AF<AB$$

這就是均值不等式 (1)。

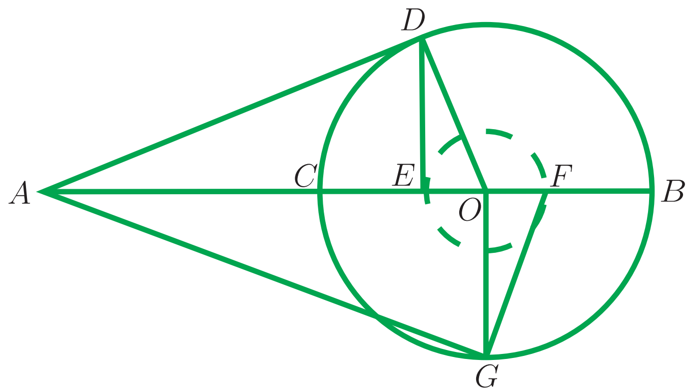

圖13：帕普斯作圖法的改進

七、勾股弦圖

西元3世紀, 中國數學家趙爽“負薪餘日, 聊觀《周髀》”。他在給《周髀算經》“勾股圓方圖”作注時, 給出圖14所示的“大方圖”。趙爽寫道:

“以圖考之, 倍弦實, 滿外大方, 而多黃實。黃實之多, 即勾股差實。以差實減之, 開其餘, 得外大方。大方之面, 即勾股並也。”[7]

如圖14, 設直角三角形 EBF 的勾、股、弦分別爲 a、b、c, 則以 c 爲邊的正方形由四個全等的紅色直角三角形和一個邊長爲 $b-a$ 的黃色小正方形構成, 故上述正方形的兩倍就是由八

個全等的紅色直角三角形和兩個黃色小正方形構成。而外大方則是由八個紅色直角三角形和一個黃色小正方形構成。因此有:

$$(a+b)^2 = 4ab + (b-a)^2$$
$$(a+b)^2 = 2c^2 - (b-a)^2 = 2(a^2+b^2) - (b-a)^2$$

因此, 可得不等式

$$4ab \le (a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$$

這就是不等式 (6)。

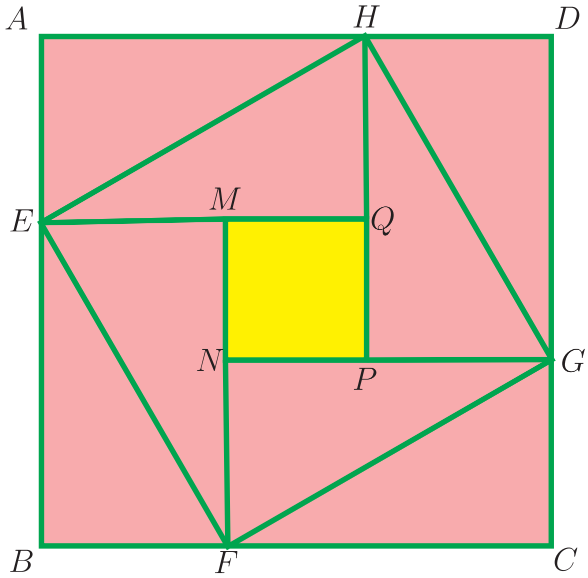

圖14：趙爽的大方圖

八、勾股容方

西元 263 年, 中國數學家劉徽爲《九章算術 》作注。在注中, 他證明了"勾股容方" (即直角三角形內接正方形邊長) 公式[8]。設直角三角形的直角邊爲 a 和 b, 則與直角三角形具有公共直角的內接正方形邊長爲

$$d = \frac{ab}{a+b}$$

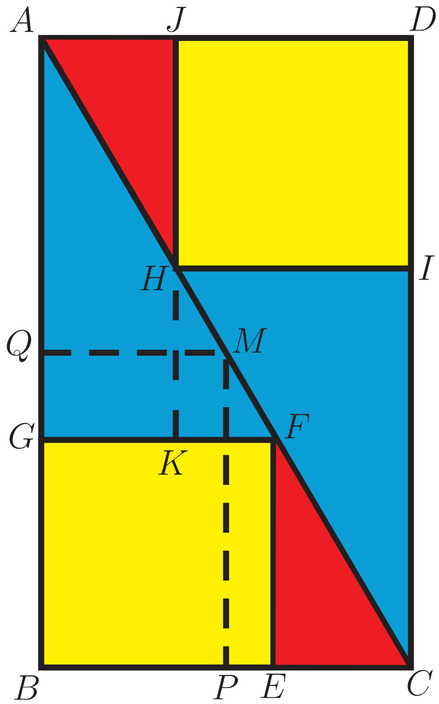

圖15：劉徽的勾股容方圖

如圖15, 在矩形 $ABCD$ 中, $BC=a$, $AB=b$, $a<b$。正方形 $GBEF$ 和 $HIDJ$ 分別內接於直角三角形 ABC 和 CDA, JH 的延長線交 GF 於 K, M 是 AC 的中點, MQ 和 MP 分別垂直於 AB 和 BC。於是,

$$HK=b-\frac{2ab}{a+b},\qquad KF=\frac{2ab}{a+b}-a$$

因 $AB>BC$, 故 $HK>KF$, 於是有

$$b-\frac{2ab}{a+b}>\frac{2ab}{a+b}-a$$

由此得不等式

$$\frac{2ab}{a+b}<\frac{a+b}{2}$$

或即

$$\Big(\frac{2ab}{a+b}\Big)^2<ab<\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2 \tag{9}$$

故得均值不等式 $H<G<A$。

另一方面, 設內接於直角三角形 ABC、且與直角三角形具有一個公共直角的長方形的長爲 x, 則其面積爲

$$S(x)=x\Big(b-\frac{bx}{a}\Big)=-\frac{b}{a}\Big(x-\frac{a}{2}\Big)^2+\frac{ab}{4}$$

易知, 當 $x=\dfrac{a}{2}$ 時, $S(x)$ 最大, 亦即 $QBPM$ 是面積最大的內接長方形, 其面積爲 $\dfrac{1}{4}ab$。因此有:

$$\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2<\frac{1}{4}ab \tag{10}$$

由此同樣可得不等式 (9)。

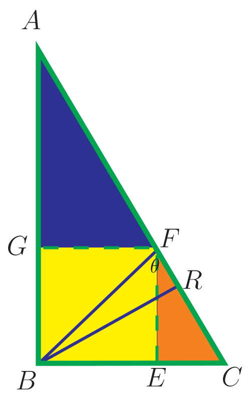

圖 16

在劉徽的勾股容方圖中, 如果我們連接 BF, 並且作 $BR\perp AC$, 垂足爲 R, 如圖 16 所示。易知

$$BF=\frac{\sqrt{2}ab}{a+b},\quad BR=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

設 $\angle BFR=\theta$, 則有

$$\sin\theta=\frac{BR}{BF}=\frac{\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\dfrac{\sqrt{2}ab}{a+b}}=\frac{\dfrac{a+b}{2}}{\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}}=\frac{\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}}{\dfrac{a^2+b^2}{a+b}},$$

$$\sqrt{1-\cot^2\theta}=\frac{\sqrt{ab}}{\dfrac{a+b}{2}}=\frac{\dfrac{2ab}{a+b}}{\sqrt{ab}}.$$

因 $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, 故 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sin\theta<1$, $0<\sqrt{1-\cot^2\theta}<1$, 由此即得均值不等式 (1)。

九、結語

當我們帶著“證明均值不等式”的目的去考察古代兩河流域、古希臘和古代中國的少量數學文獻時, 我們有一種 “有心栽花花不發, 無心插柳柳成蔭”、“踏破鐵鞋無覓處, 得來全不費工夫”

的感覺。儘管這些歷史文獻的主題並非均值不等式, 但它們無意中都爲均值不等式提供了精彩的證明方法或幾何模型。沿著古人開闢的蹊徑繼續前行, 深入探究, 我們往往可以推陳出新, 有所創獲; 那些歷史文獻也就不再是過時的、冷冰冰的陳列品, 而是鮮活的、生動的、充滿教育意蘊的思想養料。

本文所述, 不過滄海一粟而已。上下數千年, 數學的歷史積澱了先哲們的思想精華; 數學的歷史是一座寶藏, 從中可以發掘出取之不盡、用之不竭的教學資源。面對這座寶藏, 我們難免發出 “太陽底下無新事” 之感歎; 深入這座寶藏, 我們將變得明智而謙卑。有理由相信, 關於均值不等式, 更多我們在課本上看不到的思想和方法等待我們進一步去發掘。

那麼, 從數學史材料中衍生出來的均值不等式的證明方法, 對均值不等式的教學究竟有何意義?

(1) 利用歷史材料, 我們可以再現均值不等式的 “源頭”, 並將該 “源頭” 作爲弗賴登塔爾 (H. Freudenthal, 1905～1990) 所說的 “數學現實”。兩河流域的和差術與梯形分割問題、古希臘的等周問題、古代中國數學家的弦圖都可以充當均值不等式的 “源頭”。

(2) 薩頓 (G. Sarton, 1883～1956) 曾經告訴我們, 解釋數學的 “人性” 乃是數學史家的職責之一。當我們將均值不等式放置在歷史背景中時, 也就將 “人” 的元素加入其中了, 從而使該知識點變得人性化。兩河流域的祭司、古希臘數學家歐幾裡得、芝諾多魯斯、帕普斯、中國數學家劉徽、趙爽等, 都與均值不等式有著不解之緣。無疑, 數學史能使均值不等式的教學更加平易近人。

(3) 歷史材料爲我們提供了均值不等式的不同表徵方式, 尤其是幾何表徵, 促進了學生的理解。

此外, 數學史的另一些教育價值, 如爲學生提供探究機會[9]、提供了大量的問題和方法[10]、拓寬學生的思維[11]、讓學生感受數學文化的多元性[9][10] 等等, 在均值不等式教學中, 也完全可以實現。

審稿人對本文提出了寶貴的意見和建議, 特此致謝。

參考文獻

1. Heath, T. L. (1921). *A History of Greek Mathematics.* Oxford: Oxford University Press.
2. van der Waerden, B. L. (1983). *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations.* Berlin: Springer-Verlag.
3. Neugebauer, O. and Sachs, A. (1945). *Mathematical Cuneiform Texts.* New Haven: American Oriental Society.
4. 歐幾裡得 (1990). 幾何原本 (蘭紀正, 朱恩寬譯). 西安: 陝西科學技術出版社。
5. Heath, T. L. (1959). *The Works of Archimedes.* New York: Dover Publications.
6. Pappi Alexandrini (1588). *Mathematicae Collectiones.* Pisauri: Apud Hieronymum

Concordiam, 9-12.
7. 趙爽 (1994).《周髀算經》注 (卷上), 見郭書春主編, 中國科學技術典籍通匯 — 數學卷(一), 鄭州: 河南教育出版社, 11-12。
8. 郭書春 (2004). 匯校九章算術. 瀋陽/臺北: 遼寧教育出版社/九章出版社。
9. Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11(2): 3-6.
10. Fauvel, J., van Maanen J. (2000). *History in Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 262-264; 272-273.
11. Gulikers, I., Blom, K. (2001). A historical angle: A survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, **47**: 223-258.

—本文作者任教華東師範大學數學系—