數學傳播 38卷4期, pp. 42-52

楊武之的九金字塔數定理

林開亮 · 張愛仙

楊武之 (字克純, 1896~1973) 先生是近代中國傑出的數學教育家, 在他擔任清華大學數學系主任期間, 先後培養出了華羅庚、柯召、閔嗣鶴等中國數論界的棟樑之才, 而他的長子楊振寧更是歷史上首次摘取諾貝爾獎桂冠的華人。楊武之先生在教育方面的貢獻由此可見一斑, 事實上許多文獻 (例如[11]) 都詳細介紹過作爲數學教育家的楊武之。應該強調, 在他的職業生涯中, 楊武之先生首先是一個數學家, 而且是近代中國一位重要的數論先驅, 因此有必要瞭解一下他的工作, 特別是那些可以寫進歷史的工作。

本文將詳細介紹楊武之先生最傑出的數學工作, 即九金字塔數定理。楊先生的這個成就在以往的歷史文獻中常常被提及, 其結果的趣味性是顯而易見的, 但似乎很少有人關注其證明。筆者最近研讀了楊武之先生的原始論文[9], 發現這個證明事實上很初等, 幾乎是每個略懂一點數論基本概念 (同餘) 的高中生就可以理解的, 因此這裏整理出一個略微簡化了的版本 (同時更正了[9]中的一些印刷錯誤) 分享給感興趣的讀者。

在介紹楊武之的證明之後, 我們將介紹該定理的後續進展, 包括 G. L. Watson[7] 在1952年得到的八金字塔數定理以及楊振寧、鄧越凡 [11] 在 1994 年提出的一個相關猜想。事實上, 古老的五金字塔數猜想至今尚未得到證明, 希望本文能激發讀者對這個問題的興趣。

1. Gauss 三角形數定理

在介紹楊武之的九金字塔數定理之前, 我們先來看歷史上一個著名的類似定理: 即所謂的 Gauss 三角形數定理。

Gauss 在 1796 年 7 月 10 日的數學日記裏有這樣一條:

$$EUREKA. \qquad number = \triangle + \triangle + \triangle.$$

這條日記中 $\triangle$ 代表某個三角形數, 即形如 $n(n+1)/2$ 的數。而 EUREKA (音譯爲“尤里卡”) 則是阿基米德洗澡時發現浮力定律後沖到大街上的歡呼, 即“發現了! ”。因此整個日記是說, Gauss 發現了每個自然數都可以寫成三個三角形數之和。Gauss 的證明可見《算數探索》第

293目 (中譯本[3]第257頁)。[1]

2. 楊武之九金字塔數定理

楊武之先生在 1928 年的博士論文 [8] 中證明了一個類似的結果:

定理：任何一個正整數都可以寫成九個金字塔數的和。

所謂金字塔數, 就是形如 $n(n+1)(n+2)/6$ 的數。楊武之的這個結果可以看作是 Gauss 三角形數定理的一個三維版本, 是因爲金字塔數正是三角形數的三維推廣。恰好有一則故事說明了這一點, 故事的主人翁是當代著名的美籍印裔代數與數論專家、普林斯頓大學的數學教授 Manjul Bhargava[1]:

> 我一直喜歡數學。兒時我喜歡形狀和數字。我最早的數學記憶來自於八歲時將橙子堆成金字塔形狀 (專門用於家用榨汁機!) 的事。我想知道, 堆出最低層每邊有 n 個橙子的一個金字塔需要多少個橙子? 我思考了很久, 最終確定答案是 $n(n+1)(n+2)/6$ 個橙子。對我而言, 那是非常有趣和興奮的時刻! 對任意大小的金字塔, 我能夠預言出需要多少個橙子, 對此我很歡喜。

細心的讀者會發現, Manjul Bhargava 八歲時的發現可以用一個簡潔的公式來表述:

$$1+3+\cdots+n(n+1)/2=n(n+1)(n+2)/6,$$

而這其實就是組合數學中著名的朱世傑恒等式[2]的一個特殊情形。也正是由於這個原因, 形如 $n(n+1)(n+2)/6$ 的數被稱爲金字塔數 (正如形如 $n(n+1)/2$ 的數被稱爲三角形數一樣)。因此, 我們可以毫不誇張地說, 楊武之的金字塔數定理是一個堪與 Gauss 的三角形數定理相媲美的結果。當然, 在下述意義下, 楊武之的金字塔數定理還是要略遜一籌: Watson 在1952

---

[1]聯繫於此, 應該提及的是, Fermat 曾經猜測: 每個自然數都可以寫成三個三角形數之和, 四個正方形數 (即完全平方數) 之和, 五個正五邊形數之和, 如此等等。繼 Euler 的準備工作之後, Lagrange 在 1770 年證明了 Fermat 關於平方數的斷言, 而一般性的結論則在 1815 年爲 Cauchy 首次證明。值得一提的是, 1987 年, Nathanson [4] (也見[5]) 發現了 Cauchy 定理的一個初等證明, 只需要用到 Gauss 的三角形數定理以及 Pepin 與 Dickson 所構造的一個表格。

[2]朱世傑(1249～1314), 元代數學家, 著有《算學啟蒙》與《四元玉鑒》。美國科學史家薩頓 (George Sarton) 在其著作《科學史導論》中對朱世傑有下述評價: "中國數學家朱世傑確實是他的民族、他的時代、以至於所有時代中最偉大的數學家之一。" 朱世傑恒等式有許多, 這裏所指的是其中最簡單的一個:

$$\binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}+\cdots+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m+1}.$$

另一個略微不平凡的朱世傑恒等式 (又稱爲朱-范德蒙 (Chu-Vandermonde) 恒等式) 是下述

$$\sum_{i\geq 0}\binom{r}{i}\binom{s}{p-i}=\binom{r+s}{p},$$

此等式在近代數學中的一個有趣應用可見: Doron Zeilberger, Chu's 1303 Identity Implies Bombieri's 1990 Norm-Inequality (Via an Identity of Beauzamy and Dégot), *The American Mathematical Monthly*, Vol.**101**, No. 9 (Nov., 1994), pp. 894-896.

年將九金字塔數定理改進爲八金字塔數定理 — 即每個自然數可以寫成八個金字塔數之和; 而 Gauss 的結果已經沒有改進的餘地了 (容易看出, 並非每個自然數都可以寫成兩個三角形數之和)。

事實上, 早在1850年英國的 F. Pollock 就曾猜想, 每個自然數可以寫成五個金字塔數之和, 這個猜測至今尚未證明, 而 Watson 的八金字塔數定理仍是記錄保持者。1994 年, 楊振寧 (楊武之長子) 與鄧越凡 [11] 利用電腦測試, 提出了一個更強的猜想: 每個充分大的自然數 (只要大於 343867) 都可以表成四個金字塔數之和。

照此看來, 也許讀者要認爲楊武之的結果已經沒有任何意義了, 因爲 Watson 的結果已經後來居上了。但首先要考慮到, 在評價一個人的成就時, 我們必須把他放在當時的歷史中。事實上, 自 1850年 F. Pollock 提出五金字塔數猜想之後, 這方面僅有的工作是 E. Maillet 在 1896 年得到的下述結果: 任何一個大於 19272 的整數都可以寫成十二個金字塔數之和。相對於這個結果, 楊武之1928年得到的九金字塔數絕對是邁出了一大步。其次, 我們還要考慮到這個結果對後人的影響, 與 Gauss 的三角形數定理以及更一般的 Cauchy 多邊形數定理一樣, 楊武之的九金字塔數定理同屬於所謂的“堆壘數論” (即“加性數論”) 領域, 這個領域最著名的一個問題是華林 (Waring) 問題, 這是楊武之的導師 L. E. Dickson 最感興趣的課題之一。可以想見, 楊武之的這一個優美結果必定引發了中國數學家 (特別是華羅庚) 對華林問題等堆壘數論問題的興趣, 並最終做出一系列卓越的工作。

3. 九金字塔數定理的證明

就本文而言, 我們更關心的是楊武之九金字塔數定理的證明而不是結果本身。數學家靠定理立足, 而定理則靠證明立足。如果要真正瞭解一個數學家的工作, 特別對其最有代表性的工作, 我們必須深入體驗其證明。本節我們將給出楊武之的證明。爲此, 我們需要下述三個引理。

引理 1 是著名的三平方和定理, 歸功於 Legendre 和 Gauss (Gauss 發現 Legendre 論證中的漏洞並完善了證明, 見[3])。

引理 1 (Gauss-Legendre (1798))**.** 一個正整數可以表爲三個平方數之和當且僅當它不是一個形如 $4^l(8k-1)$ 的數。

註記 1. 證明可見 [3] 或 [6], 並且由三平方和定理可以立即推出 Gauss 三角形數定理, 事實上此處只需用到引理1的一個推論: 每一個模 8 餘 3 的自然數可以寫成三個平方數之和。Gauss 在《算術探索》中對此給出了一個簡單的推導, 我們援引如下 (見[3, p. 257]) :

> 對任意的自然數 M, 考慮 $8M+3$, 根據三平方和定理, $8M+3$ 可以寫爲三個平方數之和:
>
> $$8M+3=X^2+Y^2+Z^2.$$

容易看出 X, Y, Z 都是奇數, 從而令 $X = 2x+1, Y = 2y+1, Z = 2z+1$, 就有

$$M = \frac{1}{2}x(x+1) + \frac{1}{2}y(y+1) + \frac{1}{2}z(z+1),$$

即 M 表成了三個三角形數之和。

對於推導楊武之的九金字塔數定理而言, 我們也只需要用到引理1的一個推論: 任何一個模 4 餘 1 或 2 的正整數可以表成三個平方數之和。

注意, 對 $f(x) = (x^3-x)/6$ 有, $f(n) = \dfrac{n^3-n}{6} = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{6}$, 因此 $f(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 就是金字塔數。

引理 2. 設 $f(x) = (x^3-x)/6$ 且 n 爲正整數, 則對任意給定的自然數 a, 以下 3^n 個數

$$f(a+3k), \qquad k = 0, 1, \ldots, 3^n-1,$$

模 3^n 兩兩互不同餘。

在證明中, 我們只需要用到引理2的一個特例, 每一個自然數都與一個形如 $f(3k)$, $(k = 0, 1, \ldots, 3^n-1)$ 的數模 3^n 同餘 (相當於在引理2中令 $a=0$)。

證明: 只要證明, 對任意的自然數 a 以及 $k \in \{1, \ldots, 3^n-1\}$ 有:

$$f(a+3k) - f(a) \not\equiv 0 \pmod{3^n}.$$

計算有

$$\begin{aligned} f(a+3k) - f(a) &= \frac{(a+3k)^3 - (a+3k)}{6} - \frac{a^3-a}{6} \\ &= 3k \cdot \frac{(a+3k)^2 + (a+3k)a + a^2 - 1}{6} \\ &= \frac{k}{2}(3a^2 + 9ka + 9k^2 - 1). \end{aligned}$$

注意到, 因數 $(3a^2+9ka+9k^2-1) \equiv 2 \pmod 3$ 不被 3 整除, 因此, 如果 $f(a+3k)-f(a) \equiv 0 \pmod{3^n}$, 則 k 必定被 3^n 整除, 但 $k \in \{1, \ldots, 3^n-1\}$, 這不可能! 引理證畢。

註記 2. 引理 2 見於楊武之[10], 他在 [9] 中指出, 引理2可以推廣爲下述形式 (證明則見[10]):

命題: 設 $f(x) = \dfrac{x^p - x}{2p}$, 其中 p 爲奇數, 且 n 爲正整數, 則對任意給定的自然數 a, 以下 p^n 個數

$$f(a+pk), \qquad k = 0, 1, \ldots, p^n-1,$$

模 p^n 兩兩互不同餘。

最後我們還需要以下引理, 這是楊武之[9]中結果的一個簡單形式。

引理 3. 設 $f(x)=\dfrac{x^3-x}{6}$, 則對任意的正數 $s\geq 1$, 存在一個整數 $u\geq 1$ 使得

$$0\leq s-f(u)\leq 2s^{2/3}.$$

證明: 設 r 是 $F(x)=f(x)-s$ 在 $[1,+\infty)$ 上的唯一零點 (由堪根定理知存在, 單調性知唯一), 即 $f(r)=s$。將 $r\geq 1$ 寫成整數部分 u 與小數部分 v 之和: $r=u+v$。則因爲 $1\leq u\leq r$, 我們有

$$f(u)\leq f(r)=s.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} s-f(u)&=f(r)-f(u)\\ &=v\frac{3r^2-3rv+v^2-1}{6}\\ &=v\frac{3r^2-3rv-(1-v^2)}{6} \qquad (\text{注意到 } 0\leq v<1)\\ &<\frac{3r^2}{6}=r^2/2. \end{aligned}$$

於是我們只需證明 $r^2/2\leq 2s^{2/3}$, 即 $r\leq 2s^{1/3}$。根據 $f(x)$ 的單調性, 我們只需證明 $f(r)\leq f(2s^{1/3})$, 即

$$s\leq \frac{8s-2s^{1/3}}{6}.$$

這是顯然的 (注意到 $s\geq 1$ 保證 $s\geq s^{1/3}$)。證畢。

應用引理 3 可以直接證明, 每一個小於 $168\cdot 3^{24}=2^3\cdot 3^{25}\cdot 7$ 的正整數 s 都可以寫成不超過九個金字塔數之和。爲此, 對給定的 $s<168\cdot 3^{24}$, 根據引理 3, 存在整數 $u\geq 0$ 使得

$$0\leq s-f(u)<2s^{2/3}<2^3\cdot 3^{50/3}\cdot 7^{2/3}.$$

繼續應用引理3, 存在整數 $x\geq 0$ 使得

$$0\leq s-f(u)-f(x)<2^3\cdot 3^{100/9}\cdot 7^{4/9}.$$

再次應用引理3可知, 存在整數 $y\geq 0$ 使得

$$0\leq s-f(u)-f(x)-f(y)<2^3\cdot 3^{200/27}\cdot 7^{8/27}.$$

最後一次應用引理3, 存在整數 $z \geq 0$ 使得

$$0 \leq s-f(u)-f(x)-f(y)-f(z) < 2^3 \cdot 3^{400/81} \cdot 7^{16/81} < 2^3 \cdot 3^5 \cdot 7^{1/5} < 8 \cdot 243 \cdot 3/2 = 2916,$$

但是, 業已驗證每一個小於 2916 的正整數都可以寫成五個金字塔數之和, 因此 s 可以寫成九個金字塔數之和。

現在我們可以給出楊武之九金字塔數定理的完整證明了。

定理的證明: 我們只需要證明每一個大於等於 $\geq 168 \cdot 3^{24}$ 的整數 s 可以寫成九個金字塔數之和。

對於任意的整數 $s \geq 168 \cdot 3^{24}$, 必定存在一個整數 $n \geq 8$ 使得

$$168 \cdot 3^{3n} \leq s < 168 \cdot 3^{3(n+1)}.$$

更進一步, 必定存在整數 $j \in \{1, 2, 3\}$ 使得

$$168 \cdot 3^{3n+j-1} \leq s < 168 \cdot 3^{3n+j}. \tag{1}$$

根據引理 1 (對上述 n 以及 $a = 0$), 存在 $u \in \{1, \ldots, 3^n - 1\}$ 使得 s 與 $f(3u)$ 模 3^n 同餘, 即

$$s \equiv f(3u) \pmod{3^n}.$$

換言之, 存在正整數 M 使得

$$s = f(3u) + M \cdot 3^n. \tag{2}$$

注意到

$$0 < f(3u) = \frac{(3u)^3 - 3u}{6} < \frac{(3u)^3}{6} = \frac{27}{6}u^3 < 5u^3 < 5(3^n)^3 = 5 \cdot 3^{3n}. \tag{3}$$

於是由 (1) 和 (3), 我們得到 $M \cdot 3^n = s - f(3u)$ 的估計:

$$168 \cdot 3^{3n+j-1} - 5 \cdot 3^{3n} < M \cdot 3^n < 168 \cdot 3^{3n+j}.$$

從而

$$(168 \cdot 3^{j-1} - 5) \cdot 3^{2n} < M < 168 \cdot 3^{2n+j} = (168 \cdot 3^j) \cdot 3^{2n}.$$

令 $M = 3^{2n} + N$, 則由 (2) 有

$$s = f(3u) + 3^n(3^{2n} + N), \tag{4}$$

其中

$$(168 \cdot 3^{j-1} - 6) \cdot 3^{2n} < N < (168 \cdot 3^j - 1) \cdot 3^{2n}. \tag{5}$$

下面我們將證明: 存在整數 $v>0, w\geq 0, Q\in\{0,1,\ldots,3^{2n}\}$ 且 $Q\equiv 1$ 或 $2 \pmod 4$ 使得

$$\boxed{3^n(N+1)=f(v)+f(w)+3^nQ.} \tag{6}$$

假定我們已經證明了這一點, 那麼根據引理1可知, 存在自然數 x,y,z 使得

$$Q=x^2+y^2+z^2 \tag{7}$$

於是

$$\begin{aligned}
s&=f(3u)+3^n(3^{2n}+N)\\
&=f(3u)+3^{3n}+3^nN\\
&=f(3u)+3^{3n}+f(v)+f(w)+3^nQ-3^n\\
&=f(3u)+f(v)+f(w)+3^{3n}+3^nQ-3^n\\
&=f(3u)+f(v)+f(w)+3^{3n}+3^n(x^2+y^2+z^2)-3^n.
\end{aligned}$$

注意到[3]

$$\boxed{3^{3n}+3^n(x^2+y^2+z^2)-3^n=f(3^n+x)+f(3^n-x)+f(3^n+y)+f(3^n-y)+f(3^n+z)+f(3^n-z).}$$

於是, 我們得到:

$$s=f(3u)+f(v)+f(w)+f(3^n+x)+f(3^n-x)+f(3^n+y)+f(3^n-y)+f(3^n+z)+f(3^n-z).$$

注意到 $Q\leq 3^{2n}$, 因此 $x,y,z\leq 3^n$, 從而 $3^n\pm x, 3^n\pm y, 3^n\pm z$ 都是自然數, 於是 s 可寫成九個金字塔數的和。

現在我們來選取適當的 v,w,Q 使得等式(6)成立。爲此, 計算出

$$f(v)+f(w)=(v+w)\frac{v^2-vw+w^2-1}{6}=(v+w)\frac{(v+w)^2-3vw-1}{6}.$$

令 $v+w=2a\cdot 3^{n+1}$, 其中 $a>0$ 爲待定的半整數。於是

$$\begin{aligned}
f(v)+f(w)&=2a\cdot 3^{n+1}\frac{4a^2\cdot 3^{2n+2}-3v(2a\cdot 3^{n+1}-v)-1}{6}\\
&=3^n\cdot a(4a^2\cdot 3^{2n+2}+3v^2-6a\cdot 3^{n+1}v-1)\\
&=3^n\cdot P.
\end{aligned}$$

[3]這裏用到了恒等式 (可直接驗證)

$$\frac{a^3}{3}+ab^2-\frac{a}{3}=f(a+b)+f(a-b).$$

令 $a=3^n$ 且 b 分別爲 x,y,z 並求和, 即得。這也是整個證明中最巧妙的一個觀察。

其中

$$P = a \cdot (4a^2 \cdot 3^{2n+2} + 3v^2 - 6a \cdot 3^{n+1}v - 1). \tag{8}$$

於是 (6) 式成爲 $3^n(N+1) = 3^n(P+Q)$, 也就是

$$N + 1 = P + Q. \tag{9}$$

於是, 現在我們要選擇半整數 $a > 0$ 與整數 $v \geq 0$ 使得

$$v \leq 2a \cdot 3^{n+1} \qquad (\text{以確保 } w \geq 0), \tag{10}$$

且

$$0 \leq N + 1 - P \leq 3^{2n} \qquad (\text{以確保 } 0 \leq Q \leq 3^{2n}). \tag{11}$$

先考慮 (11)。爲此, 計算

$$\begin{aligned} N + 1 - P &= N + 1 - a \cdot [4a^2 \cdot 3^{2n+2} + 3v^2 - 6a \cdot 3^{n+1}v - 1] \\ &= N + 1 - a \cdot [3(v - 3^{n+1}a)^2 - (1 - 3^{2n+2}a^2)]. \end{aligned}$$

要使得 $N + 1 - P \geq 0$, 只需

$$\frac{1}{3}\left[\frac{N+1}{a} + 1 - 3^{2n+2}a^2\right] = \frac{1}{3}A \geq \left(v - 3^{n+1}a\right)^2, \tag{12}$$

其中

$$A = \frac{N+1}{a} + 1 - 3^{2n+2}a^2. \tag{13}$$

於是只要選擇 a, v 使得

$$A \geq 0, \tag{14}$$

$$0 \leq v - 3^{n+1}a \leq \sqrt{A/3}. \tag{15}$$

類似地, 計算

$$\begin{aligned} N + 1 - P - 3^{2n} &= N + 1 - 3^{2n} - a \cdot [4a^2 \cdot 3^{2n+2} + 3v^2 - 6a \cdot 3^{n+1}v - 1] \\ &= N + 1 - 3^{2n} - a \cdot [3(v - 3^{n+1}a)^2 - (1 - 3^{2n+2}a^2)]. \end{aligned}$$

要使得 $N + 1 - P - 3^{2n} \leq 0$, 只需

$$\frac{1}{3}\left[\frac{N+1-3^{2n}}{a} + 1 - 3^{2n+2}a^2\right] = \frac{1}{3}B \leq \left(v - 3^{n+1}a\right)^2, \tag{16}$$

其中

$$B = \frac{N+1-3^{2n}}{a} + 1 - 3^{2n+2}a^2 = A - \frac{3^{2n}}{a}. \tag{17}$$

於是只要選擇 a, v 使得

$$B \geq 0, \tag{18}$$
$$v - 3^{n+1}a \geq \sqrt{B/3} \tag{19}$$

綜上, 為使 (14)–(15) 與 (18)–(19) 同時成立, 我們只需要選擇 a, v 使得

$$B \geq 0, \tag{20}$$
$$\sqrt{B/3} + 3^{n+1}a \leq v \leq \sqrt{A/3} + 3^{n+1}a. \tag{21}$$

(20) 與 (21) 可確保 (11) 成立, 為確保 (10) 成立, 只需 a 滿足

$$\sqrt{A/3} \leq 3^{n+1}a. \tag{22}$$

注意到 (20) 與 (22) 一起等價於

$$(9a^3+1)3^{2n} - (a+1) \leq N \leq 36a^3 3^{2n} - (a+1). \tag{23}$$

現在我們知道, N 滿足 (5), 因此只需要選擇 a, v 使得

$$(9a^3+1)3^{2n} - (a+1) \leq (168 \cdot 3^{j-1} - 6) \cdot 3^{2n} + 1, \tag{24}$$

且

$$(168 \cdot 3^j - 1) \cdot 3^{2n} \leq 36a^3 3^{2n} - a. \tag{25}$$

這是不難辦到的: 對 $j = 1, 2, 3$ 的情況, 對應的 $a = a_j$ 可以分別取 $5/2, 7/2, 11/2$。現在我們來考慮 (21)。我們將證明, 對於 $j = 1, 2, 3$ 的不同情況, 分別有 $62, 29, 14$ 個連續的整數 v 滿足 (21)。令 $r = \frac{A-B}{A} = \frac{3^{2n}}{a \cdot A} \in [0, 1]$, 則不等式組 (21) 所定義的區間的長度為

$$d = \sqrt{A/3} - \sqrt{B/3} = \sqrt{\frac{A}{3}}(1 - \sqrt{1-r}) = \sqrt{\frac{A}{3}}\frac{r}{1+\sqrt{1-r}} > \sqrt{\frac{A}{3}} \cdot \frac{r}{2} = \frac{3^{2n}}{2a} \cdot \frac{1}{\sqrt{3A}}.$$

於是我們只需要估計 $3A = \frac{3(N+1)}{a} + 3 - 3^{2n+3}a^2$ 的上界, 注意到根據(5), 我們有 $N + 1 \leq (168 \cdot 3^j - 1)3^{2n}$, 於是

$$3A \leq \left[\frac{3(168 \cdot 3^j - 1)}{a} + 1 - 27a^2\right] 3^{2n}$$

所以, 當 $j = 1$ 時 (注意此時 $a = 5/2$), 我們有

$$3A \leq \left[\frac{2 \cdot 3(168 \cdot 3 - 1)}{5} + 1 - 27 \cdot \frac{25}{4}\right] 3^{2n} < 436 \cdot 3^{2n} < 21^2 \cdot 3^{2n},$$

因此

$$d=\frac{3^{2n}}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{3A}}>\frac{3^{2n}}{5}\cdot\frac{1}{21\cdot 3^n}=\frac{3^n}{105}\geq\frac{3^8}{105}=\frac{6561}{105}>62.$$

類似地, 當 $j=2$ 時 (注意此時 $a=7/2$), 我們有

$$3A\leq\left[\frac{2\cdot 3(168\cdot 9-1)}{7}+1-27\cdot\frac{49}{4}\right]3^{2n}<966\cdot 3^{2n}<32^2\cdot 3^{2n},$$

因此

$$d=\frac{3^{2n}}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt{3A}}>\frac{3^{2n}}{7}\cdot\frac{1}{32\cdot 3^n}=\frac{3^n}{224}\geq\frac{3^8}{224}=\frac{6561}{224}>29.$$

最後, 當 $j=3$ 時 (注意此時 $a=11/2$), 我們有

$$3A\leq\left[\frac{2\cdot 3(168\cdot 27-1)}{11}+1-27\cdot\frac{121}{4}\right]3^{2n}<1658\cdot 3^{2n}<41^2\cdot 3^{2n},$$

因此

$$d=\frac{3^{2n}}{11}\cdot\frac{1}{\sqrt{3A}}\geq\frac{3^{2n}}{11}\cdot\frac{1}{41\cdot 3^n}=\frac{3^n}{451}\geq\frac{3^8}{451}=\frac{6561}{451}>14.$$

現在我們只需要選擇一個適當的 v 使得 $Q=N+1-P$ 模 4 餘 1 或 2。注意到 $N+1=M-3^{2n}+1\equiv M \pmod 4$, 因此我們只要選擇 v 使得當 $M\equiv 0,1,2,3 \pmod 4$ 時分別有, P 模 4 同餘於 2 或 3, 0 或 3, 0 或 1, 1 或 2。事實上, 在任何情況, 同餘方程 $P\equiv 0 \pmod 4$ 與 $P\equiv 2 \pmod 4$ 總有解。我們分情況討論如下。

如果 $j=1$, 則

$$2P=5\cdot(5^2\cdot 3^{2n+2}+3v^2-5\cdot 3^{n+2}v-1)\equiv -3^n v+7v^2\equiv\begin{cases}-v+7v^2 & \text{若 } n \text{ 爲偶數}\\ 5v+7v^2 & \text{若 } n \text{ 爲奇數}\end{cases} \pmod 8$$

因此, 如果 n 是偶數, 取 $v\equiv 0 \pmod 8$ 或 $v\equiv 3 \pmod 8$ 即可保證 $2P\equiv 0 \pmod 8$ 或 $2P\equiv 4 \pmod 8$, 從而 $P\equiv 0 \pmod 4$ 或 $P\equiv 2 \pmod 4$; 若 n 是奇數, 則我們取 $v\equiv 0 \pmod 8$ 或 $v\equiv 1 \pmod 8$ 即可保證 $P\equiv 0 \pmod 4$ 或 $P\equiv 2 \pmod 4$。

類似的, 如果 $j=2$, 則

$$2P=7\cdot(7^2\cdot 3^{2n+2}+3v^2-7\cdot 3^{n+2}v-1)\equiv -3^n v+5v^2\equiv\begin{cases}-v+5v^2 & \text{若 } n \text{ 爲偶數}\\ 5v+5v^2 & \text{若 } n \text{ 爲奇數}\end{cases} \pmod 8$$

因此, 如果 n 是偶數, 取 $v\equiv 0 \pmod 8$ 或 $v\equiv 1 \pmod 8$ 即可保證 $2P\equiv 0 \pmod 8$ 或 $2P\equiv 4 \pmod 8$, 從而 $P\equiv 0 \pmod 4$ 或 $P\equiv 2 \pmod 4$; 若 n 是奇數, 則我們取 $v\equiv 0 \pmod 8$ 或 $v\equiv 3 \pmod 8$ 即可保證 $P\equiv 0 \pmod 4$ 或 $P\equiv 2 \pmod 4$。

最後, 如果 $j=3$, 則

$$2P=11\cdot(11^2\cdot 3^{2n+2}+3v^2-11\cdot 3^{n+2}v-1)\equiv -3^n v+v^2\equiv\begin{cases}-v+v^2 & \text{若 } n \text{ 爲偶數}\\ 5v+v^2 & \text{若 } n \text{ 爲奇數}\end{cases} \pmod 8$$

因此, 取 $v \equiv 0 \pmod 8$ 或 $v \equiv 4 \pmod 8$ 即可保證 $P \equiv 0 \pmod 4$ 或 $P \equiv 2 \pmod 4$。

綜上, 對一切自然數 $s \geq 168 \cdot 3^{24}$ 我們完成了定理的證明。定理證畢。

致謝: 感謝天津大學圖書館的張昉老師爲我們提供了文獻[9], 華東師範大學圖書館的王善平老師爲我們提供了文獻[10]。

參考資料

1. Manjul Bhargava, Autobiography, in Mariana Cook, *Mathematicians–An outer view of the inner world*, Princeton University Press, 2009.
2. Y. F. Deng and C. N. Yang, Waring's Problem for Pyramidal Numbers, *Science in China, Ser.A* , **37**(1994), 277–283.
3. C. F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, Yale University Press. New Haven, Conn., and London, 1966. 中譯本《算術探索》, 潘成彪、張明堯譯, 哈爾濱工業大學出版社, 2012年。
4. M. B. Nathanson, A Short Proof of Cauchy's Polygonal Number Theorem, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. **99**, No. 1. (Jan., 1987), 22-24. 中譯文, *Cauchy* 多邊形數定理的一個簡短證明, 雷豔萍譯, 《數學通報》 第 52 卷第 2 期。
5. M. B. Nathanson, *Additive Number Theory: The Classical Bases*, GTM**164**, Springer, 1996.
6. J. P. Serre, *A Course in Arithmetic*, GTM **7**, Springer. 中譯本《數論教程》, 馮克勤譯, 高等教育出版社, 2007年。
7. G. L. Watson, Sums of eight values of a cubic polynomial, *J. London Math. Soc.*, **27**(1952), 217–220.
8. K. C. Yang, Various generalization of Waring's problem. Thesis, Chicago University, 1928.
9. K. C. Yang, Representation of Positive integer by Pyramidal numbers $f(x) = (x^3 - x)/6, x = 0, 1, 2, \ldots$, *Science Report of Tsing Hua University*, A**1**(1931), 9-15.
10. 楊武之, 關於同餘式的一個定理, 《清華學報》, 第6卷第2期, 第107頁。
11. 清華大學應用數學系編,《楊武之先生紀念文集》, 清華大學出版社, 1998年。

—本文作者林開亮任職西北農林科技大學理學院, 張愛仙爲西安理工大學數學系教師—