

當「歐先生」來到中國 . . .¹

蕭文強

摘要: 1607年, 意大利耶穌會傳教士利瑪竇 (Matteo Ricci) 和明朝大學士徐光啓合作, 完成歐幾里得 (Euclid) 的《原本》(*Elements*)²之首六卷的翻譯, 並冠以書名《幾何原本》。本文旨在檢視《原本》成為第一本翻譯成中文的西方數學書籍的歷史背景, 並且探討當時譯本受重視的程度, 以及譯本在面世後至二十世紀初段在各方面產生的影響。這本在明朝傳入的第一本西方數學書籍掀起了西方科學傳入中國的第一波浪潮, 第二波和第三波要等到清朝才出現, 但每次出現都有不同的歷史背景及特色。除了對傳統東西方研究數學的方式和重點作比較, 我們還希望在更廣泛的學術和文化方面檢視這個議題。

一、前言

社會主義革命知識份子陳獨秀 (1879~1942) (中國共產黨創黨人之一) 在二十世紀初向中國人民介紹「德先生」(民主) 和「賽先生」(科學)。其實, 早於三百多年前, 另一位外國人「歐先生」(Euclid, 歐幾里得) 已經來到中國了。「歐先生」在中國的影響, 某種程度上替前述兩位先生的來臨鋪路。本文旨在述說這段故事。

中央研究院數學所在2007年十一月舉行研討會, 紀念《原本》中譯本出版四百週年。當時筆者以「歐先生」來華四百年為題作了報告 (蕭文強, 2007)。三年後, 筆者在香港大學的一個普及講座作了另一報告, 題目是:「1607, 具有 (某些) 意義的一年 —《原本》的翻譯, 第一本譯成中文的西方數學書籍」(“1607, a year of (some) significance: Translation of the first European text in mathematics — *Elements* — into Chinese” (Siu, 2011))³。

¹本文是2013年七月在台北舉行的第六屆世界華人數學家大會特邀報告的文稿, 題為: When “Mr. Ou (Euclid)” came to China . . . , 原來的英文文本將刊於大會會議紀錄, 現由陳鳳潔女士逕譯, 承蒙大會會議紀錄主編同意刊於《數學傳播》, 作者謹向譯者及該兩本刊物的主編致謝。《數學傳播》主編悉心修改譯稿, 使文章更易於閱讀, 作者深表感激。

²更準確的說, 是由克拉維烏斯 (Christopher Clavius) 在十六世紀末編纂的 *Euclidis Elementorum Libri XV* 十五卷版本。

³報告題目的意念來自歷史學家黃仁宇 (Ray Huang, 1918~2000) 一本受歡迎的著作: *1587, A Year of No Significance* (Huang, 1981)。此書出版後, 很快便有了中文本, 書名是《萬曆十五年》, 這書名雖然多提供了些訊息, 但不及原來書名精煉。此書以這樣一段話開始:「1587年是豬年, 真的沒有什麼重要事情發生。 . . . 讓我由1587年三月二日這一天起說, 這是一個普通的工作天。 . . .」作者的用意是從一個「宏觀」的角度看歷史, 他在其後的一本著作《中國: 大歷史觀點》(*China: A Macro History*) (Huang, 1988), 提供更多例子說明這個觀點, 對長時段發生的事件, 以遠距離和寬視野作分析。以這個觀點看問題, 我們發現有些事情發生之時, 沒有顯示什麼重要之處, 但隨著時日過去, 卻能產生深遠影響。筆者試以同一脈絡, 述說報告題目所指在1607年發生的事情。

本文是以上述筆者的兩個報告擴展寫成。我們將檢視《原本》成爲第一本翻譯成中文的西方數學書籍的歷史背景，並且探討當時譯本受重視的程度，以及譯本在面世後至二十世紀初段在各方面可能產生的影響。

二、故事的開端

故事由西方的「探索年代」開始。當時歐洲人找到一條通往東方的海路，不同類別的人，因不同的理由來到東方，其中有一批是傳教士。傳教士除了宣傳福音外，還開啟了兩大文明的知識和文化交流的重要一頁。約自 1570 年至 1650 年這段期間，來到中國宣揚基督教義最主要的傳教士團體來自依納爵·羅耀拉 (Ignatius of Loyola, 1491~1556) 於 1540 創立的耶穌會。在衆多耶穌會傳教士中，本文集中述說利瑪竇 (Matteo Ricci, 1552~1610); 在他把西方學識傳入中國的衆多貢獻中，則集中討論他與徐光啟 (1562~1633) 翻譯歐幾里得《原本》的合作經過。

1582年八月七日，利瑪竇抵達澳門。1557年明朝朝廷同意澳門成爲葡萄牙在中國的商港。澳門是歐洲人在東亞的第一個也是最後一個殖民地，於 1999 年，即四百四十二年後，澳門重歸中國，成爲中國一個特別行政區。與澳門相鄰的香港，於 1842 年割讓給英國政府，1997 年回歸中國。澳門和香港這兩個城市，對現代中國的興起，起了微妙的歷史作用。

未進入中國內陸前，利瑪竇首先在澳門聖保祿書院學習，然後於 1601 年一月到達北京，成爲中國最著名的天主教傳教士；1610 年五月十一日去世時，他是第一位獲准埋葬在中國國土的外國人，由此可見當時他在中國享有的崇高地位。

在派到東方傳教之前，利瑪竇自 1572 年九月至 1578 年五月在意大利的羅馬學院追隨克拉維烏斯 (Christopher Clavius, 1538~1612) 學習數學。《原本》的翻譯根據克拉維烏斯在 1574 編纂的 *Euclidis Elementorum Libri XV* 十五卷版本 (Clavius, 1574)。我們可以從利瑪竇寫的日誌，獲得有關他在中國的生活和宣教工作的非常有趣和豐富的資料。日誌由與他同期的耶穌會教士金尼閣 (Nicolas Trigault, 1577~1628) 在 1615 年出版 (Ricci, 1953)。以下節錄與《原本》翻譯有關的片段。

「...要是有人說倫理、物理、數學不是教會的工作，那麼他們便不熟悉中國人的喜好了，中國人接受與精神救贖有關的事情是緩慢的，除非包含了知識的成份...所有我們講述與科學知識有關的事情，都是能帶來收成的種子...但中國人最喜歡的莫過於歐幾里得的《原本》。也許是因爲沒有人比中國人更重視數學了，儘管他們的教學方法與我們有別；他們提出各式各樣的命題，卻都沒有證明。」(Ricci, 1953) 事情是否真的如此？我們在第四節再討論。

利瑪竇追隨克拉維烏斯學習歐幾里得 (Euclid, 約紀元前 325~265) 在紀元前三世紀初期編寫的《原本》，他認爲這是學習任何數學的基礎課本。因此，建議中國朋友徐光啟翻譯數學書籍應以《原本》開始。徐光啟爲這項工作非常努力：每天早上利瑪竇爲他講解《原本》(因徐不

諳拉丁文,而利瑪竇精通中文),下午他用功學習,晚上便把當天所領悟的以中文書寫下來。利瑪竇曾有以下的描述:「當他(徐光啟)開始領略到此書的巧妙和充實之處,他高興得和其他學者交談的話題都是圍繞此書,並以清晰、嚴格和優美的文句翻譯成中文。…如此,他完成首六卷的學習,這幾卷都是最重要的,與此同時,他又結合學習其它數學問題。…他的本意是要學完全,但神父(利瑪竇)希望他能將時間用於實際與宗教有關之事宜,因而約束他,要求他先擱置這件工作,觀察其他學者接受這六卷的程度,再翻譯其它。」(Bernard, 1935)譯本在1607年以《幾何原本》書名出版⁴。利瑪竇在書的序言寫道:「…太史意方銳,欲竟之。余曰:止,請先傳此,使同志習之,果以為用也,而後徐計其餘,太史曰:然,是書也,苟為用,竟之何必在我。遂輟譯而梓。…」(徐光啟, 1984)

其實,徐光啟心中十分希望繼續翻譯全書。在1611的修訂版序言中,他悲嘆道:「…續成大業,未知何日,未知何人。…」(徐光啟, 1984)徐光啟的沉重遺憾,要等待兩個半世紀後才得到解決:1857年,清朝數學家李善蘭(1811~1882)與英國傳教士偉烈亞力(Alexander Wylie, 1815~1887)合作,把由比林斯利(Henry Billingsley, 約1538~1606)在1570年出版的《原本》英譯本其中卷七至卷十五譯成中文(劉鈍, 1989; Xu, 2005)⁵。

三、歐幾里得《原本》在西方世界的影響

約於紀元前三世紀由歐幾里得編寫的《原本》,不單是數學、一般而言更是思想史的里程碑;自成書以來,它對整個西方世界產生的巨大影響,遠遠超出一本數學書籍的作用(Grabiner, 1988; Kline, 1953)。

數學家斯塔爾(Saul Stahl)說:「不同的古代文明在紀元前數千年已經自然地發展量度圖形的幾何。我們現在所熟悉的幾何,即是一系列有關理想圖形的抽象描述,只須倚賴純理性思考便可證明這些描述,則始創於古希臘。」(Stahl, 1993)紀元五世紀曾為歐幾里得的《原本》作評論的普羅克拉斯(Proclus, 約410~485)說:「它的名字(數學(μαθηματικη))—此字的原義是指靠學習得來的知識)說明了這門科學的功用,它激發了我們內在的知識,喚醒了我們的智慧,滌清了我們的理解,揭示了本來就屬於我們的概念,除掉我們與生俱來的混沌與無知,把我們從非理性的束縛中釋放出來;…」(Proclus, 1970)

事實上,柏拉圖學院的高等教育課程中,包括了算術與計算(logistic)⁶、平面與立體幾何、天文、音樂學(harmonics),組成了古羅馬哲學—數學家波愛修斯(Boethius, 約480~524)

⁴「幾何」一詞,現今代表一門數學。有人認為它是西語 geometria 的音釋,但有好幾個理由反對這個說法。若閱讀譯本《幾何原本》卷五(即關於歐多克索斯(Eudoxus)的比例理論)其中定義的翻譯,可知「幾何」是「度量」(magnitude)的技術名詞。在傳統中國數學經典著作,「幾何」這名詞經常在數學題目出現。徐光啟熟悉傳統中國數學,對這名詞不會感到陌生,用了它來翻譯「度量」。他同時意識到「度量」的觀念在《原本》的重要性,因而把「幾何」一詞放進譯本的書名中(Siu, 1995/1996; Siu, 2011)。

⁵有關翻譯《原本》的詳細分析,可參考安國風(Peter Engelfriet)的著作(Engelfriet, 1998),此乃安氏本人在荷蘭萊頓大學(Leiden University)博士論文的修訂延伸版。

⁶古希臘時代的「算術」,即今天的「數論」,而今天的「算術」,即古希臘時代的「計算」。

稱為的四藝 (quadrivium)。柏拉圖 (Plato, 紀元前 427~347) 在他的《國家篇》(*Republic*) 說道:「一旦到了三十歲, 他們便會提升進入精英班, 接受辯證法能力的測試, 看看有誰能夠不使用視覺或其它的感官, 便能跟隨真理進入純粹真實的境界。」(Plato, 1942) 古時中國為貴族設計的課程中, 同樣有包括「六藝」(禮、樂、射、御、書、數)。中古時期歐洲的「四藝」(算術、幾何、音樂、天文) 加上「三藝」(修辭學、辯證法、語法) 組成博雅教育 (liberal Education) 的七門學科, 滋養人類的心靈, 培育公民成為自由人。英國博學學者培根 (Francis Bacon, 1561~1626) 在他的《論讀書》(*Of Studies*) 中如此寫道:「歷史使人充滿智慧, 詩歌使人機智, 數學使人精細, 自然哲學使人深思, 道德使人端正有威儀, 邏輯與修辭使人能據理力爭。」(Bacon, 1906)

1699年, 法國哲學家富特奈爾 (Bernard le Bovier de Fontenelle, 1657~1757) 曾說:「幾何的精神並非只屬於幾何, 你可以把它從幾何拿出來, 放到其它知識領域裡。有關道德、政治、評論、甚至修辭的作品, 若以幾何手法處理, 內容雖則基本無變, 卻會顯得更為優雅。」(Fontenelle, 1785) 德國哲學家康德 (Immanuel Kant, 1724~1804) 說:「對理性思維而言, 事情沒有 (如數學) 那麼好, 我們不能指著單一本書, 有如介紹歐幾里得《原本》那樣, 然後說: 這就是形而上學...」(Kant, 2004)

因此, 在西方世界, 歐幾里得《原本》的影響, 自開始已經不單是作為一本數學書籍。讓我們閱讀二十世紀兩位傑出思想家描述他們在學習《幾何原本》過程中受到的影響。

第一位是羅素 (Bertrand Russell, 1872~1970)。他說:「十一歲時在哥哥指導下, 我開始研習歐幾里得的巨著 (即《原本》)。這是我平生經歷的一件大事, 令我目眩神迷, 恍如初戀... 別人告訴我歐幾里得擅長證明定理, 但開始我只見公理, 叫人大失所望。初時我拒絕接受這些公理, 除非哥哥給我一個好理由為何要接受它。哥哥說:『如果你不接受這些公理, 我們便沒法學下去。』我很想學下去, 只好極不情願地暫時接受了它。」(Russell, 1967) 事實上, 當利瑪竇與徐光啟共同翻譯時, 也把公理說成是要求, 加上注釋:「求作者, 不得言不可作。」希臘文字「axioma」(公理) 也有要求的意思, 與羅素長兄說的話如出一轍!

另一位現代傑出人物是愛因斯坦 (Albert Einstein, 1879~1955)。他說:「十二歲時我經歷了平生第二樁奇妙的事情, 與第一樁的性質極不相同; 學期初我獲得一本小書, 講述歐幾里得平面幾何... 那種清晰與確定, 給我的印象深刻得難以形容... 希臘人首次讓我們看到, 如何在幾何上憑著純理性思考達致這種程度的確定與純淨, 實在叫人非常驚訝。」(Einstein, 1957)

牛頓 (Isaac Newton, 1642~1727) 是另一位要談及的人物。牛頓的甥婿、承繼牛頓成為鑄幣廠主管的干德 (John Conduitt, 1688~1737), 他的備忘錄記載了他在1727年十一月從棣莫弗 (Abraham de Moivre, 1667~1754) 知道有關牛頓學習幾何的事情:「從歐幾里得《原本》他獲取學習三角學的基礎。初時只讀命題的標題, 他認為顯淺易明, 奇怪有人會有興趣去證明。後來因為一些定理他開始改變看法: 在同一對平行線內的平行四邊形, 只要是底邊相同, 面積也相同; 直角三角形的斜邊平方等於兩邊各自平方之和。」(Whiteside, 1970) 曾監督出版牛

頓著作《自然哲學之數學原理》(*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*) 第三版的龐伯頓 (Henry Pemberton, 1694~1771), 在他的回憶錄描述了牛頓如何表達他對前輩的重視:「他非常欣賞前輩的品味、論證的形式。我曾經聽過他甚至自責沒有更好跟隨這些前輩; 他談及初期學習數學的過程時不無後悔, 認為自己在學習笛卡兒和其他代數學家的數學之前, 沒有好好重視歐幾里得的優秀作品《原本》。」(Pemberton, 1928)⁷ 事實上, 牛頓在 1687 年出版的巨著《自然哲學之數學原理》以三項運動公理開始他的論說, 以歐幾里得的幾何方式發展理論, 雖然他是利用他新近發展得到的微積分得到這些結果的! 其實, 有些學者認為歐幾里得《原本》是古代第一本具有現代科學性質的著述, 帶來後世十七至十八世紀在西方的科學革命 (陳方正, 2009)。

另一例是斯賓諾莎 (Baruch Spinoza, 1632~1677) 於 1675 年著作的《倫理學》(*Ethics*)。此作品完全按照歐幾里得《原本》的方式寫作, 所用名詞有定義、公理、定理、推論, 甚至在證明的結尾加上縮寫 QED (拉丁文 *quod erat demonstrandum* 意即「這就是要證明的」) (Spinoza, 1994) ! 另一受到歐幾里得《原本》影響的著作, 是馬爾薩斯 (Thomas Malthus, 1766~1834) 在 1798 年發表的《人口論》(*An Essay on the Principle of Population*), 後來他陸續發表了好幾個版本。開宗明義他先作兩個「公設」(Postulata):(1) 人類的生存, 食物是必需的; (2) 兩性之間的情慾是必需的, 並且將以接近目前的狀態持續下去。以這兩個「公設」為前題, 他得到「人口增長率較諸地球能為人類生產食物的增長率大」這樣悲觀的結論 (Malthus, 1914)。

美國開國元勳之一, 也是美國第三任總統的傑佛遜 (Thomas Jefferson, 1743~1826), 曾說:「科學是我的至愛, 政治是我的職責。」(Bedini, 1990) 在寫給朋友的書信中, 他說:「...我認為我在什麼地方學習希臘文和拉丁文都能學得同樣好, 學習數學也是一樣。」又說:「我為了塔西陀 (Tacitus) 和修昔底德 (Thucydides)、為了歐幾里得和牛頓而放棄閱讀報章, 感到更為愉快。」(Jefferson, 1984) 事實上, 傑佛遜在 1776 年起草的《獨立宣言》(*Declaration of Independence*) 以這句開首:「我們確立這些是自明之真理 (不用證明的公理), 即是人皆生而平等, 每人均由造物主賦予某種不可剝奪的權利, 其中包括生存、自由與謀求幸福的權利...」(Lemay, 1988) 基於這「公理」, 他提出反抗英皇喬治三世統治的論據。

美國第十六任總統林肯 (Abraham Lincoln, 1809~1865) 講述他學習《原本》的經歷:「他 (即林肯自己) 想學習什麼就自學。二十三歲之後, 他離開父親, 開始學習英文文法; 當然, 他無法掌握得十全十美, 但說話和書寫能力已經是現在那樣了。自從成為國會議員後, 他學習並差不多能精通歐幾里得的首六卷。」(Lincoln, 1989) 他曾說:「任何人都有極大信心說服一位願意講道理的小孩, 使他接受歐幾里得那些較簡單的定理; 但如果對方不接受定義和公理的

⁷ 有關《原本》對牛頓的影響, 是多年來科學史家爭論的問題, 原因基於那時期劍橋大學的數學課程, 特別是牛頓是個天才, 學習全靠自己。韋賽德 (Derek Thomas Whiteside, 1932~2008) 對此有深入研究和詳細討論, 他的工作根據牛頓的筆記和論文, 以及當年牛頓在他使用的巴羅 (Isaac Barrow, 1630~1677) 編著的《原本》版本書頁上的眉批 (Whiteside, 1970; Whiteside, 1982)。

話，他便完全束手無策，以失敗告終。傑佛遜定下的原則就是自由社會的定義和公理。](Lincoln, 1989) 1863年他在著名的葛底斯堡 (Gettysburg) 公墓前作了非常有名的演說，他說：「八十七年前，我們的先輩在這塊大陸上建立一個新的國度，孕育於自由，致力於人皆生而平等這個原理 (proposition) 。」

不過，不是人人都是如此看待歐幾里得的《原本》。十九世紀數學家西爾威斯特 (James Joseph Sylvester, 1814~1897) 曾經說：「開始學習歐幾里得使我十分厭惡幾何；因此，如果剛才我提及這書作為教科書時的語氣，令在座一些人震驚，我希望得到你們諒解；···」不過他繼續說：「然而，儘管這種厭惡已成為我的第二本性，當深入到任何數學問題時，我發現最終還是要觸及幾何。」(Baker, 1903~1910)

四、《原本》與中國傳統數學的匯合

《原本》如何與中國傳統數學融合在一起呢？先讓我們看看利瑪竇對中國傳統數學的看法：「這樣一種體系的結果是，任何人都可以在數學上隨意發揮自己最狂放不羈的想像力而不必提供確切的證明。他們看到歐幾里得與之相反的一個不同的特色，亦即命題有其特定次序，而且對這些命題給予的證明是如此確鑿，即使最頑固的人也無法否認它們。」(Ricci, 1953)

中國古代數學真的如利瑪竇所說完全沒有證明嗎？這是一個有爭議的問題。若然利瑪竇有機會讀到三世紀劉徽所寫《九章算術》的註釋，他可能有不同的看法。我們在劉徽的著作中取一個例子加以說明：已知 AC 是直角三角形 ABC 的斜邊，求作三角形的內接正方形 $BDEF$ ，其中點 D 、點 E 、點 F 分別在 AB 、 AC 、 BC 上。⁸

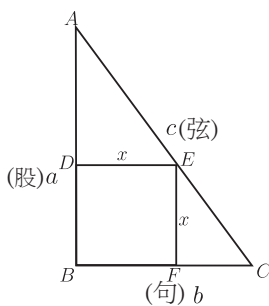
這道題目並不在歐幾里得的《原本》出現。假若《原本》有這一道題目，則其證明可能是這樣： BE (E 在 AC 之上) 平分 $\angle ABC$ [卷一命題九]；作垂直線 ED ， EF (D 在 AB 之上， F 在 BC 之上) [卷一，命題十二]；證明 $BDEF$ 是所求的正方形。十七世紀英國數學家施派德爾 (John Speidell) 在他 1617 年的書 *A geometrical extraction, or, A compendium collection of the chiefest and choisest problems*，把這道題目收為書中的第六十九題，並給出另一解法，但仍然帶有強烈的「歐幾里得味道」。這題目的更一般型式，出現在由徐光啟與利瑪竇合譯的《幾何原本》(*Euclidis Elementorum Libri XV*) 卷六中的附加命題十五：點 D 分割 AB ，令 $AD : DB = AB : BC$ [卷六，命題 10]；作 DE 平行 BC ， EF 平行 AB ，(E 在 AC 之上， F 在 BC 之上)； $DBFE$ 就是所需的內接正方形。

既然已經知道內接正方形存在，那麼正方形的邊長 x 為何？以上的作法已顯示，若 a ， b 分別是三角形兩邊之長，而此兩邊的夾角是直角，則 $x = \frac{ab}{a+b}$ 。更一般地，任意三角形 ABC ，

⁸有關討論此題的數學以及其相關的原始材料，請參閱：(Engelfriet, 1998; Engelfriet, Siu, 2001; Siu, 2011)。有關原始材料，請參閱：(Chemla, Guo, 2004; Clavius, 1574; 郭書春, 2009; Heath, 1925)。有關東西方數學證明的證題形式及其作用的比較論述，請參閱：(Chemla, 1996; Chemla, 2012; 蕭文強, 1989; Siu, 1993; Siu, 2008; Siu, 2012)。

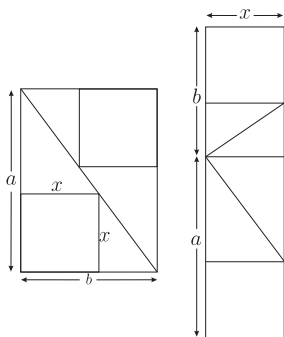
其底邊 $BC = b$, 高 $AH = h$, 則內接正方形 $IFEG$ (I, F 在 BC 之上, G 在 AB 之上, E 在 AC 之上) 的邊長是 $x = \frac{hb}{h+b}$ 。

讓我們來看中國古代於公元前三世紀至公元一世紀期間成書的《九章算術》，此書的第九章第十五題與上述的是同一問題：「今有句五步，股十二步。問：句中容方幾何。答曰：方三步一十七分步之九。術曰：並句，股爲法，句股相乘爲實，實如法而一，得方一步。」（見圖一）



圖一

有人說，任何數學講演中⁹ 都應該出現至少一個數學證明，就讓我引用劉徽對此題的「出入相補」證法。其思想方法與描述形式都與在《原本》出現的不同。讀者可嘗試解釋劉徽註釋中提出對公式的兩個不同證明。第一種方法證明公式 $x = \frac{ab}{a+b}$ ，採用的是「圖解證明」（見圖二）。劉徽註釋中描述如何把塗了色的板塊分割開然後重新拼合，可惜原著中的圖失傳，否則有利製作一套非常好的教具！劉徽對《九章算術》同一章的下一題，採用了類似但更爲有趣的計算方法，是關於直角三角形的內接圓（蕭文強，1989; Siu, 1993）。



圖二

第二種方法基於比例理論，利用所謂「今有術」（即西方的 *Rule of Three*）和「不變比率定理」（*Principle of invariant ratio*）（此定理基本上與《原本》卷一命題四十三的內容相同）（Siu, 2011）。雖然相似三角形理論在古代中國沒有發展起來，但人們已經常常純熟地運用相似

⁹本文乃作者於 2013 年七月在台北舉行的第六屆世界華人數學家大會特邀報告的文稿。

直角三角形來解決問題，並且在很多情況下這已經足夠了。

徐光啟如何認識他剛從克拉維烏斯編纂的歐幾里得《原本》學到的幾何呢？他又如何理解書中的思想、方法和表達形式，那些都與他熟悉的中國傳統數學很不相同？雖然徐光啟強調數學的應用性，但他有足夠的視野洞識《原本》本質的特點。在1607年版的《幾何原本》的序言，他寫道：「由顯入微，從疑得信，蓋不用爲用，衆用所基，真可謂萬象之形囿，百家之學海。」（徐光啟，1984）

徐光啟與利瑪竇於1606年共同改編及翻譯的《測量法義》，內容出自克拉維烏斯編纂的 *Geometria practica* 部份章節。書之序言寫道：「西泰子（即利瑪竇）之譯測量諸法也，十年矣。法而系之義也，自歲丁未（即1607年）始也。曷待乎？於時幾何原本之六卷始卒業矣，至是而後能傳其義也。是法也、與周髀九章之句股測望、異乎？不異也。不異、何貴焉？亦貴其義也。」¹⁰（徐光啟，1984）

徐光啟又在自己於1608年著作的《測量異同》緒言中強調：「九章算法句股篇中故有用表、用矩尺測量數條，與今譯測量法義相較，其法略同。其義全闕，學者不能識其所繇。既具新論，以考舊文，如視掌矣。」¹¹（徐光啟，1984）與此相關，他在1629年主政天文館時，向崇禎皇帝呈上的「測候月食奉旨回奏疏」當中有言：「不知其中有理、有義、有法、有數。理不明不能立法，義不辨不能著數。明理辨義，推究頗難；法立數著，遵循甚易。」¹²（徐光啟，1984）

基於此洞察力，徐光啟努力吸收西方數學知識，並與中國傳統數學綜合。茲舉一例以說明，他於1609年著《勾股義》，其中的問題四，綜合了上面提到的《九章算術》第九章的問題十五和《原本》（*Euclidis Elementorum Libri XV* 版本）卷六之附加命題十五。他解釋：「甲乙股三十六，乙丙句二十七。求容方。以句股相乘爲實，并句股得甲戌六十三爲法，除之得容方辛乙、乙癸、各邊。俱一十五四二八。···」（徐光啟，1984）當中的複雜推論，看來迂迴而且非必要，這可能顯示西方與中國做數學的方式的某種不協調之處，因此勉強把一種方式塑造成另一種時便顯得不自然了。不過，儘管有這樣的缺點，徐光啟把西方數學與中國數學綜合的嘗試，是值得欽佩的（Engelfriet, Siu, 2001; Siu, 2011）。

徐光啟爲何熱衷於綜合西方數學與中國數學呢？徐光啟是在儒家傳統思想成長的中國學者，以經世致用爲原則。爲此，他有服務社會的抱負，並傾向實用主義。在偶然的機會，他在廣東省認識了耶穌會教士郭居靜（Lazzaro Cattaneo，1560~1640），很有可能是郭居靜介紹他認識利瑪竇的。他認爲西方的宗教和西方的科學與數學對思維訓練極爲有用，可以補充儒學之不足。他也認爲西方的科學和科技可以擔當重要角色，改善國人的生活福祉。他渴求學習西方文

¹⁰白話譯文：「自從西泰子（即利瑪竇）翻譯測量法義已有十年了。但自丁未年（即1607年）起，此法始與其原理結合。爲什麼要等到這時候？因爲此時幾何原本六卷翻譯完成，才能據此傳授其原理。這些方法與九章及周髀的句股測量是否不同？並無不同，既然並無不同，其價值何在？在於其原理也。」

¹¹白話譯文：「九章算法句股篇中有數條關於以圭表、矩尺做測量，與現今翻譯的測量法義相較，方法略同，但原理全無，學習者不能知道從何導出，有了現在這本書，用以檢視前述九章內容，則如同觀看自己的手掌，脈絡分明。」

¹²白話譯文：「不知其中有道理、有原則、有方法、有計算。不明白其道理就不能想出解決的方法，不了解其原則就不能計算。明白道理了解原則，其推導頗困難，一旦有方法可計算，照著做則很容易。」

化,非常受到利瑪竇歡迎,因為這正符合耶穌會的傳教策略:以西方的科學和數學來吸引知識份子信奉基督教,他們通常在朝廷位居要津。利瑪竇的知識淵博學者形象,給中國知識份子留下深刻印象,得到他們的信任和尊敬 (Siu, 1995/1996)。

中國古代數學到了明朝時期,不再得到應有的保存和發展。很多重要的經典著作若不是遺失了,就是殘缺不全。徐光啟是在儒家傳統思想成長的學者,意識到數學在教育 and 治國上的重要作用,必須恢復數學以前的重要地位。他在李之藻 (1565~1630) 與利瑪竇合編譯克拉維烏斯編纂的《實用算術摘要》(*Epitome Arithmeticae Practicae* 1583) 並命名為《同文算指》一書的序言中,把當時的情況歸究於兩方面:「廢之緣有二:其一為名理之儒土苴天下之實事;其一為妖妄之術謬言數有神理,能知來藏往,靡所不效。」¹³ (徐光啟, 1984)

把新近接觸到的西方數學引進中國,他認為是令本土數學傳統復甦的方法。他有更寬廣的視野,認為數學不單只是一項學術追求,而且是一門有廣泛用途的學科。1629年他向崇禎皇帝呈上的奏摺「條議曆法修正歲差疏」寫道:「且度數既明,又可旁通衆務,濟時適用。…」¹⁴ (徐光啟, 1984) 對於這些問題,他更明確列出「度數旁通十事」:「其一(天氣),其二(測量),其三(樂律),其四(軍事),其五(會計),其六(建築),其七(機械),其八(輿圖),其九(醫學),其十(時計)。右十條於民事似為關切。…蓋凡物有形有質,莫不資於度數故耳。」¹⁵可見他強調「度數之學」的重要性。

徐光啟是一位了不起的人物,他的思想、洞察力和見解遠遠超出他所處的時代 (白莉民, 1989; 陳衛平, 1992; Jami, Engelfriet, Blue, 2001; Siu, 1995/1996)。他擁有開放的襟懷、接納不同的思想,但同時又抱有懷疑的態度。他重視實驗精神,認為學習科學是團隊的集體活動,明白教育不單要傳遞技術和知識,還要培養科學思想。據此提出一些假設性問題可能會很有趣 (Siu, 1995/1996; Siu, 2011):

- 如果徐光啟集中精力在數學工作上,他會有什麼成就?
- 如果他得悉有關第五公理爭議的各種評論,會發生什麼事情?
- 如果他掌握拉丁文的能力和利瑪竇掌握中文的能力相當,情況會怎樣?
- 如果當時他有機會又有意願到歐洲一行,並將他的經驗帶回中國,有什麼事情會發生?

五、西學傳入中國的過程

可惜歷史並沒有往徐光啟希望的方向發展。徐光啟和利瑪竇合作翻譯《原本》,掀起歐洲科學傳入中國的第一波浪潮,接著的第二波 (或如一些歷史學家形容為第一波的尾流) 和第三波

¹³ 白話譯文:「數學偏廢的原因有二:其一,學者熱衷於心性之學,看輕實用的事務;其二,將數學與占卜巫術連結,以為數學蘊含神理,能洞識未來與過去,無所不能;(致使數學的學習走偏了方向)。」

¹⁴ 白話譯文:「明瞭了數學(度量 and 數字)可以旁通其它事務而能適時應用。」

¹⁵ 白話譯文:「…上面十條是與民生有關的。…大凡有形狀,有質量的東西都可以通過數學來了解。」

出現時已是清朝，這三波浪潮的出現，有相當不同的歷史背景。第一波取得的成就，看來很短暫，隨著明朝的衰亡消失。但現在回顧，我們還能看到它的長遠影響。可是，當時打開的通往外間奇妙世界的小窗，很快便關上，一直要到二百多年後，西方的堅船利炮強行打開一道大門，使這個古老大國在隨後的一百年受盡掠奪與羞辱，因而急切要知道西方世界的事物，並狂熱學習。

西方知識傳入中國三波浪潮的主要特點，可以用三個時代的典型口號歸結起來。十六世紀後期至十七世紀中葉（明朝期間），口號是：「欲求超勝必須會通」；十八世紀初（清朝期間）口號是：「西學中源」；十九世紀晚期（清朝期間）口號是：「師夷長技以制夷」（Jami, 1991; Jami, 1992; Siu, 2009; Siu, 2011; 熊月之, 1994）。正如詹嘉玲（Catherine Jami）指出：「…科學知識在不同文化地區的傳播是不能以單一的眼光去審視，把它看成是不能改變的事物，由一個獨立的文化體移植到另一獨立的文化體。剛好相反，要了解傳播當中的得失和不斷重塑知識的過程，只可以將有關人物置於他們生活的社會，找出他們傳播的動機、策略和根本原因，如此才可以明白得更清楚。」（Jami, 1999）

第二波浪潮由十七世紀中葉開始至十八世紀中葉，這次主要的發動者，不是有學識的士大夫，而是清朝皇帝康熙（在位期是 1654~1722）；西方伙伴不是意大利或葡萄牙的耶穌會傳教士，而主要是法國的耶穌會傳教士，由「太陽王」路易十四（在位期是 1643~1715）在 1685 年派到中國的所謂「皇帝的數學家」（Du, Han, 1992; 韓琦, 1991; Jami, 2002; Jami, 2011; Jami, Han, 2003）。

這群耶穌會傳教士由洪若翰（Jean de Fontaney, 1643~1710）率領，於 1688 年抵達北京。其中傳教士白晉（Joachim Bouvet, 1656~1730），用有趣的日記形式，記錄了他們在宮廷中的生活和職責，並於 1697 年出版（Bouvet, 1697）。他們幫忙完成的一項主要工作是編纂了一百卷的巨著《曆曆淵源》。這項工作由康熙皇帝委託，龐大的工作團隊包括耶穌會傳教士、中國學者和朝廷官方天文學家。自 1713 年啟動，於 1722 年至 1723 年間刊印，分為三個部份：《曆象考成》，《數理精蘊》，《律呂正義》。《數理精蘊》的第二至第四卷幾何篇，相信是根據巴蒂斯（Ignace Gaston Pardies, 1636~1673）在 1671 年出版、1705 年第六版本的《幾何原理》（*Elémens de géométrie*）而編寫的（韓琦, 1991）。

第三波浪潮於十九世紀末的四十年以「自強運動」形式出現，正是第一次鴉片戰爭（1839~1842）至第二次鴉片戰爭（1856~1860）期間，中國受到外來者侵略剝削。這次是由恭親王（1833~1898）領導一眾朝廷官員倡議者，並有中國學者和來自英國或美國的新教傳教士參與，其中包括李善蘭和偉烈亞力，就是這兩人合作完成翻譯全套《幾何原本》。1862 年官方成立同文館，是第一所教授外國語文的學府，原為訓練翻譯員，後來漸漸發展成一所學習西方科學的學府。當時的口號是「師夷長技以制夷」，足以反映這個時期的目標和思想。1866 年，同文館加入了數學科及天文學科，李善蘭成為這個部門之首。1902 年，同文館被納入京師大學堂，即現今北京大學的前身（Siu, 2009; Chan, Siu, 2012; 熊月之, 1994）。

有一本名叫《中西聞見錄》的期刊(英文名稱為 *Peking Magazine*), 於 1872 年八月由美國傳教士丁韋良 (William Alexander Parsons Martin, 1827~1916) 及英國傳教士艾約瑟 (Joseph Edkins, 1823~1905) 創辦。期刊於出版了三十六期後停刊, 1876 年英國人傅蘭雅 (John Fryer, 1839~1928) 及中國學者徐壽 (1818~1884) 參照《中西聞見錄》的形式於上海創辦《格致彙編》(英文名稱為 *The Chinese Scientific and Industrial Magazine*), 可視為《中西聞見錄》的續刊。《中西聞見錄》第一期宣稱:「《中西聞見錄》係仿照西國新聞紙而作, 書中雜錄各國新聞近事, 並講天文地理格物之學。每月出印一次, 如中西士人有所見聞或自抒議論亦可, 寫就送至米市施醫院諸先生處。選擇可登則登之, 庶集思廣益見聞日增焉。」(《中西聞見錄》(1872~1875), 1992)

《中西聞見錄》第 5 期 (1872 年十二月) 刊出此題:「有平三角 (無論銳直鈍諸角形) 內容相切三圓大小不等欲量取三圓之心, 其法何若?」然後說明:「此題天文館諸生徒皆縮手, 四方算學家, 有能得其心者, 可以其圖寄都中天文館, 當送《幾何原本》一部, 且將其圖刊入聞見錄, 揚名天下。」(《中西聞見錄》(1872~1875), 1992)

在三角形內找出三個圓, 使其面積總和為最大的問題, 最先是在西方提出的。義大利數學家馬爾法蒂 (Gianfrancesco Malfatti, 1731~1807) 在 1803 年認為答案應該是三圓彼此兩兩相切, 並且每圓與三角形的兩邊相切, 從此他把全部注意轉向構作這三個圓。其實, 這三個圓的面積總和永遠不可能是最大! 在此之前, 這問題已有日本數學家提出, 當然他們並不知道西方的情況。《中西聞見錄》的第 8 期 (1873 年三月) 刊出馬爾法蒂問題的解答, 第 12 期刊出讀者對這解答的評語, 並承認先前刊出了錯誤解答, 又刊登由天文數學館撰寫對解答的另一評語。在公眾範疇中出現如此熱烈的學術討論, 當時是前所未有的。其後,《龍城書院課藝》刊出兩個不同的解答, 其中之一非常有趣, 採用了兩條當時是新事物的雙曲線相交。這個小插曲說明當時人們如何熱衷於學習西方的數學。畢竟, 歐幾里得幾何在當時的中國仍是一項新課題 (Chan, Siu, 2012; Chan, Siu, 2013), 而非歐幾何學還要等待多年後才傳入中國, 例如, 陳蓋民 (1895~1981) 於 1936 年所著的《非歐派幾何學》。

六、《幾何原本》在十九世紀末對中國的影響

雖然徐光啟不遺餘力把《幾何原本》引進中國, 但中國社會在隨後的三百年究竟如何看待此書呢? 徐光啟在 1607 年說:「此書為用至廣, 在此時尤所急須。...利先生作敘, 亦是最喜其亟傳也。意皆欲公諸人人, 令當世亟習焉, 而習者蓋寡。竊意百年之後必人人習之, 即又以為習之晚也, 而謬謂余先識, 余何先識之有。」(徐光啟, 1984)

不過, 大約一百年之後, 情形距離徐光啟的期盼仍然很遙遠。杜知耕在十七世紀末著有《數學鑰》(杜知耕, 1984), 李子金 (1622~1701) 於 1681 年為此書寫的序言, 提及作者研習西洋幾何之書, 與當時其他學者的取向大不相同, 所謂:「京師諸君子, 即素所號為通人者無不望之反

走，否則掩卷而不讀，或讀之亦茫然不得其解。](清光緒《柘城縣志》，1896)

歐幾里得的《原本》所彰顯的西方數學重要特點，並沒有對十七、十八世紀的中國人產生像在徐光啟身上那樣的強大影響，因此，剛引入的西方數學對中國數學思想也沒有產生如徐光啟想像那麼廣泛和直接的作用，其影響是逐步，在相當長時間後才明顯起來。不過，成果卻在別的方面出現，不在數學，而是在也許具有更重要歷史意義的領域上出現。

1898年發生、歷史稱爲「百日維新」的運動中有三個主要人物：康有爲（1858~1927），梁啟超（1873~1929），譚嗣同（1865~1898），他們受到西方文化影響極大（Siu, 2007; Siu, 2011）。十九世紀末，康有爲著述《實理公法全書》，其後編入他於1913出版的名著《大同書》（康有爲，2012），此書如其書名所示，有《幾何原本》格式的影子。

譚嗣同所著、於死後1899年才出版的《仁學》，更加具有《幾何原本》格式的影子（譚嗣同，1958）。此書讓人聯想到1675年斯賓諾莎所著的《倫理學》（Ethics），開始是定義，然後是公理。譚嗣同爲了教育國人認識現代思想，於1897年在家鄉創立私立學院「瀏陽算學館」。辦學宗旨清楚說明數學是科學的根基，又指出全面學習始於數學，但不止於數學。明顯地，他認爲數學在博雅教育中全人成長方面，佔有的地位高於它的應用性。

梁啟超在他的名著《清代學術概論》（原先於1920年至1921年刊於《改造雜誌》）說明：「自明之末葉，利瑪竇等輸入當時所謂西學者於中國，而學問研究方法上，生一種外來的變化。其初惟治天算者宗之，後則漸應用於他學。」（梁啟超，1980）

雖然得到光緒皇帝（1875~1908在位）的支持，「百日維新」運動最後還是失敗。譚嗣同的悲慘收場是在同年被逮捕處決，康有爲和梁啟超避難日本。一連串事件積累，導致滿清皇朝崩潰和共和國在1911年成立，「百日維新」是重要的一步。（Fairbank, Reischauer, 1973; Hsü, 1995）

梁啟超於1896年八月創立《時務報》，至1898年四月停刊。在第八期他刊登了他的著作《西學書目表附讀西學書法》中的序言和說明，並有此書的廣告（梁啟超，1989）。此著作介紹超過三百本西方學術著作。以下是有關《幾何原本》的摘錄：

「《幾何原本》，徐交定（即徐光啟）僅譯前六卷，至李壬叔（即李善蘭）乃續成之。然第十卷之理甚深，非初學者所能解。即西人學校通習者，亦僅在前六卷。」（梁啟超，2005）

「故偉烈亞力謂西人欲求此書善本，當反索之中國矣。學者初但觀徐譯，久之此學日深，神明其法，自能讀全書也。（《數理精蘊》本較簡，然究以讀原書爲佳。）」（梁啟超，2005）

「《形學備旨》序，謂有許多要題，乃近世新得，不在《幾何原本》之內者，西國每譯幾何，必將要題增補於各卷之後，今李譯皆無之云云。然則讀幾何者，不得不兼讀此書矣。」（梁啟超，2005）

《形學備旨》是由美國傳教士狄考文（Calvin Wilson Mateer, 1836~1908）及中國學者鄒文於1885年共同編纂，相信選譯自羅密士（Elias Loomis, 1811~1889）的著作。

以上先驅人士所做的工作，使《幾何原本》在中國漸漸產生了一些影響，到二十世紀初中

國才開始明白到《幾何原本》的深層意義。著名歷史學家陳寅恪 (1890~1969) 在1930年出版的《幾何原本》滿文譯本之跋說明:「夫歐幾里得之書, 條理統系, 精密絕倫, 非僅論數論象之書, 實為希臘民族精神之所表現。此滿文譯本及數理精蘊本皆經刪改, 意在取便實施, 而不知轉以是失其精意。」(陳寅恪, 1931)

七、寫後感

徐光啟從一開始已經體會到《幾何原本》的作用超越它的數學技術內容, 在其著作《幾何原本雜議》中他說:「此書為益, 能令學理者祛其浮氣, 練其精心, 學事者資其定法, 發其巧思, 故學世無一人不當學。」(徐光啟, 1984) 他繼續說:「此書有五不可學: 躁心人不可學, 驕心人不可學, 滿心人不可學, 妬心人不可學, 傲心人不可學。故學此者不止增才, 亦德基也。」(徐光啟, 1984)

在俄國數學教育家沙雷金 (Igor Fedorovich Sharygin, 1937~2004) 的著作中, 我們可以找到以上想法的現代版本, 他說:「幾何乃人類文化重要的一環... 幾何, 還有更廣泛的數學, 對兒童的品德培育很有益處... 幾何培養數學直覺, 引領學生進行獨立原創思維... 幾何是從初等數學邁向高等數學的最佳途徑。」(Tikhomirov, 2004) 對數學證明他特別有這樣的想法:「學習數學能夠樹立我們的德行, 提昇我們的正義感和尊嚴, 增強我們天生的正直和原則。數學社群的生命建構在 (凡事需經) 證明的理念上, 而這是最崇高的一種道德理念。」(Sharygin, 2004) 法國著名數學家韋依 (André Weil, 1906~1998) 言簡意賅地指出:「嚴謹之於數學家, 猶如道德之於一般人。」李伯 (Lillian Rosanoff Lieber, 1886~1986) 在1942年出版的一本很特別的數學讀物 2002年重印出版, 叫做 *The Education of T.C. Mits: What Modern Mathematics Means to You* (書中主角 T. C. Mits 其實意指 The Celebrated Man In The Street, 即是一般的公民)。在第十四章作者寫下了這樣的一段話:

「所以, 你看到了,
數學可以啟發各色各樣的主題,
其中許多人在討論這些問題時,
都顯得油腔滑調、漫不經心,
這是因為他們不曾受過訓練,
學習用數學家作研究般的嚴謹細心
來檢視一個想法。
:
我們必須試著模仿
直線式思維的模型。
不是像假思想家那樣

喋喋不休地論辯，
而是
安靜的、
誠實的、
謹慎的、
有力量的。
寓意：
千萬別天真，好好地使用數學方法。]¹⁶

數學本來就是一門沒有什麼權威性的學科，但十分可惜，經常使用的教學方法使人產生相反的印象。美國數學教育家蘭伯特 (Magdalene Lampert) 說：「這些被認為是數學文化的特質，是在學校學習時養成的：做數學要按照教師指定的規則；懂得數學就是牢記規則，並在教師提問時適當使用規則；數學正確與否取決於教師提供的答案。」(Lampert, 1990)

四百多年前徐光啟已經指出學習《幾何原本》在培養品德和智力的益處。美國哥倫比亞大學學者巴爾贊 (Jacques Barzun, 1907-2012) 在他的著作《教師在美國》(*Teacher in America*) (Barzun, 1945) 說：「教學不是消失了的藝術，但對它的尊重卻是消失了的傳統。」現今，還有多少教師在教授幾何時保持徐光啟在這方面的傳統呢？

參考資料

1. 白莉民, 1989,《西學東漸與明清之際教育思潮》, 北京：科學教育出版社。
2. 陳方正, 2009,《繼承與叛逆：現代科學為何出現於西方》, 北京：三聯書店。
3. 陳衛平, 1992,《第一頁與胚胎：明清之際的中西文化比較》, 上海：上海人民出版社。
4. 陳寅恪, 1931, 幾何原本滿文譯本跋,《中央研究院歷史語言所集刊》2(3), 281-282。
5. 杜知耕, 1984,《數學鑰》文淵閣四庫全書卷802複印本 (1772~1782), 台北：台灣商務印書館。
6. 郭書春, 2009,《九章算術譯注》, 上海：上海古籍出版社。
7. 韓琦, 1991,《康熙時代傳入的西方數學及其對中國數學的影響》, 博士論文, 自然科學史研究所, 北京：中國科學院。
8. 康有為, 2012,《康有為大同論二種》, 朱維錚編校, 上海：中西書局。
9. 梁啟超, 1980,《清代學術概論》, 台北：台灣中華書局。
10. 梁啟超, 1989,《飲冰室合集》, 二冊, 北京：中華書局。
11. 梁啟超, 2005,《飲冰室合集集外文》三卷, 夏曉虹輯, 北京：北京大學出版社。
12. 劉鈍, 1989, 從徐光啟到李善蘭 — 以《幾何原本》之完璧透視明清文化,《自然辯證法通訊》, 11(3), 55-63。
13. 蕭文強, 1989,《數學證明》, 南京：江蘇教育出版社；修訂本2007, 台北：九章出版社；2008, 大連：大連理工大學出版社。
14. 蕭文強, 2007,「歐先生」來華四百年,《科學文化評論》, 4(6), 97-114。

¹⁶譯文錄自：莉莉安... 李伯,《啟發每個人的小書》, 洪萬生、英家銘譯, 究竟出版社, 台北, 2012年。

15. 譚嗣同, 1958,《仁學》, 北京: 中華書局。
16. 熊月之, 1994,《西學東漸與晚清社會》, 上海: 上海人民出版社。
17. 徐光啟, 1984,《徐光啟集》, 二冊, 王重民編校, 上海: 上海古籍出版社。
- 18.《清光緒柘城縣志》, 第八卷, 1896。
- 19.《中西聞見錄 (*Peking Magazine*)1872~1875》, 1992, 三十六期收於四冊, 南京: 南京古籍書店。
20. Bacon, F. (1906), *Francis Bacon's Essays with Introduction by Oliphant Smeaton*, London: J.M. Dent & Sons.
21. Baker, H. (ed.) (1904~1910), *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester*, Volume I-IV, Cambridge: Cambridge University Press.
22. Barzun, J. (1945), *Teacher in America*, Boston: Little, Brown and Company.
23. Bedini, S. A. (1990), *Thomas Jefferson: Statesman of Science*, New York: Macmillan Publishing Company.
24. Bernard, H. (1935), *Apport scientifique du père Mattieu Ricci à la Chine*, translated by E. C. Werner as Matteo Ricci's Scientific Contribution to China, Peiping (Beijing): Henri Vetch.
25. Bouvet, J. (1697), *Histoire de l'empereur de la Chine: présentée au Roy*, Paris: Etienne Michallet.
26. Chan, Y.C. (陳葉祥), Siu, M.K. (蕭文強) (2012), Facing the change and meeting the challenge: Mathematics curriculum of Tongwen Guan in China in the second half of the nineteenth century, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik — The International Journal of Mathematics Education*, **44**(4), 461-472.
27. Chan, Y.C. (陳葉祥), Siu, M.K. (蕭文強) (2013), The Malfatti Problem in nineteenth-century China, *Mathematics Today*, **49**(5), 229-231.
28. Chemla, K. (1996), Relations between procedure and demonstration, in *History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences*, edited by H. N. Jahnke, N. Knoche, M. Otte, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, pp.69-112.
29. Chemla, K. (2012), Using documents from ancient China to teach mathematical proof, in *Proof and Proving in Mathematics Education*, edited by G. Hanna, M. de Villiers, New York: Springer-Verlag, pp.423-429.
30. Chemla, K., Guo, S.C. (郭書春) (2004), *Les Neuf Chapitres: Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Paris: Dunod.
31. Clavius, C. (1574), *Euclidis Elementorum Libri XV*, Rome: Apud Vincentium Accoltum.
32. Du, S.R. (杜石然), Han, Q. (韓琦) (1992), The contribution of French Jesuits to Chinese science in the seventeenth and eighteenth centuries, *Impact of Science on Society*, **167**, 265-275.
33. Einstein, A. (1957), Autobiographic notes (in German) written at the age of 67, in *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, edited by P. A. Schilepp, 2nd edition, New York: Tudor.
34. Engelfriet, P. (1998), *Euclid in China: The Genesis of the First Chinese Translation of Euclid's Elements Book I-VI (Ji He Yuan Ben; Beijing, 1607) and its Reception Up to 1723*, Leiden: Brill.
35. Engelfriet, P., Siu, M.K. (蕭文強) (2001), XU Guang-qi's attempts to integrate Western

- and Chinese mathematics, in *Statecraft & Intellectual Renewal in Late Ming China: The Cross-cultural Synthesis of XU Guang-qi (1562~1633)*, edited by C. Jami, P. Engelfriet & G. Blue, Leiden: Brill, pp.279-310.
36. Fairbank, J.K., Reischauer, E.O. (1973), *China: Tradition and Transformation*, Boston: Houghton Mifflin.
 37. Fontenelle, B. le B. de (1785), *Préface sur l'Utilité des Mathématiques et de la Physique, in Œuvres de Monsieur de Fontenelle, Des Académies Française, des Sciences, & des Belles-Lettres, & de la Société Royale de Londres, Tome Premier*, Paris: Edition Cazin.
 38. Grabiner, J. V. (1988), The centrality of mathematics in the history of Western thought, *Mathematics Magazine*, **61**, 220-230.
 39. Heath, T. L. (1925), *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 2nd edition, Cambridge: Cambridge University Press.
 40. Hsü, C. Y. (徐中約) (1995), *The Rise of Modern China*, 5th edition, Oxford: Oxford University Press.
 41. Huang, R. (黃仁宇) (1981), 1587, *A Year of No Significance*, New Haven: Yale University Press.
 42. Huang, R. (黃仁宇) (1988), *China: A Macro History*, Armonk: M.E. Sharpe.
 43. Jami, C. (1991), Scholars and mathematical knowledge during the late Ming and early Qing, *Historia Scientiarum*, **42**, 99-109.
 44. Jami, C. (1992), Western mathematics in China, seventeenth century and nineteenth century, in *Science and Empires: Historical Studies About European Expansion and Scientific Development*, edited by P. Petitjean et al, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 79-88.
 45. Jami, C. (1999), "European science in China" or "Western Learning"? Representations of cross-cultural transmission, 1600~1800, *Science in Context*, **12**(3), 413-434.
 46. Jami, C. (2002), Imperial control and Western learning: The Kangxi Emperor's performance, *Late Imperial China*, **23**(1), 28-49.
 47. Jami, C. (2011), *The Emperor's New Mathematics: Western Learning and Imperial Authority During the Kangxi Reign (1662~1722)*, Oxford: Oxford University Press.
 48. Jami, C., Engelfriet, P., Blue, G. (eds.) (2001), *Statecraft and Intellectual Renewal in Late Ming China: The Cross-Cultural Synthesis of Xu Guangqi (1562~1633)*, Leiden: Brill.
 49. Jami, C., Han, Q. (韓琦) (2003), The reconstruction of Imperial mathematics in China during the Kangxi reign (1662~1722), *Early Science & Medicine*, **8**(2), 88-110.
 50. Jefferson, T. (1984), *Thomas Jefferson Writings*, New York: The Library of America.
 51. Kant, I. (2004), *Prolegomena to Any Future Metaphysics that Will be Able to Come Forward as Science, with Selections from the Critique of Pure Reason*, translated and edited by G. Hartfield, revised edition, Cambridge: Cambridge University Press.
 52. Kline, M. (1953), *Mathematics in Western Culture*, New York: Oxford University Press.
 53. Lampert, M (1990), When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching, *American Educational Research Journal*, **27**, 29-63.
 54. Lemay, J .A .L., (ed.) (1988), *An Early American Reader*, Washington D. C.: U. S.

Information Agency.

55. Lieber, L. R. (1944), *The Education of T.C. Mits: What Modern Mathematics Means to You*, New York: W. W. Norton and Company.
56. Linclon, A. (1989), *Abraham Lincoln: Speeches and Writings 1859~1865*, New York: The Library of America.
57. Malthus, T. R. (1914), *An Essay on Population*, with introduction by W. T. Layton, London: Dent.
58. Pemberton, H. (1728), *A View of Sir Isaac Newton's Philosophy*, London: S. Palmer.
59. Plato (1942), *The Republic of Plato, translated with Introduction by Francis MacDonalld Cornford*, Oxford: Clarendon Press.
60. Proclus (1970), *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, translated by G.R. Morrow with a new foreword by I. Mueller, Princeton: Princeton University Press.
61. Ricci, M. (利瑪竇) (1953), *China in the Sixteenth Century: The Journals of Mathew Ricci, 1583~1610*, translated by I. J. Gallagher, New York: Random House.
62. Russell, B. (1967), *The Autobiography of Bertrand Russell*, Volume 1, London: Allen & Unwin.
63. Sharygin, I. F. (2004), On the concept of school geometry, in *Trends and Challenges in Mathematics Education*, J. Wang, B. Xu (eds.), Shanghai: East China Normal University Press.
64. Siu, M. K. (蕭文強), (1993), Proof and pedagogy in ancient China: Examples from Liu Hui's commentary on *Jiu Zhang Suan Shu*, *Educational Studies in Mathematics*, **24**, 345-357.
65. Siu, M. K. (蕭文強), (1995/1996), Success and failure of XU Guang-qi: Response to the first dissemination of European science in Ming China, *Studies in History of Medicine and Science*, New Series, **14**(1-2), 137-178.
66. Siu, M. K. (蕭文強) (2008), Proof as a practice of mathematical pursuit in a cultural, socio-political and intellectual context, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik - The International Journal of Mathematics Education*, **40** (3), 355-361.
67. Siu, M. K. (蕭文強) (2009), Mathematics education in East Asia from antiquity to modern times, in *Dig Where You Stand: Proceedings of a Conference on On-going Research in the History of Mathematics Education*, Garðabær, June 20-24, 2009, edited by K. Bjarnadottir, F. Furinghetti, G. Schubring, Reykjavik: University of Iceland, pp.197-208.
68. Siu, M. K. (蕭文強) (2011), 1607, a year of (some) significance: Translation of the first European text in mathematics — Elements — into Chinese, in *History and Epistemology in Mathematics Education*, edited by E. Barbin, M. Kronfellner, C. Tzanakis, Vienna: Verlag Holzhausen, pp.573-589.
69. Siu, M. K. (蕭文強) (2012), Proof in the Western and Eastern traditions: Implications for mathematics education, in *Proof and Proving in Mathematics Education*, edited by G. Hanna, M. de Villiers, New York: Springer-Verlag, pp.431-440.
70. Spinoza, B. (1994), *A Spinoza Reader: The Ethics and Other Works*, edited and translated by E. Curley, Princeton: Princeton University Press.
71. Stahl, S. (1993), *The Poincaré Half-Plane: A Gateway To Modern Geometry*, Boston:

Jones and Bartlett Publishers.

72. Tikhomirov, V. M. (2004), In memoriam: Igor F. Sharygin (1937~2004), ICMI Bulletin, No. 55, 69.
73. Whiteside, D. T. (1970), Sources and strengths of Newton's early mathematical thought, in *The Annus Mirabilis of Sir Isaac Newton 1666~1666*, edited by R. Palter, Cambridge: MIT Press, pp. 69-87.
74. Whiteside, D. T. (1982), *Newton the Mathematician*, in *Contemporary Newtonian Research*, edited by Z. Bechler, Dordrecht: D. Reidel Publishing, pp.109-127.
75. Xu, Y. B. (徐義保) (2005), The first Chinese translation of the last nine books of Euclid's Elements and its source, *Historia Mathematica*, **32** (1), 4-32.

—本文作者為香港大學數學系退休教授—