數學傳播 38卷3期, pp. 93-96

回響: 一道不等式的另一種證法

連威翔

在 142 期的「從 Cauchy 不等式的一種證法談起」一文當中, 作者以特殊的方法證明以下命題:

命題 1. 若 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 爲滿足 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ 的正數, $\lambda \geq \frac{1}{n^2}$, 則

$$\Big(a_1 + \frac{\lambda}{a_1}\Big)\Big(a_2 + \frac{\lambda}{a_2}\Big)\cdots\Big(a_n + \frac{\lambda}{a_n}\Big) \geq \Big(\frac{1}{n} + n\lambda\Big)^n. \tag{1}$$

在本文中, 筆者將從上述命題於 $n = 2, 3$ 的情形開始證明, 再證明一般 n 的情形, 以期提供另外一種證明方式。

(一) 當命題 1 的 $n = 2$ 時, 命題爲:

命題 2. 若 a_1, a_2 爲滿足 $\displaystyle\sum_{i=1}^{2} a_i = 1$ 的正數, $\lambda \geq \dfrac{1}{4}$, 則

$$\Big(a_1 + \frac{\lambda}{a_1}\Big)\Big(a_2 + \frac{\lambda}{a_2}\Big) \geq \Big(\frac{1}{2} + 2\lambda\Big)^2 \tag{2}$$

證明:

$$\begin{aligned}
\text{左式} &= \Big(\frac{a_1^2 + \lambda}{a_1}\Big)\Big(\frac{a_2^2 + \lambda}{a_2}\Big) \\
&= \Big[\frac{(a_1 - \frac{1}{2})^2 + a_1 + \lambda - \frac{1}{4}}{a_1}\Big]\Big[\frac{(a_2 - \frac{1}{2})^2 + a_2 + \lambda - \frac{1}{4}}{a_2}\Big] \\
&\geq \Big(\frac{a_1 + \lambda - \frac{1}{4}}{a_1}\Big)\Big(\frac{a_2 + \lambda - \frac{1}{4}}{a_2}\Big) \\
&= \Big(1 + (\lambda - \frac{1}{4})\frac{1}{a_1}\Big)\Big(1 + (\lambda - \frac{1}{4})\frac{1}{a_2}\Big) \\
&= 1 + (\lambda - \frac{1}{4})\cdot(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}) + (\lambda - \frac{1}{4})^2 \cdot \frac{1}{a_1 a_2}
\end{aligned} \tag{3}$$

由算幾不等式, 可知

$$a_1a_2 \le \Big(\frac{a_1+a_2}{2}\Big)^2 = \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{a_1a_2} \ge 4 \tag{4}$$

一樣利用算幾不等式, 並利用 (4), 可得

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \ge 2\cdot\Big(\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\Big)^{\frac{1}{2}} \ge 2\cdot 2 = 4 \tag{5}$$

將 (4), (5) 代入 (3) 可得

$$\begin{aligned}
\text{左式} &\ge 1 + \Big(\lambda - \frac{1}{4}\Big)\cdot 4 + \Big(\lambda - \frac{1}{4}\Big)^2\cdot 4\\
&= \Big[2(\lambda - \frac{1}{4}) + 1\Big]^2\\
&= \Big(\frac{1}{2} + 2\lambda\Big)^2 = \text{右式},
\end{aligned}$$

(2) 得證, 且當不等式的等號成立時, 不難由 (3), (4), (5) 看出

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \tag{6}$$

(二) 當命題 1 的 $n=3$ 時, 命題爲:

命題 3. 若 a_1, a_2, a_3 爲滿足 $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_i = 1$ 的正數, $\lambda \ge \dfrac{1}{9}$, 則

$$\Big(a_1 + \frac{\lambda}{a_1}\Big)\Big(a_2 + \frac{\lambda}{a_2}\Big)\Big(a_3 + \frac{\lambda}{a_3}\Big) \ge \Big(\frac{1}{3} + 3\lambda\Big)^3 \tag{7}$$

證明: 由 (6), 可預期 (7) 的左式其最小值可能發生在 $a_1 = a_2 = a_3 = \dfrac{1}{3}$ 時, 因此對 (7) 的左式進行類似 (3) 的操作如下:

$$\begin{aligned}
\text{左式} &= \Big(\frac{a_1^2+\lambda}{a_1}\Big)\Big(\frac{a_2^2+\lambda}{a_2}\Big)\Big(\frac{a_3^2+\lambda}{a_3}\Big)\\
&= \prod_{k=1}^{3}\frac{(a_k-\frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3}a_k + \lambda - \frac{1}{9}}{a_k} \ge \prod_{k=1}^{3}\frac{\frac{2}{3}a_k + (\lambda - \frac{1}{9})}{a_k} = \prod_{k=1}^{3}\Big[\frac{2}{3} + (\lambda - \frac{1}{9})\cdot\frac{1}{a_k}\Big]\\
&= \frac{8}{27} + \frac{4}{9}\cdot(\lambda - \frac{1}{9})\cdot\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{a_k} + \frac{2}{3}\cdot(\lambda-\frac{1}{9})^2\cdot\sum_{i<j}\frac{1}{a_ia_j} + (\lambda - \frac{1}{9})^3\cdot\frac{1}{a_1a_2a_3}
\end{aligned}\tag{8}$$

由算幾不等式, 可知

$$a_1a_2a_3 \le \Big(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\Big)^3 = \Big(\frac{1}{3}\Big)^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow \frac{1}{a_1a_2a_3} \ge 27 \tag{9}$$

一樣利用算幾不等式, 並利用 (9), 可得

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{a_k}\geq 3\cdot\left(\frac{1}{a_1a_2a_3}\right)^{\frac{1}{3}}\geq 9 \tag{10}$$

$$\sum_{i<j}\frac{1}{a_ia_j}\geq 3\cdot\left(\frac{1}{a_1^2a_2^2a_3^2}\right)^{\frac{1}{3}}=3\cdot\left(\frac{1}{a_1a_2a_3}\right)^{\frac{2}{3}}\geq 27 \tag{11}$$

將 (9), (10), (11) 代入 (8) 可得

$$\begin{aligned}\text{左式}&\geq\frac{8}{27}+4\cdot(\lambda-\frac{1}{9})+18\cdot(\lambda-\frac{1}{9})^2+27\cdot(\lambda-\frac{1}{9})^3\\&=\left[3\cdot(\lambda-\frac{1}{9})+\frac{2}{3}\right]^3\\&=\left(\frac{1}{3}+3\lambda\right)^3=\text{右式},\end{aligned}$$

(7) 得證, 且當不等式的等號成立時, 可由 (8), (9), (10), (11) 看出有

$$a_1=a_2=a_3=\frac{1}{3}. \tag{12}$$

(三) 由以上針對命題 1 於 $n=2,3$ 的情形之證明過程, 我們可對 (1) 中 n 爲任意滿足$n\geq 2$ 之正整數的情形加以證明, 而得到更一般的結果, (1) 的證明如下:

證明:

$$\begin{aligned}\text{左式}&=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k^2+\lambda}{a_k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{(a_k-\frac{1}{n})^2+\frac{2}{n}a_k+\lambda-\frac{1}{n^2}}{a_k}\right]\geq\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{2}{n}+(\lambda-\frac{1}{n^2})\cdot\frac{1}{a_k}\right]\\&=\left(\frac{2}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^{n-1}\cdot\left(\lambda-\frac{1}{n^2}\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}+\cdots\\&\quad+\left(\frac{2}{n}\right)^{n-k}\cdot\left(\lambda-\frac{1}{n^2}\right)^k\cdot\sum_{\substack{i_s<i_t\\ \text{for } s<t}}\frac{1}{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}}+\cdots\\&\quad+\left(\lambda-\frac{1}{n^2}\right)^n\cdot\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}\end{aligned} \tag{13}$$

由算幾不等式, 可知

$$a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n\leq\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\right)^n=\left(\frac{1}{n}\right)^n\Rightarrow\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}\geq n^n. \tag{14}$$

觀察 (13) 中的一般項

$$\left(\frac{2}{n}\right)^{n-k}\cdot\left(\lambda-\frac{1}{n^2}\right)^k\cdot\sum_{\substack{i_s<i_t\\ \text{for } s<t}}\frac{1}{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}}$$

其中的求和式 $\displaystyle\sum_{\substack{i_s<i_t\\ \text{for } s<t}} \frac{1}{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}}$ 共有 C_k^n 項, 且對任意滿足 $1\le i\le n$ 的足標 i 而言, 在所有 C_k^n 項中共有 C_{k-1}^{n-1} 項含有 $\dfrac{1}{a_i}$ 這個因式, 因此, 可利用算幾不等式及 (14) 的結果, 得知

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i_s<i_t\\ \text{for } s<t}} \frac{1}{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}} &\ge C_k^n\cdot\Big(\prod_{\substack{i_s<i_t\\ \text{for } s<t}}\frac{1}{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}}\Big)^{\frac{1}{C_k^n}}\\ &=C_k^n\cdot\Big(\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}\Big)^{\frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_k^n}}\ge C_k^n\cdot(n^n)^{\frac{k}{n}}=C_k^n\cdot n^k \qquad (15)\end{aligned}$$

其中

$$\frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_k^n}=\frac{(n-1)!/[(k-1)!(n-k)!]}{n!/[k!(n-k)!]}=\frac{k}{n},\quad 1\le k\le n.$$

將 (15) 的結果代入 (13), 可得

$$\begin{aligned}\text{左式}\ge&\Big(\frac{2}{n}\Big)^n+\Big(\frac{2}{n}\Big)^{n-1}\cdot\Big(\lambda-\frac{1}{n^2}\Big)\cdot C_1^n\cdot n+\cdots\\ &+\Big(\frac{2}{n}\Big)^{n-k}\cdot\Big(\lambda-\frac{1}{n^2}\Big)^k\cdot C_k^n\cdot n^k+\cdots+\Big(\lambda-\frac{1}{n^2}\Big)^n\cdot C_n^n\cdot n^n\\ =&\Big(\frac{2}{n}\Big)^n+C_1^n\Big(\frac{2}{n}\Big)^{n-1}\Big(n\lambda-\frac{1}{n}\Big)+\cdots+C_k^n\Big(\frac{2}{n}\Big)^{n-k}\Big(n\lambda-\frac{1}{n}\Big)^k+\cdots+\Big(n\lambda-\frac{1}{n}\Big)^n\\ =&\sum_{k=0}^n C_k^n\Big(n\lambda-\frac{1}{n}\Big)^k\cdot\Big(\frac{2}{n}\Big)^{n-k}\\ =&\Big(n\lambda-\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\Big)^n=\Big(\frac{1}{n}+n\lambda\Big)^n=\text{右式},\end{aligned}$$

(1) 得證, 且當不等式的等號成立時, 若且唯若 (13) 中的 $\ge$ 及 (15) 中的兩個 $\ge$ 均取等號。其中 (13) 的 $\ge$ 取等號時, 表示:

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n} \qquad (16)$$

而有了 (16), 將先使 (14) 的等號成立, 因此 (15) 的第二個 $\ge$ 等號成立。此外, (16) 也使 (15) 最左端的求和式中每一項皆相等 (均為 n^k), 故 (15) 的第一個 $\ge$ 等號成立。因此, (16)就是 (1) 等號成立的充要條件。

綜合以上所述, 可知命題 1 正確, 且從證明過程中可知 $\lambda\ge\dfrac{1}{n^2}$ 的限制有其必要性。

—本文作者投稿時任職苗栗縣竹南鎮景鴻工程行—