數學傳播 38卷3期, pp. 75-78

從一道高考題體驗波利亞的實驗與探索的精神

周國定

波利亞 (George Polya, 1887~1985) 宣導要發展學生的探索性思維能力。在他的著名論著《怎樣解題》(*How to Solve It*) 中, 他寫道:「因爲在證明一個定理之前你先得猜測證明的思路, 你必須觀察、實驗、歸納、猜想。一次又一次地嘗試、探索。」

本文以一道高考題爲例, 體驗波利亞的實驗與探索的精神。

問題: (1) 證明: 對 $\forall a \in N_+$, $\exists b, c \in N_+$ $(b < c)$ 使得 a^2, b^2, c^2 成等差數列;

(2) 證明: 存在無窮多個互不相似的三角形 $\triangle_n$, 其邊長 a_n, b_n, c_n 爲正整數, 且 a_n^2, b_n^2, c_n^2 爲等差數列。(2010, 江西卷)

問題中, 記號 N_+ 表示正整數集合, 下同。

分析: 該題的特點是缺乏統一的、明確的運算方式, 或者說, 缺乏直接的邏輯通道, 旨在考查學生的探索能力。

先談命題 (1)

面對一個問題, 當我們“別無門路時, 總可以從觀察、實驗入手” (波利亞語, 下文凡是帶引號的文字均爲波利亞語, 引自波利亞《怎樣解題》[1]。)

實驗: 取 $a = 1$, 由 $2b^2 = 1 + c^2$ 得: c 爲奇數。

取 $c = 1$, 得 $b = 1$, 與 $b < c$ 矛盾 (捨);

取 $c = 3$, 得 $b = \sqrt{5}$ (捨);

取 $c = 5$, 得 $b = \sqrt{13}$ (捨);

取 $c = 7$, 得 $b = 5$。

我們得到一組合要求的值: $a = 1$, $b = 5$, $c = 7$。

取 $a = 2$, 得到: $a = 2$, $b = 10$, $c = 14$。

歸納: 比較這兩組資料, 不難看出它們之間存在共性特徵, 即 a, b, c 之間存在如下的倍數關係: $a = n$, $b = 5n$, $c = 7n$, $(n \in N_+)$。

猜想: $\forall a = n \in N_+$, 可取 $b = 5n$, $c = 7n$。

驗證: 這是顯然的。$\because\ 2 \cdot (5n)^2 = n^2 + (7n)^2$, 對 $\forall n \in N_+$都成立。即命題 (1) 正確。

下面重點談命題 (2)

"符號有助於思維"。爲了說理方便, 引進記號: 把滿足條件 $2b^2 = a^2+c^2$ 且 $a < b < c$ 的正整數陣列 a, b, c, 記爲 $[a, b, c]$。集合 $M = \{[a, b, c] \mid a, b, c$ 可以構成三角形, 即 $a+b > c\}$, 規定: M 中的陣列 $[a, b, c]$ 與 $[d, e, f]$, 若 $\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} = \dfrac{c}{f}$, 則認爲 $[a, b, c]$ 與 $[d, e, f]$ 是同一組。這樣, 命題 (2) 轉化爲證明: M 含有無限多個元素。

一、分析

我們可以採用問題 (1) 的實驗方法, 但很快會發現這種"樸素"的收集資料方法會變得越來越困難, 而且, 也是更爲重要的, 很難將收集到的資料納入到一個模式。因此, 我們必須另找出路!

爲了有效地探索, 波利亞指出, 一要"收集到足夠的材料": "你是否利用了所有的已知條件? 你是否考慮了包含在問題中的所有必要概念"; 二要"動員我們以前學過的知識": "你是否知道與此有關的問題? 你是否知道一個可能用得上的定理?"

眼下, 我們要找的陣列 $[a, b, c]$ 必須能構成三角形, 且 $2b^2 = a^2 + c^2$。"看著未知數", 盯著"三角形" 及 " $2b^2 = a^2 + c^2$"。我們能聯想到 "直角三角形" 的畢氏定理 "$c'^2 = a'^2 + b'^2$", 這裏會有什麼關聯嗎?

由 $c'^2 = a'^2 + b'^2$ (不妨設 $0 < a' < b' < c'$), 不難得到:

$$2c'^2 = 2a'^2 + 2b'^2 = (b' - a')^2 + (b' + a')^2$$

因此, 可令: $a = b' - a'$, $b = c'$, $c = b' + a'$。看來我們可從勾股陣列 a', b', c' (記爲 (a', b', c')) 入手, 尋找 $[a, b, c]$。不妨試一試:

二、實驗、探索

從最常見的勾股數試起:

由 $(a', b', c') = (3, 4, 5)$ 得: $[a, b, c] = [1, 5, 7]$, 顯然 $[1, 5, 7] \notin M$;

由 $(a', b', c') = (5, 12, 13)$ 得: $[a, b, c] = [7, 13, 17]$, $[7, 13, 17] \in M$;

由 $(a',b',c')=(7,24,25)$ 得: $[a,b,c]=[17,25,31]$, $[17,25,31]\in M$;

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

在解題過程中, 我們要隨時"感覺到自己進展的步伐"。我們已嘗到甜頭, 增強了信心。爲此, 由 (3,4,5) 出發, 構想較爲一般的勾股陣列模式 $(a',b',b'+1)$ $(a',b'\in N_+)$。

要使 $a'^2+b'^2=(b'+1)^2$, 需 $b'=\dfrac{a'^2-1}{2}$, $\because$ $a',b'\in N_+$,

取 $a'=2n+1$ $(n\geq 2, n\in N_+)$, 則 $b'=2n^2+2n$。故可得較一般的勾股數模式: $(2n+1,2n^2+2n,2n^2+2n+1)$。

$$\begin{aligned}\therefore\quad &[(2n^2+2n)-(2n+1),2n^2+2n+1,(2n^2+2n)+(2n+1)]\\ =&[2n^2-1,2n^2+2n+1,2n^2+4n+1],\qquad \text{記爲 } [a_n,b_n,c_n]。\end{aligned}$$

三、檢驗

(i) 對 $\forall\ n\geq 2$, $[a_n,b_n,c_n]\in M$。

事實上, $a_n+b_n-c_n=(2n^2-1)+(2n^2+2n+1)-(2n^2+4n+1)=2n(n-1)>0$。

(ii) 集合 $\{[a_n,b_n,c_n]\mid n\in N_+, n\geq 2\}$中的任兩個元素都不相同。

事實上, 任取 $m,n\in N_+$, $m\neq n$ 且 $m,n\geq 2$, $a_n=2n^2-1$, $b_n=2n^2+2n+1$, $c_n=2n^2+4n+1$; $a_m=2m^2-1$, $b_m=2m^2+2m+1$, $c_n=2m^2+4m+1$。若

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{c_n}=\frac{b_m}{c_m}&\Rightarrow\frac{2n^2+2n+1}{2n^2+4n+1}=\frac{2m^2+2m+1}{2m^2+4m+1}\Rightarrow\frac{2n^2+2n+1}{2n}=\frac{2m^2+2m+1}{2m}\\ &\Rightarrow 2n+\frac{1}{n}+2=2m+\frac{1}{m}+2\Rightarrow 2mn=1,\end{aligned}$$

這與 $m,n\geq 2$ 矛盾。

(iii) 由 (ii) 知: 集合 $\{[a_n,b_n,c_n]\mid n\in N_+,n\geq 2\}$ 中有無限多個元素。因爲 $\{[a_n,b_n,c_n]\mid n\in N_+,n\geq 2\}\subseteq M$, 所以, M 中有無限多個元素。命題 (2) 得證。

四、回顧

波利亞十分重視解題後的回顧: "$\cdots\cdots$ 你能否用別的方法導出這個結果? 你能不能一下子看出它來? $\cdots\cdots$" 上面我們用實驗探索的方法證明瞭集合 M 中有無限多個元素。其實, 瞭解勾股數通式的讀者可直接給出 M 中的所有元素。

事實上, 容易得到:

$$[a,b,c]\Leftrightarrow\Big(\frac{a-c}{2},\frac{a+c}{2},b\Big)$$

即每一陣列 $[a,b,c]$ 均被勾股陣列 $\Big(\dfrac{a-c}{2},\dfrac{a+c}{2},b\Big)$ 唯一確定。

另一方面, 勾股數的通解式 (丟番圖給出, 它表示了所有的勾股數) 爲:
$2mn, m^2-n^2, m^2+n^2$ (其中, $m>n$ 且 m,n 爲一奇、一偶的互質正整數)
因此, 可令:

$$\begin{cases} \dfrac{c-a}{2}=\min\{2mn, m^2-n^2\} \\ \dfrac{c+a}{2}=\max\{2mn, m^2-n^2\}, \\ b=m^2+n^2 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} a=|m^2-2mn-n^2| \\ b=m^2+n^2 \\ c=m^2+2mn-n^2 \end{cases}$$

爲了使 $[a,b,c]\in M$, 只需添加條件: $a+b>c$, 即

$$|m^2-2mn-n^2|+(m^2+n^2)>m^2+2mn-n^2$$

解得: $m>(2+\sqrt{3})n$ 或 $n<m<\sqrt{3}n$。

$\therefore\ M=\{[a,b,c]\mid m>(2+\sqrt{3})n$ 或 $n<m<\sqrt{3}n$ 且 m,n 爲一奇、一偶的互質正整數$\}$。

結束語

波利亞強調, 要“教會年輕人去思考”, 培養學生的“獨立性、能動性和創新精神”。這一宗旨在提倡素質教育的今天仍具有積極的指導意義。從該題的解題過程可以看出波利亞實驗、探索的思路的確能提高學生的探索能力。它是在培養學生思考力的基礎上, 提高學生的應試能力, 有利於搞好素質教育, 克服題海戰術。

参考資料

1. 波利亞著,《怎樣解題》, 科學出版社, 北京, 1982。

—本文作者任教江蘇省揚州中學—