數學傳播 38卷3期, pp. 65-74

勾股數迭代公式之研究與發展

賴昱維

摘要: 清代數學家劉彝程由勾股數爲邊長所構作的幾何圖形, 以迭代的方式, 產生了一組的勾股數迭代公式, 此公式類似於貝格倫以及普萊斯的畢氏三元數迭代公式。本研究由勾股數爲邊長所構作的幾何圖形之性質, 以迭代的方式, 找到了劉彝程的另外兩組公式, 以及重新產生了貝格倫和普萊斯的公式。

關鍵詞: 勾股數、勾股形構作、迭代公式。

緒論

魏晉時期數學家劉徽以勾股數爲邊長構作了兩種幾何圖形, 並得到兩組勾股數關係式, 清代數學家劉彝程則進一步由這兩組關係式產生了一組的勾股數迭代公式 (吳裕賓、朱家生 (1990); Paul Yiu (1996)), 這組公式竟然類似於貝格倫 (B. Berggrens) 和普萊斯 (H. Lee Price) 的畢氏三元數迭代公式 (Wikipedia, the free encyclopedia, 2013)。由於貝格倫和普萊斯各有三組不同性質符號的公式, 於是, 我猜想 : (一) 劉彝程應該還有另外兩組不同性質符號的公式; (二) 由勾股數爲邊長所構作的幾何圖形可以產生貝格倫和普萊斯的公式。因爲劉彝程的要旨在於透過幾何的構作與聯立方程式的求解, 便可以獲得這種傳宗接代的公式, 所以我嘗試以勾股數爲邊長構作更多的幾何圖形, 藉此找到更多的勾股數關係式, 進而證明我的猜想。

預備知識

名詞定義

勾股數 : 又名商高數或畢氏三元數, 是符合畢氏定理 $(a^2+b^2=c^2)$ 的正整數解 (a,b,c)。

勾股形構作 : 以勾股數爲邊長所構成的幾何圖形, 例如畢氏三角形, 它的三邊長就是勾股數。

勾股數迭代公式 : 從一組勾股數 (a,b,c) 產生另一組勾股數 (a',b',c') 的公式。

劉徽的勾股數關係式

在《九章算術 · 勾股章》第十二題的註釋中, 劉徽提出了兩種整數勾股形的作法 (Paul Yiu (1996)), 並得到兩組勾股數關係式, 分別爲以下的引理一和引理二:

引理一: 勾股數 a,b,c 滿足關係式 (1): $2(c-a)(c-b)=(a+b-c)^2$。

證明: 劉徽先將邊長分別爲勾股數 a,b,c 的三個正方形 $(C+D, C+E, A+B+C+D+E)$ 按照圖一的方式構作, 這時候正方形 $(A+B+C+D+E)$ 面積恰爲右下 $(C+E)$ 和左上 $(C+D)$ 兩個正方形面積的和, 因此, 右上 (B) 和左下 (A) 兩個矩形面積的和恰爲中間正方形 (C) 的面積, 故得勾股數關係式 (1): $2(c-a)(c-b)=(a+b-c)^2$。

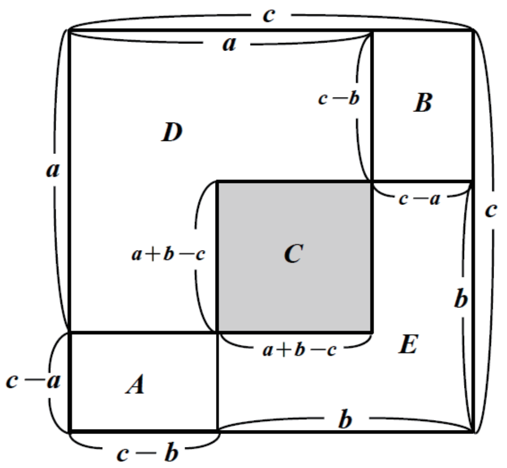

圖 1: 劉徽 (Paul Yiu (1996))

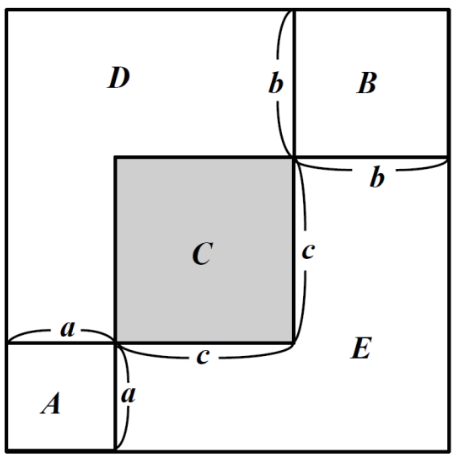

圖 2: 劉徽 (Paul Yiu (1996))

引理二: 勾股數 a,b,c 滿足關係式 (2): $2(c+a)(c+b)=(a+b+c)^2$。

證明: 劉徽又以邊長分別爲勾股數 a,b,c 的三個正方形 (A,B,C) 按照圖二的方式構作, 這時候中間的正方形 (C) 面積恰爲右上 (B) 和左下 (A) 兩個正方形面積的和, 因此, 右下 $(C+E)$ 和左上 $(C+D)$ 兩個矩形面積的和恰爲大的正方形 $(A+B+C+D+E)$ 面積, 故得勾股數關係式 (2): $2(c+a)(c+b)=(a+b+c)^2$。

劉彝程的第一組勾股數迭代公式

劉彝程在1894年根據引理一和引理二得到勾股數的迭代公式 (吳裕賓、朱家生 (1990); Paul Yiu (1996)), 也就是以下的定理一:

定理一：由勾股數 a, b, c 迭代產生新的勾股數 (a', b', c') 公式：$\begin{cases} a' = 2a + b + 2c \\ b' = a + 2b + 2c \\ c' = 2a + 2b + 3c \end{cases}$。

證明：劉彝程從劉徽的勾股數關係式 (1) 和 (2) 得到新的勾股數的迭代方法：

從一勾股數 (a, b, c) 構作新的勾股數 (a', b', c'), 符合：$\begin{cases} c' - a' = c + b \\ c' - b' = c + a \\ a' + b' - c' = a + b + c \end{cases}$,

由此解得新的勾股數 (a', b', c')：$\begin{cases} a' = 2a + b + 2c \\ b' = a + 2b + 2c \\ c' = 2a + 2b + 3c \end{cases}$。

貝格倫的畢氏三元數迭代公式

貝格倫在 1934 年首先提出圖三的費氏盒 (A Fibonacci box) 的想法, 這是一個 2×2 的矩陣, 他先在矩陣上排填入兩個正整數 q 和 q', 再按照費氏規則 (Fibonacci rule), 得到下排兩個正整數 p 和 p'：$q + q' = p$ 以及 $q + p = p'$, 所以 q, q', p, p' 是一組費氏數列 (Fibonacci sequence), 由此產生互質畢氏三元數 (primitive Pythagorean triples)

$[a, b, c]$：$\begin{cases} a = q'p' \\ b = 2qp \\ c = qp' + q'p \end{cases}$ (Wikipedia, the free encyclopedia, 2013)。

$$\begin{bmatrix} q & q' \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{cases} q + q' = p \\ q + p = p' \end{cases}} \begin{bmatrix} q & q' \\ p & p' \end{bmatrix}$$

圖 3: Wikipedia, the free encyclopedia, 2013。

接著, 他以費氏盒提出圖四的互質畢氏三元數之樹 (The tree of primitive Pythagorean triples) 後, 再利用線性變換 (linear transformations) 得到以下三組性質符號不同的畢氏三元數迭代公式 (H. Lee Price (2008))：

$$(1) \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

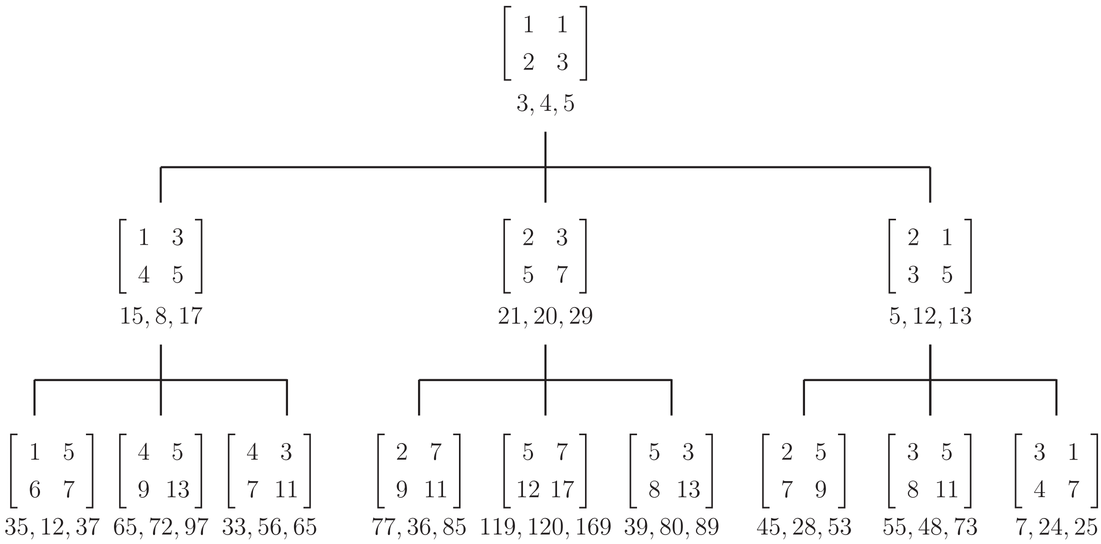

圖 4: B. Berggrens (Price, H. Lee (2008))。

普萊斯的畢氏三元數迭代公式

而普萊斯也在 2008 年以另一種費氏盒提出圖五的互質畢氏三元數之樹後, 也利用線性變換得到以下三組性質符號不同的畢氏三元數迭代公式 (H. Lee Price (2008)) :

$$(1)\begin{bmatrix}a'\\b'\\c'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&-1\\-2&2&2\\-2&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\quad(2)\begin{bmatrix}a'\\b'\\c'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&1\\2&-2&2\\2&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\quad(3)\begin{bmatrix}a'\\b'\\c'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&1\\2&2&2\\2&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

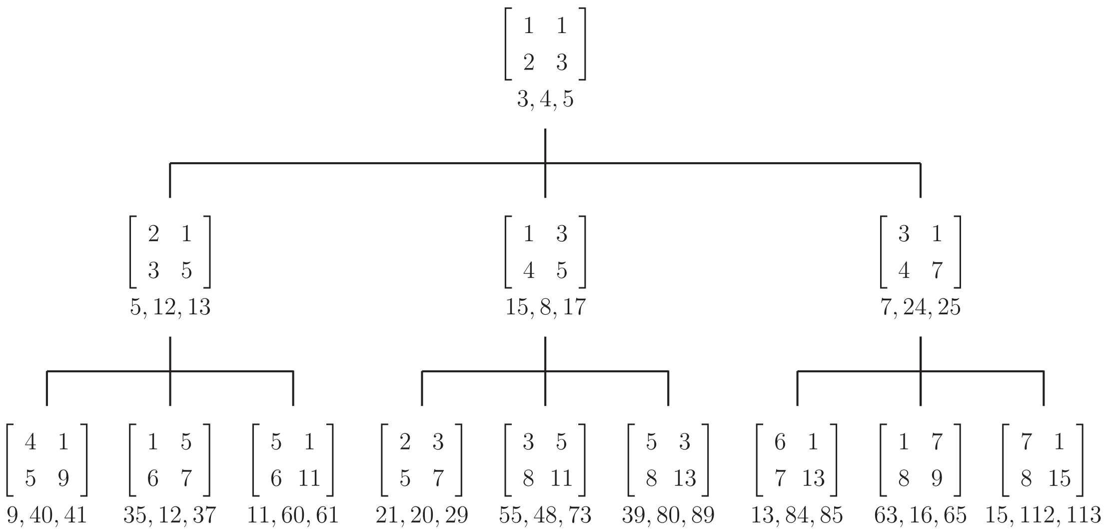

圖 5: Price, H. Lee (2008)。

主要結果與證明

新的基本勾股關係式

因爲劉徽找到以 $(a+b-c)$ 和 $(a+b+c)$ 爲邊長的兩個正方形 (圖一和圖二), 其面積分別等於 $(a+b-c)^2$ 和 $(a+b+c)^2$, 然後再找到 $2(c-a)(c-b)$ 和 $(a+b-c)^2$ 以及 $2(c+a)(c+b)$ 和 $(a+b+c)^2$ 的兩組關係式。所以我的方法是找到以 $(-a+b+c)$ 以及 $(a-b+c)$ 爲邊長的兩個正方形 (圖六和圖七), 其面積分別等於 $(-a+b+c)^2$ 和 $(a-b+c)^2$, 接著再找到性質符號不同之多項式 $2(c-a)(c+b)$ 和 $(-a+b+c)^2$ 以及 $2(c+a)(c-b)$ 和 $(a-b+c)^2$ 的兩組關係式。

引理三：勾股數 a, b, c 滿足關係式 (3)：$2(c-a)(c+b)=(-a+b+c)^2$。

證明：將邊長分別爲勾股數 a, b, c 的三個正方形 $(I, G, A+D+E+I)$ 按照圖六的方式構作, 這時候正方形 $(A+D+E+I)$ 面積恰爲右上 (G) 和左下 (I) 兩個正方形面積的和, 所以中間重疊區域 $(A+D+E)$ 的面積等於正方形區域 (G) 的面積。因此, 中間重疊區域 $(A+C+E)$ 和 $(B+D+E)$ 面積的和等於正方形區域 $(B+C+E+G)$ 的面積, 故得勾股數關係式 (3)：$2(c-a)(c+b)=(-a+b+c)^2$。

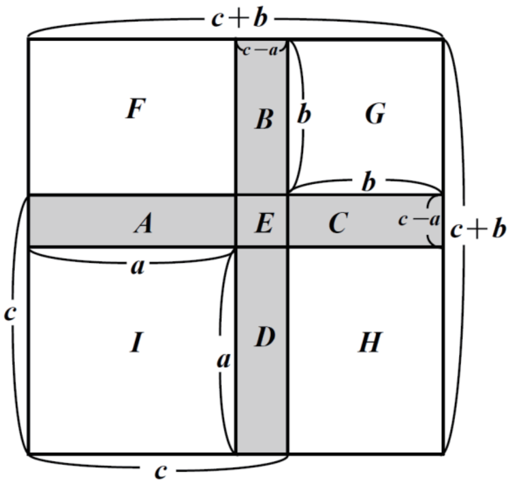

圖 6:

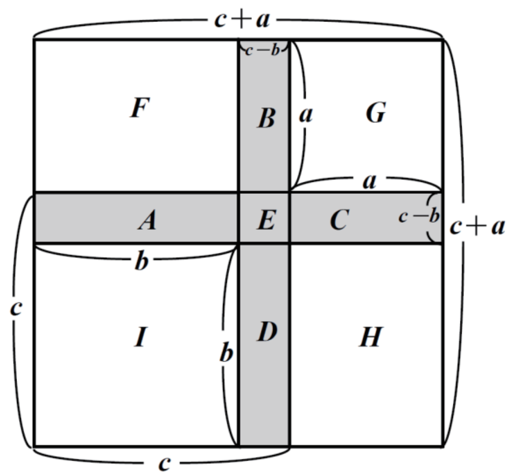

圖 7:

引理四：勾股數 a, b, c 滿足關係式 (4)：$2(c+a)(c-b)=(a-b+c)^2$。

證明：將邊長分別爲勾股數 a, b, c 的三個正方形 $(G, I, A+D+E+I)$ 按照圖七的方式構作, 這時候正方形 $(A+D+E+I)$ 面積恰爲右上 (G) 和左下 (I) 兩個正方形面積的和,

所以中間重疊區域 $(A+D+E)$ 的面積等於正方形區域 (G) 的面積。因此, 中間重疊區域 $(A+C+E)$ 和 $(B+D+E)$ 面積的和等於正方形區域 $(B+C+E+G)$ 的面積, 故得勾股數關係式 (4):$2(c+a)(c-b)=(a-b+c)^2$。

劉彝程的第二組迭代公式

我根據引理一和引理三得到並證明新的勾股數迭代公式, 由於這組公式與劉彝程的第一組公式只有性質符號不同, 於是我稱這組公式爲劉彝程的第二組公式, 也就是以下的定理二。

定理二:由勾股數 a,b,c 迭代產生新的勾股數 (a',b',c') 公式:$\begin{cases} a'=-2a+b+2c \\ b'=-a+2b+2c \\ c'=-2a+2b+3c \end{cases}$。

證明:從勾股數關係式 (1) 和 (3) 得到新的勾股數的迭代方法:

從一勾股數 (a,b,c) 構作新的勾股數 (a',b',c'), 符合:$\begin{cases} c'-a'=c+b \\ c'-b'=c-a \\ a'+b'-c'=-a+b+c \end{cases}$,

由此解得新的勾股數 (a',b',c'):$\begin{cases} a'=-2a+b+2c \\ b'=-a+2b+2c \\ c'=-2a+2b+3c \end{cases}$。

劉彝程的第三組迭代公式

我根據引理一和引理四得到並證明新的勾股數迭代公式, 由於這組公式也與劉彝程第一組公式只有性質符號不同, 於是我稱這組公式爲劉彝程的第三組公式, 也就是以下的定理三。

定理三:由勾股數 a,b,c 迭代產生新的勾股數 (a',b',c') 公式:$\begin{cases} a'=2a-b+2c \\ b'=a-2b+2c \\ c'=2a-2b+3c \end{cases}$。

證明:再從勾股數關係式 (1) 和 (4) 得到新的勾股數的迭代方法:

從一勾股數 (a,b,c) 構作新的勾股數 (a',b',c'), 符合 $\begin{cases} c'-a'=c-b \\ c'-b'=c+a \\ a'+b'-c'=a-b+c \end{cases}$,

由此解得新的勾股數 (a',b',c')：$\begin{cases} a'=2a-b+2c \\ b'=a-2b+2c \\ c'=2a-2b+3c \end{cases}$ 。

貝格倫第一組迭代公式

由定理三：$\begin{cases} a'=2a-b+2c \\ b'=a-2b+2c \\ c'=2a-2b+3c \end{cases}$，我將公式的右邊的 a,b 互換得到：$\begin{cases} a'=-a+b+2c \\ b'=-2a+2b+2c \\ c'=-2a+2b+3c \end{cases}$，

此即貝格倫的第一組迭代公式, 即 $\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$。

貝格倫的第二組迭代公式

由定理一：$\begin{cases} a'=2a+b+2c \\ b'=a+2b+2c \\ c'=2a+2b+3c \end{cases}$，我將公式的右邊的 a,b 互換得到：$\begin{cases} a'=a+2b+2c \\ b'=2a+b+2c \\ c'=2a+2b+3c \end{cases}$，

此即貝格倫的第二組迭代公式, 即 $\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$。

貝格倫的第三組迭代公式

由定理二：$\begin{cases} a'=-2a+b+2c \\ b'=-a+2b+2c \\ c'=-2a+2b+3c \end{cases}$，我將公式的右邊的 a,b 互換得到：$\begin{cases} a'=a-2b+2c \\ b'=2a-b+2c \\ c'=2a-2b+3c \end{cases}$，

此即貝格倫的第三組迭代公式, 即 $\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$。

延伸的勾股數關係式

由定理一、定理二以及定理三重新得到了貝格倫的三組公式之後, 我想找到更多的勾股數關係式, 才有機會重新證明普萊斯的三組公式。所以, 我以 $2a,2b,2c$ 分別取代引理一、引理二

以及引理四中的 a, b, c, 得到以下的引理五、引理六以及引理七。

引理五：勾股數 a, b, c 滿足關係式 (5)：$8(c-a)(c-b)=(2a+2b-2c)^2$。

引理六：勾股數 a, b, c 滿足關係式 (6)：$8(c+a)(c+b)=(2a+2b+2c)^2$。

引理七：勾股數 a, b, c 滿足關係式 (7)：$8(c+a)(c-b)=(2a-2b+2c)^2$。

普萊斯第一組迭代公式

我根據引理一和引理五重新證明普萊斯的第一組迭代公式, 也就是以下的定理四。

定理四：由勾股數 a, b, c 迭代產生新的勾股數 (a', b', c') 公式：$\begin{cases} a'=2a+b-c \\ b'=-2a+2b+2c \\ c'=-2a+b+3c \end{cases}$。

證明：再從勾股數關係式 (1) 和 (5) 得到新的勾股數的迭代方法：

從一勾股數 (a, b, c) 構作新的勾股數 (a', b', c'), 符合：$\begin{cases} c'-a'=4(c-a) \\ c'-b'=c-b \\ a'+b'-c'=2a+2b-2c \end{cases}$,

由此解得新的勾股數 (a', b', c')：$\begin{cases} a'=2a+b-c \\ b'=-2a+2b+2c \\ c'=-2a+b+3c \end{cases}$,

此即普萊斯的第一組迭代公式, 即 $\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$。

普萊斯的第二組迭代公式

我根據引理四和引理六重新證明普萊斯的第二組迭代公式, 也就是以下的定理五。

定理五：由勾股數 a, b, c 迭代產生新的勾股數 (a', b', c') 公式：$\begin{cases} a'=2a+b+c \\ b'=2a-2b+2c \\ c'=2a-b+3c \end{cases}$。

證明：再從勾股數關係式 (4) 和 (6) 得到新的勾股數的迭代方法：

從一勾股數 (a,b,c) 構作新的勾股數 (a',b',c'), 符合：$\begin{cases} c'+a'=4(c+a) \\ c'-b'=c+b \\ a'-b'+c'=2a+2b+2c \end{cases}$,

由此解得新的勾股數 (a',b',c')：$\begin{cases} a'=2a+b+c \\ b'=2a-2b+2c \\ c'=2a-b+3c \end{cases}$,

此即普萊斯的第二組迭代公式, 即 $\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$。

普萊斯的第三組迭代公式

我根據引理四和引理七重新證明普萊斯的第三組迭代公式, 也就是以下的定理六。

定理六：由勾股數 a,b,c 迭代產生新的勾股數 (a',b',c') 公式：$\begin{cases} a'=2a-b+c \\ b'=2a+2b+2c \\ c'=2a+b+3c \end{cases}$。

證明：再從勾股數關係式 (4) 和 (7) 得到新的勾股數的迭代方法：

從一勾股數 (a,b,c) 構作新的勾股數 (a',b',c'), 符合：$\begin{cases} c'+a'=4(c+a) \\ c'-b'=c-b \\ a'-b'+c'=2a-2b+2c \end{cases}$,

由此解得新的勾股數 (a',b',c')：$\begin{cases} a'=2a-b+c \\ b'=2a+2b+2c \\ c'=2a+b+3c \end{cases}$,

此即普萊斯的第三組迭代公式, 即 $\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$。

結論

本研究的靈感來自於清代數學家劉彝程以勾股形構作產生第一組的勾股數迭代公式, 透過幾何的構作與聯立方程式的求解便可以獲得這種傳宗接代的產生公式。本研究除了利用勾股形

構作的方法找到了劉彝程的另外兩組公式, 並進一步由勾股形構作重新產生了貝格倫和普萊斯的公式。整個探索的過程呈現出數學中最美妙的規律性, 以精簡的方式來對已知的數學知識進行詮釋以及推演出新的結果。

致謝：

由衷感謝彰化師範大學數學系施皓耀教授, 因爲在施教授的鼓勵與指導下, 這一篇文章才能完成。此外, 更感謝編審老師對文章的指正。

參考資料

1. 吳裕賓、朱家生 (1990), 劉彝程的數學教學與研究, 揚州師院學報《自然科學版》10, 4。
2. Paul Yiu (1996),《九章算術》傳統的連續數勾股形構作, 香港數學教育學會《數學教育》, 3。
3. From "Wikipedia, the free encyclopedia": Formulas for generating Pythagorean triples. (2 November 2013). Retrieved 2 November 2013, from http://en.wikipedia.org/wiki/Formulas_for_generating_Pythagorean_triples.
4. Price, H. Lee (2008). "The Pythagorean Tree: A New Species". arXiv:0809.4324 [math.HO], from: http://arxiv.org/pdf/0809.4324.pdf

—本文作者爲台中市居仁國中學生—