數學傳播 38卷3期, pp. 58-64

一道數學競賽題之勘誤

周靖北

在指導學生參加數學競賽的過程中, 往往被大量的各式競賽考古題包圍, 有些題目絞盡腦汁仍想不出來, 便參考所附的解答或與同事討論, 大致上問題皆能獲得解決, 但有一道題目, 在看了該題本所附的解答之後, 仍然懵懵懂懂, 一方面覺得該解法有些神來之筆, 不知如何想到的? 另一方面覺得有些步驟跳得太快, 說明不夠詳細。經深入探討之後, 發現題目的解法隱約用到了擴張 (體) 的概念, 這個概念在高中課程中並不會提到, 只有某類題型大概沾到邊:「若一個整係數二次多項方程式有一根爲 $2+\sqrt{3}$, 求另一根。」答案爲 $2-\sqrt{3}$, 但老師在對學生講解這類題目時, 並不需要提到擴張, 而且大部分老師在還原這個二次方程時, 大概都是這樣解: 令 $x=2+\sqrt{3}$, 則 $(x-2)^2=(\sqrt{3})^2$, 得知原二次方程爲 $x^2-4x+1=0$。

對於高中生來說擴張可說是陌生的概念, 要解出這道競賽題難度頗高。本文將由高中已知關於有理數、平方根以及二項展開式的性質出發, 並且概略提到「體」、「擴張」等等名詞定義及性質, 來解釋此道題目的解法。

另外發現該題本所附的解法並不完整, 所給的答案只是其中一組解。

該試題爲 99 學年度高級中學數學科能力競賽複賽南區 (高雄區) 筆試 (一) 的第 1 題, 由「99 學年度學科能力競賽數學科決賽總報告」所提供的題目及參考解答如下:

題目: 若兩互質的整係數多項式 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 滿足 $\dfrac{P(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7})}{Q(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7})}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, 則 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 爲何?

參考解答:

令 $s=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}$, 考慮整係數多項式 $A(x)$ 與 $Q(x)$ 滿足 $\dfrac{A(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7})}{Q(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7})}=\dfrac{A(s)}{Q(s)}=\sqrt{7}$, 則所求 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=s-\sqrt{7}=s-\dfrac{A(s)}{Q(s)}$。

所以, $x=s$ 是 $A(x)-\sqrt{7}Q(x)=0$ 方程式的解。考慮整係數多項式 $B(x)$ 以消去 $\sqrt{2}$ 及 $\sqrt{3}$ 兩項, (註 1)

$B(x)=(x-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{7})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{7})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7})=$
$A(x)-\sqrt{7}Q(x)$ (註 2)

所以, 化簡 $B(x)$ 得

$$\begin{aligned}
&[(x-\sqrt{7})^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2]\cdot[(x-\sqrt{7})^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2]\\
&=[(x-\sqrt{7})^2-5-2\sqrt{6}]\cdot[(x-\sqrt{7})^2-5+2\sqrt{6}]\\
&=[(x-\sqrt{7})^2-5]^2-(2\sqrt{6})^2\\
&=(x^2-2\sqrt{7}x+2)^2-24\\
&=(x^4+32x^2-20)-\sqrt{7}(4x^3+8x),
\end{aligned}$$

得 $A(x)=x^4+32x^2-20$ 及 $Q(x)=4x^3+8x$。

所以, $\sqrt{2}+\sqrt{3}=s-\sqrt{7}=s-\dfrac{A(s)}{Q(s)}=s-\dfrac{s^4+32s^2-20}{4s^3+8s}=\dfrac{3s^4-24s^2+20}{4s^3+8s}$,

得 $P(x)=3x^4-24x^2+20$ 及 $Q(x)=4x^3+8x$。

以上解法有兩處錯誤的地方, 分別在標示爲註 1 與註 2 的位置:

註 1: $B(x)$ 乘開之後顯然並非整係數多項式, 此處「整係數多項式 $B(x)$」應爲意思表達之錯誤。

註 2: $A(x)-\sqrt{7}Q(x)$ 不一定等於 $B(x)$, 但 $A(x)-\sqrt{7}Q(x)$ 必爲 $B(x)$ 的倍式, 且爲 $A(x)-\sqrt{7}Q(x)=\big(f(x)+\sqrt{7}g(x)\big)B(x)$ 之形式, 其中 $f(x)$、$g(x)$ 皆爲有理係數多項式 。又因爲 $A(x)$、$Q(x)$ 爲整係數多項式且互質, 因此 $f(x)(x^4+32x^2-20)-7g(x)(4x^3+8x)$ 與 $-f(x)(4x^3+8x)+g(x)(x^4+32x^2-20)$ 爲整係數多項式且互質。

滿足條件的 $f(x)$、$g(x)$ 有無限多組, 因此此題答案有無限多組。

上述解法中的關鍵推論是: 若 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}$ 是方程式 $A(x)-\sqrt{7}Q(x)=0$ 的解 (其中 $A(x)$ 與 $Q(x)$ 皆爲整係數多項式), 則 $\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{7}$、$-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}$、$-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{7}$ 也都會是方程式 $A(x)-\sqrt{7}Q(x)=0$ 的解, 因此 $A(x)-\sqrt{7}Q(x)$ 會被 $B(x)=(x-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{7})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{7})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7})=(x^4+32x^2-20)-\sqrt{7}(4x^3+8x)$ 整除。

而 $A(x)-\sqrt{7}Q(x)$ 與 $B(x)$ 皆爲「(整係數多項式)$+\sqrt{7}$(整係數多項式)」的形式, 因此 $A(x)-\sqrt{7}Q(x)$ 除以 $B(x)$ 的商, 會是「(有理係數多項式)$+\sqrt{7}$ (有理係數多項式)」的形式。

以下便針對上述推論作詳細說明, 並且提供這道題目經過修正後的解法。

概念 1: 體 (field): 具備加法與乘法兩種運算的代數結構, 具有加法單位元素 0 與乘法單位元素 1, 任意元素 a 皆有加法反元素 $(-a)$; 除了 0 以外, 其他任意元素 b 皆有乘法反元素 $b^{-1}=\dfrac{1}{b}$。體還必須滿足許多運算性質, 這裡不一一贅述, 只針對需要用到的性質稍作介紹。證明過程中會用到一個關鍵性質, 那就是體對於兩種運算皆具有封閉性, 即: 若 F 是一個體, $a,b\in F$, 則 $a+b\in F$, 且 $a*b\in F$。

有理數集 Q、實數集 R、複數集 C 皆爲體的例子, 整數集 Z 並不是體, 因爲對於 2 來說, 其乘法反元素 $\dfrac{1}{2}$ 並不屬於 Z, 但 Z 仍是一個具備加法與乘法的代數結構, 稱爲「環」(ring)。

概念 2: 擴張體: 這裡不討論擴張體的嚴謹定義, 只探討證明過程中會用到的擴張體的例子與概念。

$Q(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\}$ 爲 Q 的一個擴張體, 是由 Q 這個體加入一個不屬於 Q 的元素 $\sqrt{2}$ 之後, 經適當擴展所能夠得到最小的體 (以 Q 及 $\sqrt{2}$ 爲基礎, 增加一些元素以形成一個體, 但增加的元素越少越好)。因爲體具有封閉性, 因此經適當擴展之後, $Q(\sqrt{2})$ 內的元素必爲 $a+b\sqrt{2}$ 的形式 (其中 $a,b\in Q$)。

$Q(\sqrt{2},\sqrt{3})=\big(Q(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}\mid a,b,c,d\in Q\}$ 爲 $Q(\sqrt{2})$ 的一個擴張體, 是由 $Q(\sqrt{2})$ 這個體加入一個不屬於 $Q(\sqrt{2})$ 的元素 $\sqrt{3}$ 之後, 經適當擴展所能夠得到最小的體。$Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 亦可視爲 Q 的一個擴張體, 是由 Q 這個體加入兩個不屬於 Q 的元素 $\sqrt{2},\sqrt{3}$ 之後, 經適當擴展所能夠得到最小的體。

已知性質 1: 若 a 爲正整數且 a 不是平方數, 則 $\sqrt{a}$ 不是有理數。

說明: 由「 $\sqrt{2}$ 不是有理數」的經典證明可以類似地證明上面這個更一般的性質。

已知性質 2: 若 a,b 爲有理數且 $a+b\sqrt{2}=0$, 則 $a=b=0$。

說明: 若 $b\neq 0$, 則由 $a+b\sqrt{2}=0$ 可得 $\sqrt{2}=-\dfrac{a}{b}\in Q$, 與已知性質 1 不合, 故 $a=b=0$。

此性質等價於「若 a,b,c,d 爲有理數且 $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$, 則 $a=c$ 且 $b=d$」, 這說明了在擴張體 $Q(\sqrt{2})$ 中, 數的表達方式是唯一的。

已知性質 3: 若 a,b 爲有理數且 $(a+b\sqrt{2})^n=p+q\sqrt{2}$, 其中 p,q 爲有理數, 則 $(a-b\sqrt{2})^n=p-q\sqrt{2}$。

說明: 因爲 p, q 爲有理數, 故 p 爲 $(a+b\sqrt{2})^n$ 展開式中 ($\sqrt{2}$ 的) 偶次項之和, $q\sqrt{2}$ 爲 $(a+b\sqrt{2})^n$ 展開式中 ($\sqrt{2}$ 的) 奇次項之和, 對照 $(a-b\sqrt{2})^n$ 之展開式即可得證。

引理 1: $\sqrt{6}\notin Q(\sqrt{7})$。

說明: 若 $\sqrt{6}\in Q(\sqrt{7})$, 則存在有理數 a, b 使 $\sqrt{6}=a+b\sqrt{7}$ ..... (1) 式,

可得 $a-b\sqrt{7}=\sqrt{6}-2b\sqrt{7}$,

因此 $(a+b\sqrt{7})(a-b\sqrt{7})=\sqrt{6}(\sqrt{6}-2b\sqrt{7})$,

展開得 $a^2-7b^2=6-2b\sqrt{42}$

因此 $2b\sqrt{42}=6-a^2+7b^2$ 爲有理數。

若 $b\neq 0$ 則 $\sqrt{42}$ 爲有理數, 與已知性質 1 不合, 故 $b=0$。

代回 (1) 式可得 $\sqrt{6}=a$ 爲有理數, 與已知性質 1 不合, 故 $\sqrt{6}\notin Q(\sqrt{7})$。

利用類似的證明方法可推得

推論 1: 若 a, b 爲互質的正整數且都不是平方數, 則 $\sqrt{a}\notin Q(\sqrt{b})$。

說明: 其實條件還可以再放寬, 但得要增加其他限制條件, 這裡用不到這麼細的性質。

引理 2: $\sqrt{3}\notin Q(\sqrt{2},\sqrt{7})$。

證明: 若 $\sqrt{3}\in Q(\sqrt{2},\sqrt{7})$, 則存在有理數 a, b, c, d 使 $\sqrt{3}=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{7}+d\sqrt{14}$,

整理得 $\sqrt{3}=(a+c\sqrt{7})+(b+d\sqrt{7})\sqrt{2}$, ... (1) 式,

可得 $(a+c\sqrt{7})-(b+d\sqrt{7})\sqrt{2}=\sqrt{3}-2(b+d\sqrt{7})\sqrt{2}$,

因此 $((a+c\sqrt{7})+(b+d\sqrt{7})\sqrt{2})((a+c\sqrt{7})-(b+d\sqrt{7})\sqrt{2})=\sqrt{3}(\sqrt{3}-2(b+d\sqrt{7})\sqrt{2})$,
$(a+c\sqrt{7})^2-((b+d\sqrt{7})\sqrt{2})^2=3-2(b+d\sqrt{7})\sqrt{6}$.

左式 $(a+c\sqrt{7})^2-2(b+d\sqrt{7})^2\in Q(\sqrt{7})$, 因此右式 $3-2(b+d\sqrt{7})\sqrt{6}\in Q(\sqrt{7})$,

可得 $(b+d\sqrt{7})\sqrt{6}\in Q(\sqrt{7})$。

若 $b+d\sqrt{7}\neq 0$, 則 $\sqrt{6}\in Q(\sqrt{7})$, 與引理 1 不合, 故 $b+d\sqrt{7}=0$,

代回 (1) 式可得 $\sqrt{3}=a+c\sqrt{7}\in Q(\sqrt{7})$, 與推論 1 不合, 故 $\sqrt{3}\notin Q(\sqrt{2},\sqrt{7})$。

在已知性質 2 中, 可以將 a,b 爲有理數的條件改爲有理數的擴張體, 得到如下的推論。

推論 2: 若 $a,b\in Q(\sqrt{2},\sqrt{7})$ 且 $a+b\sqrt{3}=0$, 則 $a=b=0$。

證明: 若 $b\neq 0$, 則由 $a+b\sqrt{3}=0$ 可得 $\sqrt{3}=-\dfrac{a}{b}$。

因爲 $a,b\in Q(\sqrt{2},\sqrt{7})$, 因此由 $Q(\sqrt{2},\sqrt{7})$ 的封閉性可得 $\sqrt{3}=-\dfrac{a}{b}\in Q(\sqrt{2},\sqrt{7})$, 此與引理 2 不合, 故 $a=b=0$。推論 2 等價於「若 $a,b,c,d\in Q(\sqrt{2},\sqrt{7})$ 且 $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$, 則 $a=c$ 且 $b=d$」。

在已知性質 3 中, 可以將 a,b 爲有理數的條件改爲有理數的擴張體, 得到如下的推論。

推論 3: 若 $a,b\in Q(\sqrt{2},\sqrt{7})$ 且 $(a+b\sqrt{3})^n=p+q\sqrt{3}$, 其中 $p,q\in Q(\sqrt{2},\sqrt{7})$, 則 $(a-b\sqrt{3})^n=p-q\sqrt{3}$。

證明: 因爲 $a,b,p,q\in Q(\sqrt{2},\sqrt{7})$, 故 p 爲 $(a+b\sqrt{3})^n$ 展開式中 ($\sqrt{3}$ 的) 偶次項之和, $q\sqrt{3}$ 爲 $(a+b\sqrt{3})^n$ 展開式中 ($\sqrt{3}$ 的) 奇次項之和, 對照 $(a-b\sqrt{3})^n$ 之展開式即可得證。

推論 4: 若 $f(x)\in Q(\sqrt{2},\sqrt{7})[x]$ 且 $f(a+b\sqrt{3})=p+q\sqrt{3}$, 其中 $a,b,p,q\in Q(\sqrt{2},\sqrt{7})$, 則 $f(a-b\sqrt{3})=p-q\sqrt{3}$。

證明: 設 $f(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_0$, 其中 $c_n,c_{n-1},\ldots,c_0\in Q(\sqrt{2},\sqrt{7})$,

則對於其中的每一項 c_kx^k, 由推論 3 可推得: 若 $c_k(a+b\sqrt{3})^k=p_k+q_k\sqrt{3}$,

其中 $a,b,c_k,p_k,q_k\in Q(\sqrt{2},\sqrt{7})$, 則 $c_k(a-b\sqrt{3})^k=p_k-q_k\sqrt{3}$。

因此各項之和也滿足類似性質, 得證。

定理 1: 若 $f(x)\in Q(\sqrt{7})[x]$, $a,b,c\in Q(\sqrt{7})$ 且 $x=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c$ 爲方程式 $f(x)=0$ 的根, 則 $x=a\sqrt{2}-b\sqrt{3}+c$、$-a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c$、$-a\sqrt{2}-b\sqrt{3}+c$ 也都是 $f(x)=0$ 的根。

證明: 因爲 $f(x)\in Q(\sqrt{7})[x]$, 因此 $f(x)\in Q(\sqrt{2},\sqrt{7})[x]$。

因爲 $a,b,c\in Q(\sqrt{7})$, 因此 $a\sqrt{2}+c\in Q(\sqrt{2},\sqrt{7})$, $b\in Q(\sqrt{2},\sqrt{7})$。

可設 $f(a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c)=f\big((a\sqrt{2}+c)+b\sqrt{3}\big)=p+q\sqrt{3}$, 其中 $p,q\in Q(\sqrt{2},\sqrt{7})$,

由推論 4 可得, $f(a\sqrt{2}-b\sqrt{3}+c)=f\big((a\sqrt{2}+c)-b\sqrt{3}\big)=p-q\sqrt{3}$。

已知 $x=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c$ 爲方程式 $f(x)=0$ 的根, 因此 $f(a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c)=p+q\sqrt{3}=0$,

由推論 2 可得 $p=q=0$。故 $f(a\sqrt{2}-b\sqrt{3}+c)=p-q\sqrt{3}=0$,

因此 $x=a\sqrt{2}-b\sqrt{3}+c$ 亦爲方程式 $f(x)=0$ 的根。

同理可證 $x=-a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c$、$-a\sqrt{2}-b\sqrt{3}+c$ 也都是方程式 $f(x)=0$ 的根。

以下是將原本的題目解答稍作更改之後的參考解法:

題目: 若兩互質的整係數多項式 $p(x)$ 與 $q(x)$ 滿足 $\dfrac{p(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7})}{q(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7})}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, 則 $p(x)$ 與 $q(x)$ 爲何?

參考解法: 令 $s=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}$, 則 $\dfrac{p(s)}{q(s)}=s-\sqrt{7}$,

故 $x=s$ 是方程式 $p(x)-(x-\sqrt{7})q(x)=0$ 的一個解。

令 $h(x)=p(x)-(x-\sqrt{7})q(x)=(p(x)-xq(x))+\sqrt{7}q(x)$ ...... (1),

因爲 $p(x)$ 與 $q(x)$ 皆爲整係數多項式 (因此也會是有理係數多項式), 故 $h(x)\in Q(\sqrt{7})[x]$。

因爲 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}$ 是方程式 $h(x)=0$ 的一個解且 $h(x)\in Q(\sqrt{7})[x]$,

因此由定理 1, $x=\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{7}$、$-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}$、$-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{7}$ 也都是 $h(x)=0$ 的解,

故 $h(x)$ 在 $R[x]$ 中被 $\big(x-(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7})\big)\big(x-(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{7})\big)\big(x-(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7})\big)\big(x-(-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{7})\big)$ 整除。計算得

$$\begin{aligned}&\big(x-(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7})\big)\big(x-(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{7})\big)\\&\quad\big(x-(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7})\big)\big(x-(-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{7})\big)\\&=(x^4+32x^2-20)-\sqrt{7}(4x^3+8x)\end{aligned}$$

設 $h(x)=m(x)\big((x^4+32x^2-20)-\sqrt{7}(4x^3+8x)\big)$, 其中 $m(x)\in R[x]$,

因爲 $h(x)$ 與 $(x^4+32x^2-20)-\sqrt{7}(4x^3+8x)$ 皆屬於 $Q(\sqrt{7})[x]$,

易證 $m(x)$ 也屬於 $Q(\sqrt{7})[x]$。

設 $m(x)=f(x)+\sqrt{7}g(x)$, 其中 $f(x),g(x)\in Q[x]$, 因此

$$\begin{aligned}h(x)&=\big(f(x)+\sqrt{7}g(x)\big)\big((x^4+32x^2-20)-\sqrt{7}(4x^3+8x)\big),\qquad \text{其中 } f(x),g(x)\in Q[x],\\&=\big(f(x)(x^4+32x^2-20)-7g(x)(4x^3+8x)\big)\\&\quad+\sqrt{7}\big(-f(x)(4x^3+8x)+g(x)(x^4+32x^2-20)\big).\end{aligned}$$

對照 (1) 式: $h(x)=(p(x)-xq(x))+\sqrt{7}q(x)$, 其中 $p(x)$ 與 $q(x)$ 爲整係數多項式, 可得

$$\begin{cases} p(x)-xq(x)=f(x)(x^4+32x^2-20)-7g(x)(4x^3+8x) \\ q(x)=-f(x)(4x^3+8x)+g(x)(x^4+32x^2-20). \end{cases}$$

因爲 $p(x)$ 與 $q(x)$ 爲整係數多項式且互質, 所以 $p(x)-xq(x)$ 與 $q(x)$ 也是整係數多項式且互質; 反之若 $p(x)-xq(x)$ 與 $q(x)$ 爲整係數多項式且互質, 則 $p(x)$ 與 $q(x)$ 也會是整係數多項式且互質。故只要能找到有理係數多項式 $f(x)$、$g(x)$, 使得

$$f(x)(x^4+32x^2-20)-7g(x)(4x^3+8x) \quad 與 \quad -f(x)(4x^3+8x)+g(x)(x^4+32x^2-20)$$

爲整係數多項式且互質, 則便可得一組 $p(x)$ 與 $q(x)$ 的解。

這樣的有理係數多項式 $f(x)$、$g(x)$ 有無限多組, 例如: 令 $\begin{cases} f(x)=-1 \\ g(x)=0 \end{cases}$ 所得到的 $p(x)$ 與 $q(x)$ 即爲「99 學年度學科能力競賽數學科決賽總報告」中所提供的解, 而令 $\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=1 \end{cases}$ 即可得到不同的答案。

後記: 雖然只是一道競賽題, 但我卻使用了這麼多的篇幅才勉強作了說明 (有些地方仍說明得不夠詳細), 若是在競賽現場, 一題頂多讓你寫半個小時, 不太可能洋洋灑灑寫那麼詳細, 因此我心裡頗爲好奇: 這道題作答到何種程度可以得到滿分? 更好奇的是: 當初這道競賽題不知有沒有學生做對?

參考資料

1. 「 99 學年度學科能力競賽數學科決賽總報告」。
2. I. N. Herstein, *Abstract Algebra*.

—本文作者任教高雄中學—