數學傳播 38卷3期, pp. 38-57

Chebyshev 多項式與 線性二階遞迴序列之行列式表示法

翁翠微 · 顏綺美 · 陳政宏

1. 引言

Chebyshev 多項式由 Chebyshev 於 1854 年提出, 它在數值分析上有重要的地位 [11], 本文的目的是介紹 Chebyshev 多項式及線性二階遞迴序列之行列式。在第二節中, 我們先介紹 Chebyshev 多項式(一、二型), 然後討論它與其他二階遞迴序列的關係 (見第三節), 在第四節則求 Chebyshev 多項式之行列式表示式, 並應用於其他二階遞迴序列及特定行列式之值。

2. Chebyshev 多項式

Chebyshev[11] 於1854年考慮多項式序列 $\{T_n(x)\}_{n\geq 0}=\{\cos(n\cos^{-1}x)\}_{n\geq 0}$。
令 $\theta=\cos^{-1}x$, 即 $x=\cos\theta$, 則 $T_n(x)=\cos(n\theta)\Leftrightarrow T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$.
因為 $\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos\theta\cos(n\theta)$, 我們可以得到

$$\begin{aligned}T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x)&=\cos((n+1)\theta)+\cos((n-1)\theta)\\&=2\cos(\theta)\cos(n\theta)\\&=2x\cos(n\theta)\\&=2xT_n(x),\end{aligned}$$

即有下列遞迴關係

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x),\ (n\geq 1).$$

因此我們有下列之定義。

定義 **2.1** (第一型 Chebyshev 多項式[11]). 第一型 Chebyshev 多項式序列 $\{T_n(x)\}_{n\geq 0}$ 定義為

$$T_0(x)=1,\, T_1(x)=x,\quad T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x),\, n\geq 1.$$

例 **2.1.** 利用定義 2.1, 我們有

n	$T_n(x)$
0	1
1	x
2	$2x^2-1$
3	$4x^3-3x$
4	$8x^4-8x^2+1$
5	$16x^5-20x^3+5x$
6	$32x^6-48x^4+18x^2-1$
7	$64x^7-112x^5+56x^3-7x$

同樣地, Chebyshev[11] 也考慮多項式序列 $\{S_n(x)\}_{n\ge 0}=\{\sin(n\cos^{-1}x)\}_{n\ge 0}$。
令 $U_n(x)=\dfrac{S_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, 則 $U_n(x)=\dfrac{\sin((n+1)\cos^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}$。
令 $\theta=\cos^{-1}x$, 即 $x=\cos\theta$, 則 $\sqrt{1-x^2}=\sin\theta$。
因此 $U_n(x)=\dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$。
因為 $\sin(n+1)\theta+\sin(n-1)\theta=2\cos\theta\sin(n\theta)$, 我們可以得到

$$\sin(n+1)\theta=2\cos\theta\sin(n\theta)-\sin(n-1)\theta,$$

同除以 $\sin\theta$ 得到

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}-\frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta},$$

所以,

$$U_n(x)=2xU_{n-1}(x)-U_{n-2}(x),\ n\ge 2.$$

因此我們也有下列之定義。

定義 **2.2** (第二型 Chebyshev 多項式 [11]). 第二型 Chebyshev 多項式序列 $\{U_n(x)\}_{n\ge 0}$ 定義為

$$U_0(x)=1,\ U_1(x)=2x,\quad U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x),\ n\ge 1.$$

例 **2.2.** 由定義 2.2, 可得

n	$U_n(x)$
0	1
1	$2x$
2	$4x^2-1$
3	$8x^3-4x$
4	$16x^4-12x^2+1$
5	$32x^5-32x^3+6x$
6	$64x^6-80x^4+24x^2-1$
7	$128x^7-192x^5+80x^3-8x$

爲了找出 $\{T_n(x)\}_{n\geq 0}$ 及 $\{U_n(x)\}_{n\geq 0}$之一般式, 我們先定義生成函數。

定義 2.3 ([3]). 數列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 的生成函數定義爲 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$。同理, 函數序列 $\{a_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的生成函數定義爲 $\sum_{n\geq 0} a_n(x) z^n$。

首先, 我們找出 $\{T_n(x)\}_{n\geq 0}$ 及 $\{U_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的生成函數。

定理 2.1 ([6]).

(a) $\{T_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的生成函數 $g(x,z)$ 爲 $g(x,z)=\dfrac{1-xz}{1-2xz+z^2}$。

(b) $\{U_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的生成函數 $h(x,z)$ 爲 $h(x,z)=\dfrac{1}{1-2xz+z^2}$。

證明. (a) 令 $g(x,z)$ 爲 $\{T_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的生成函數, 即 $g(x,z)=\sum_{n\geq 0} T_n(x)z^n$。

$$\begin{array}{rcl}
g(x,z) & = & T_0(x)+T_1(x)z+T_2(x)z^2+\cdots \\
-2xzg(x,z) & = & -2xT_0(x)z-2xT_1(x)z^2-2xT_2(x)z^3-\cdots \\
+\quad z^2g(x,z) & = & T_0(x)z^2+T_1(x)z^3+T_2(x)z^4+\cdots \\
\hline
(1-2xz+z^2)g(x,z) & = & 1-xz
\end{array}$$

因此

$$g(x,z)=\frac{1-xz}{1-2xz+z^2}.$$

(b) 同理$\{U_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的生成函數證法相似。 □

引理 **2.1.**

(a) $T_n(x)=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2}$。

(b) $U_n(x)=\dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1}-(x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}}$。

證明. (a) 由定理 2.1 得知,

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}T_n(x)z^n&=\frac{1-xz}{1-2xz+z^2}\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)z}+\frac{1}{1-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)z}\right]\\&=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n\geq 0}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)z\right]^n+\sum_{n\geq 0}\left[\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)z\right]^n\right\}\\&=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right]z^n\end{aligned}$$

所以,

$$T_n(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2}.$$

(b) 同理$\{U_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的證法相似。 □

註 **2.1.** 引理 2.1(a) 有更簡潔的證法, 因爲 $\theta=\cos^{-1}x$, 故有 $x=\cos\theta$。
又 $w=x+\sqrt{x^2-1}=\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta-1}=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$

$$\begin{aligned}T_n(x)&=\cos(n\theta)\\&=\frac{1}{2}(e^{in\theta}+e^{-in\theta})\\&=\frac{1}{2}(w^n+w^{-n})\\&=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2}\end{aligned}$$

引理 **2.2** (Girard-Wairing 公式 [7])**.**

$$a^n+b^n=\sum_{0\leq k\leq\frac{n}{2}}(-1)^k\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}(a+b)^{n-2k}(ab)^k \tag{2.1}$$

$$\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}=\sum_{0\leq k\leq\frac{n}{2}}(-1)^k\binom{n-k}{k}(a+b)^{n-2k}(ab)^k \tag{2.2}$$

利用引理 2.1 及 2.2, 我們可得序列 $\{T_n(x)\}_{n\geq 0}$ 及 $\{U_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的一般式。

定理 2.2.

(a) $T_n(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k}$。

(b) $U_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k}$。

證明. (a) 由引理 2.1 得知,

$$T_n(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2}。$$

在引理 2.2 (2.1) 中, 我們令 $a=x+\sqrt{x^2-1}$, $b=x-\sqrt{x^2-1}$, 即 $a+b=2x$, $ab=1$, 可得

$$T_n(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k}.$$

(b) 同理$\{U_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的證法相似, 在引理 2.2 (2.2) 中, 我們令 $a=x+\sqrt{x^2-1}$, $b=x-\sqrt{x^2-1}$, 即 $a+b=2x$, $ab=1$。 □

註 **2.2** ([11]). 第三型 Chebyshev 多項式序列 $\{V_n(x)\}_{n\geq 0}$ 定義爲

$$V_0(x)=1,\ V_1(x)=2x-1,\qquad V_{n+1}(x)=2xV_n(x)-V_{n-1}(x)\qquad n\geq 1;$$

第四型 Chebyshev 多項式序列 $\{W_n(x)\}_{n\geq 0}$ 定義爲

$$W_0(x)=1,\ W_1(x)=2x+1,\quad W_{n+1}(x)=2xW_n(x)-W_{n-1}(x)\quad n\geq 1.$$

其與第二型 Chebyshev 多項式的關係如下：

$$\begin{aligned}V_n(x)&=U_n(x)-U_{n-1}(x)\\W_n(x)&=U_n(x)+U_{n-1}(x)\end{aligned}$$

因本文著重於第一型和第二型 Chebyshev 多項式, 故不詳加論述, 如讀者有興趣, 請見 [4] 和 [11]。

3. Chebyshev 多項式與其他序列之關係

在本節中, 我們想利用第一型及第二型 Chebyshev 多項式 $\{T_n(x)\}_{n\geq 0}$、$\{U_n(x)\}_{n\geq 0}$ 表出其他序列。

3.1. 第一型 Chebyshev 多項式與其他序列之關係

定理 3.1. 線性遞迴序列 $\{b_n(x)\}_{n\geq 0}$ 滿足遞迴關係式

$$b_n(x) = A(x)\cdot b_{n-1}(x) + B\cdot b_{n-2}(x), \quad b_0 = 2,\, b_1 = A(x).$$

其中 $B \neq 0$, 則

$$b_n(x) = 2\left(-\frac{1}{B}\right)^{\frac{-n}{2}} T_n\left(\frac{A(x)}{2}\left(-\frac{1}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{3.1}$$

證明. 利用生成函數求得 $b_n(x)$ 的一般式爲

$$\frac{2(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}) - A(x)(\alpha^n-\beta^n)}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha^n(2\alpha - A(x)) + \beta^n(A(x)-2\beta)}{\alpha-\beta}.$$

再利用 $\alpha+\beta = A(x)$, 得到 $2\alpha - A(x) = \alpha-\beta$, $A(x)-2\beta = \alpha-\beta$。代回得

$$b_n(x) = \alpha^n + \beta^n \tag{3.2}$$

其中 $\alpha = \dfrac{A(x)+\sqrt{A^2(x)+4B}}{2}$, $\beta = \dfrac{A(x)-\sqrt{A^2(x)+4B}}{2}$。
已知第一型 Chebyshev 多項式 $T_n(y)$ 滿足遞迴關係式：

$$T_n(y) = 2yT_{n-1}(y) - T_{n-2}(y), \quad T_0(y) = 1,\, T_1(y) = y.$$

而 $T_n(y)$ 的一般式爲

$$T_n(y) = \frac{r^n+s^n}{2}, \quad r(y) = y+\sqrt{y^2-1},\, s(y) = y-\sqrt{y^2-1}.$$

若令 $r(y) = k\alpha$, $s(y) = k\beta$, 得到：

$$y+\sqrt{y^2-1} = k\cdot\alpha \tag{3.3}$$
$$y-\sqrt{y^2-1} = k\cdot\beta \tag{3.4}$$

將 (3.3)(3.4) 兩式相加得到

$$2y = k(\alpha+\beta) = k\cdot A(x) \tag{3.5}$$

將 (3.3)(3.4) 兩式相減得到

$$2\sqrt{y^2-1} = k(\alpha-\beta) = k\cdot\sqrt{A^2(x)+4B} \tag{3.6}$$

再將 (3.5) 代入 (3.6), 並將等式左右兩邊平方得到

$$k^2A^2(x) - 4 = k^2A^2(x) + 4k^2B$$

$$\begin{aligned}&\to -4 = 4k^2B\\&\to k = \pm\left(-\frac{1}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{3.7}$$

在這裡取 $k = \left(-\dfrac{1}{B}\right)^{\frac{1}{2}}$。

將 $\alpha = \dfrac{r}{k}$, $\beta = \dfrac{s}{k}$ 及 (3.7) 代回 (3.2) 中, 得到

$$\begin{aligned}b_n(x) &= \frac{1}{k^n}(r^n + s^n)\\&= \left(-\frac{1}{B}\right)^{\frac{-n}{2}} 2T_n\left(\frac{kA(x)}{2}\right)\\&= 2\left(-\frac{1}{B}\right)^{\frac{-n}{2}} T_n\left(\frac{A(x)}{2}\left(-\frac{1}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\end{aligned}$$ □

註 **3.1.** 以上推導和[2]相似, 但將其結果推廣至多項式序列探討。

定義 **3.1** (Lucas 多項式[8])**.** Lucas 多項式序列 $\{\ell_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的遞迴式定義為

$$\ell_0(x) = 2,\ \ell_1(x) = x, \quad \ell_n(x) = x\ell_{n-1}(x) + \ell_{n-2}(x)\ (n \geq 2).$$

推論 **3.1.** Lucas 多項式序列 $\{\ell_n(x)\}_{n\geq 0}$ 和 Chebyshev 多項式之間的關係

$$\ell_n(x) = 2i^nT_n\left(\frac{-xi}{2}\right).$$

證明. 在 (3.1) 中 $(A(x), B) = (x, 1)$, 則

$$\begin{aligned}\ell_n(x) &= 2i^{-n}T_n\left(\frac{xi}{2}\right)\\&= 2(-i)^{-n}T_n\left(\frac{-xi}{2}\right) \quad (\text{因為}T_n(-x) = (-1)^nT_n(x))\\&= 2i^nT_n\left(\frac{-xi}{2}\right).\end{aligned}$$ □

註 **3.2.** 在推論 3.1 中, 若 $x = 1$, 我們可以得到 Lucas 數列 $\{L_n\}_{n\geq 0}$, 即

$$L_0 = 2,\ L_1 = 1, \quad L_n = L_{n-1} + L_{n-2}\ (n \geq 2),$$

因此,

$$L_n = 2i^nT_n\left(-\frac{i}{2}\right).$$

定義 3.2 (第二型 Fermat 多項式[9]). 第二型 Fermat 多項式序列 $\{\theta_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的遞迴式定義爲

$$\theta_0(x) = 2,\, \theta_1(x) = x, \quad \theta_n(x) = x\theta_{n-1}(x) - 2\theta_{n-2}(x)\,(n \geq 2).$$

推論 3.2. 第二型 Fermat 多項式序列 $\{\theta_n(x)\}_{n\geq 0}$ 和 Chebyshev 多項式的關係

$$\theta_n(x) = (\sqrt{2})^{n+2} T_n\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right).$$

證明. 在 (3.1) 中令 $(A(x), B) = (x, -2)$, 則

$$\begin{aligned}\theta_n(x) &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-n}{2}} T_n\left(\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\ &= \sqrt{2}^{n+2} T_n\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$ □

定義 3.3 (Pell-Lucas 多項式 [10]). Pell-Lucas 多項式序列 $\{Q_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的定義爲

$$Q_0(x) = 2,\, Q_1(x) = 2x, \quad Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x)\,(n \geq 2).$$

推論 3.3 ([10]). Pell-Lucas 多項式序列 $\{Q_n(x)\}_{n\geq 0}$ 和 Chebyshev 多項式的關係

$$Q_n(x) = 2(-i)^n T_n(xi).$$

證明. 在 (3.1) 中令 $(A(x), B) = (2x, 1)$, 則

$$Q_n(x) = 2(-i)^n T_n(xi)$$ □

3.2. 第二型 Chebyshev 多項式與其他序列之關係

定理 3.2. 線性遞迴序列 $\{a_n(x)\}_{n\geq 0}$ 滿足遞迴關係式

$$a_n(x) = A(x)a_{n-1}(x) + Ba_{n-2}(x), \quad a_0(x) = 1,\, a_1(x) = A(x).$$

其中 $B \neq 0$。則

$$a_n(x) = \left(-\frac{1}{B}\right)^{\frac{-n}{2}} U_n\left(\frac{A(x)}{2}\left(-\frac{1}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{3.8}$$

證明. 與定理 3.1 證明作法一樣, 令 $r(y) = k\alpha$, $s(y) = k\beta$ 得到 (3.3)∼(3.7)。而 $a_n(x)$ 的一般式：

$$a_n(x) = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \tag{3.9}$$

其中 $\alpha=\dfrac{A(x)+\sqrt{A^2(x)+4B}}{2}$, $\beta=\dfrac{A(x)-\sqrt{A^2(x)+4B}}{2}$。
而 $\alpha=\dfrac{r}{k}$, $\beta=\dfrac{s}{k}$ 及 (3.7) 代回 (3.9) 中, 得到

$$a_n(x)=\left(-\frac{1}{B}\right)^{\frac{-n}{2}}U_n\left(\frac{A(x)}{2}\left(-\frac{1}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \qquad \square$$

定義 3.4 (Fibonacci 多項式[5]). Fibonacci 多項式序列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的遞迴式定義爲

$$f_0(x)=1,\ f_1(x)=x,\quad f_n(x)=xf_{n-1}(x)+f_{n-2}(x)\,(n\geq 2).$$

推論 3.4. Fibonacci 多項式序列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$ 和 Chebyshev 多項式的關係

$$f_n(x)=i^nU_n\left(\frac{-xi}{2}\right).$$

證明. 在 (3.8) 中令 $(A(x),B)=(x,1)$, 則

$$\begin{aligned}f_n(x)&=i^{-n}U_n\left(\frac{xi}{2}\right)\\&=i^nU_n\left(\frac{-xi}{2}\right)\quad(因爲U_n(-x)=(-1)^nU_n(x))\end{aligned} \qquad \square$$

註 3.3.
在推論 3.4 中, 若 $x=1$, 我們可以得到 Fibonacci 數列 $\{F_n\}_{n\geq 0}$, 即

$$F_0=1,\ F_1=1,\quad F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\,(n\geq 2),$$

因此

$$F_n=i^nU_n\left(\frac{-i}{2}\right).$$

定義 3.5 (Morgan-Voyce 多項式[12]). Morgan-Voyce 多項式序列 $\{B_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的遞迴式定義爲

$$B_0(x)=1,\ B_1(x)=x+2,\quad B_n(x)=(x+2)B_{n-1}(x)-B_{n-2}(x)\,(n\geq 2).$$

推論 3.5. Morgan-Voyce 多項式序列 $\{B_n(x)\}_{n\geq 0}$ 和 Chebyshev 多項式之間的關係

$$B_n(x)=U_n\left(\frac{x+2}{2}\right)$$

證明. 在 (3.8) 中令 $(A(x),B)=(x+2,-1)$, 則

$$B_n(x)=U_n\left(\frac{x+2}{2}\right) \qquad \square$$

定義 3.6 (第一型 Fermat 多項式[9]). 第一型 Fermat 多項式序列 $\{\phi_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的遞迴式定義爲

$$\phi_0(x) = 1,\ \phi_1(x) = x, \quad \phi_n(x) = x\phi_{n-1}(x) - 2\phi_{n-2}(x)\,(n \geq 2).$$

推論 3.6. 第一型 Fermat 多項式序列 $\{\phi_n(x)\}_{n\geq 0}$ 和 Chebyshev 多項式的關係

$$\phi_n(x) = (\sqrt{2})^n U_n\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right).$$

證明. 在 (3.8) 中令 $(A(x), B) = (x, -2)$, 則

$$\phi_n(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-n} U_n\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}^n U_n\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right) \qquad \square$$

定義 3.7 (Pell 多項式 [10]). 已知 Pell 多項式序列 $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的定義爲

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = 2x, \quad P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x)\,(n \geq 2).$$

推論 3.7. Pell 多項式序列 $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ 和 Chebyshev 多項式的關係

$$P_n(x) = (-i)^n U_n(xi).$$

證明. 在 (3.8) 中令 $(A(x), B) = (2x, 1)$, 則

$$P_n(x) = i^{-n} U_n(xi) = (-i)^n U_n(xi) \qquad \square$$

4. Chebyshev 多項式之行列式表示法

在本節, 我們找出第一型、第二型 Chebyshev 多項式的行列式表示法, 並利用其得到其他序列的行列式表示法。

4.1. 第一型 Chebyshev 多項式與其他序列之行列式表示法

定理 4.1 ([11]). 第一型Chebyshev 多項式序列 $\{T_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的行列式表示法爲

$$T_n(x) = \begin{vmatrix} 2x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}_{n\times n}$$

證明. 令 $R_n(x)=\begin{vmatrix} 2x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2x & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2x & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2x & -1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}_{n\times n}$ 則

$$R_n(x)=2x\begin{vmatrix} 2x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2x & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 2x & -1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2x & -1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}+\begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2x & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 2x & -1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2x & -1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=2xR_{n-1}(x)-\begin{vmatrix} 2x & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 2x & -1 & 0\\ 0 & \cdots & -1 & 2x & -1\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}+\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 2x & -1 & 0\\ 0 & \cdots & -1 & 2x & -1\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=2xR_{n-1}(x)-R_{n-2}(x)$$

且

$$R_1(x)=\begin{vmatrix} x \end{vmatrix}=x=T_1(x),\qquad R_2(x)=\begin{vmatrix} 2x & -1\\ -1 & x \end{vmatrix}=2x^2-1$$

當 $n=2$ 時, $R_2(x)=2xR_1(x)-R_0(x)$, 所以 $R_0(x)=2x^2-(2x^2-1)=1=T_0(x)$。因爲 $R_n(x)$ 的遞迴關係及起始條件皆與 $T_n(x)$ 相同, 故

$$T_n(x)=\begin{vmatrix} 2x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2x & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2x & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2x & -1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}_{n\times n}$$ □

註 **4.1.** 這個定理出現於 [11] 的習題, 但並未證明。

定理 4.2. 定理 3.1 中 $\{b_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的行列式表示法爲

$$b_n(x) = 2\begin{vmatrix} A(x) & -\sqrt{B}i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{B}i & A(x) & -\sqrt{B}i & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{B}i & A(x) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A(x) & -\sqrt{B}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\sqrt{B}i & A(x) & -\sqrt{B}i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sqrt{B}i & \frac{A(x)}{2} \end{vmatrix}_{n\times n} \tag{4.1}$$

證明. 由定理 3.1 得知,

$$b_n(x) = 2\left(-\frac{1}{B}\right)^{\frac{-n}{2}} T_n\left(\frac{A(x)}{2}\left(-\frac{1}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

再根據定理 4.1, 我們有 $T_n(x)$ 的行列式表示法, 可得到

$$\begin{aligned} b_n(x) &= 2\left(-\frac{1}{B}\right)^{\frac{-n}{2}} T_n\left(\frac{A(x)}{2}\left(-\frac{1}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= 2(\sqrt{B}i)^n T_n\left(\frac{A(x)}{2\sqrt{B}i}\right) \\ &= 2(\sqrt{B}i)^n \begin{vmatrix} \frac{A(x)}{\sqrt{B}i} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{A(x)}{\sqrt{B}i} & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{A(x)}{\sqrt{B}i} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{A(x)}{\sqrt{B}i} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \frac{A(x)}{\sqrt{B}i} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \frac{A(x)}{2\sqrt{B}i} \end{vmatrix}_{n\times n} \\ &= 2\begin{vmatrix} A(x) & -\sqrt{B}i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{B}i & A(x) & -\sqrt{B}i & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{B}i & A(x) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A(x) & -\sqrt{B}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\sqrt{B}i & A(x) & -\sqrt{B}i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sqrt{B}i & \frac{A(x)}{2} \end{vmatrix}_{n\times n} \end{aligned}$$

□

註 4.2. 由證明我們可得

$$b_n(x)=2\left(-\frac{1}{B}\right)^{\frac{-n}{2}}T_n\left(\frac{A(x)}{2}\left(-\frac{1}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=2\begin{vmatrix} A(x) & -\sqrt{B}i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{B}i & A(x) & -\sqrt{B}i & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{B}i & A(x) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A(x) & -\sqrt{B}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\sqrt{B}i & A(x) & -\sqrt{B}i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sqrt{B}i & \frac{A(x)}{2} \end{vmatrix}_{n\times n}$$

推論 4.1. Lucas 多項式序列 $\{\ell_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的行列式表示法爲

$$\ell_n(x)=2\begin{vmatrix} x & -i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -i & x & -i & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -i & x & -i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -i & \frac{x}{2} \end{vmatrix}_{n\times n}$$

證明. 在 (4.1) 中令 $(A(x),B)=(x,1)$。 □

註 4.3. 根據推論 4.1, 令 $x=1$, 則 Lucas 數列 $\{L_n\}_{n\geq 0}$ 的行列式表示法爲

$$L_n=2\begin{vmatrix} 1 & -i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -i & 1 & -i & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -i & \frac{1}{2} \end{vmatrix}_{n\times n}$$

推論 4.2. 第二型 Fermat 多項式序列 $\{\theta_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的行列式表示法爲

$$\theta_n(x) = 2\begin{vmatrix} x & \sqrt{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & x & \sqrt{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{2} & x & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{2} & \frac{x}{2} \end{vmatrix}_{n\times n}$$

證明. 在 (4.1) 中令 $(A(x), B) = (x, -2)$。 □

推論 4.3. Pell-Lucas 多項式序列 $\{Q_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的行列式表示法爲

$$Q_n(x) = 2\begin{vmatrix} 2x & -i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -i & 2x & -i & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 2x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2x & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -i & 2x & -i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -i & x \end{vmatrix}_{n\times n}$$

證明. 在 (4.1) 中令 $(A(x), B) = (2x, 1)$。 □

4.2. 第二型 Chebyshev 多項式與其他序列之行列式表示法

定理 4.3. 第二型 Chebyshev 多項式序列 $\{U_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的行列式表示法爲

$$U_n(x) = \begin{vmatrix} 2x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2x \end{vmatrix}_{n\times n}$$

證明. 與定理 4.1 證法類似。 □

定理 4.4. 定理 3.2 中 $\{a_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的行列式表示法爲

$$a_n(x)=\begin{vmatrix} A(x) & -\sqrt{B}i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -\sqrt{B}i & A(x) & -\sqrt{B}i & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\sqrt{B}i & A(x) & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A(x) & -\sqrt{B}i & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\sqrt{B}i & A(x) & -\sqrt{B}i\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sqrt{B}i & A(x) \end{vmatrix}_{n\times n} \tag{4.2}$$

證明. 由定理 3.2 得知,

$$a_n(x)=\left(-\frac{1}{B}\right)^{\frac{-n}{2}}U_n\left(\frac{A(x)}{2}\left(-\frac{1}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

再根據定理 4.3, 我們有 $U_n(x)$ 的行列式表示法, 可得到

$$\begin{aligned} a_n(x)&=\left(-\frac{1}{B}\right)^{\frac{-n}{2}}U_n\left(\frac{A(x)}{2}\left(-\frac{1}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\ &=(\sqrt{B}i)^nU_n\left(\frac{A(x)}{2\sqrt{B}i}\right)\\ &=(\sqrt{B}i)^n\begin{vmatrix} \frac{A(x)}{\sqrt{B}i} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -1 & \frac{A(x)}{\sqrt{B}i} & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & \frac{A(x)}{\sqrt{B}i} & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{A(x)}{\sqrt{B}i} & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \frac{A(x)}{\sqrt{B}i} & -1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \frac{A(x)}{\sqrt{B}i} \end{vmatrix}_{n\times n}\\ &=\begin{vmatrix} A(x) & -\sqrt{B}i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -\sqrt{B}i & A(x) & -\sqrt{B}i & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\sqrt{B}i & A(x) & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A(x) & -\sqrt{B}i & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\sqrt{B}i & A(x) & -\sqrt{B}i\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sqrt{B}i & A(x) \end{vmatrix}_{n\times n} \end{aligned}$$

□

註 4.4. 由證明我們可得

$$a_n(x) = \left(-\frac{1}{B}\right)^{\frac{-n}{2}} U_n\left(\frac{A(x)}{2}\left(-\frac{1}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \begin{vmatrix} A(x) & -\sqrt{B}i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{B}i & A(x) & -\sqrt{B}i & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{B}i & A(x) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A(x) & -\sqrt{B}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\sqrt{B}i & A(x) & -\sqrt{B}i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\sqrt{B}i & A(x) \end{vmatrix}_{n\times n}$$

推論 4.4. Fibonacci 多項式序列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的行列式表示法爲

$$f_n(x) = \begin{vmatrix} x & -i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -i & x & -i & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -i & x & -i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -i & x \end{vmatrix}_{n\times n}$$

證明. 在 (4.2) 中令 $(A(x), B) = (x, 1)$。 □

註 4.5. 根據推論 4.4, 令 $x = 1$, 則 Fibonacci 數列 $\{F_n\}_{n\geq 0}$ 的行列式表示法爲

$$F_n = \begin{vmatrix} 1 & -i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -i & 1 & -i & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -i & 1 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

推論 **4.5.** [13] Morgan-Voyce 多項式序列 $\{B_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的行列式表示法爲

$$B_n(x)=\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x+2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & x+2 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

證明. 在 (4.2) 中令 $(A(x),B)=(x+2,-1)$。 □

推論 **4.6.** 第一型 Fermat 多項式序列 $\{\phi_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的行列式表示法爲

$$\phi_n(x)=\begin{vmatrix} x & \sqrt{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & x & \sqrt{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{2} & x & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{2} & x \end{vmatrix}_{n\times n}$$

證明. 在 (4.2) 中令 $(A(x),B)=(x,-2)$。 □

推論 **4.7.** Pell 多項式序列 $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的行列式表示法爲

$$P_n(x)=\begin{vmatrix} 2x & -i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -i & 2x & -i & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 2x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2x & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -i & 2x & -i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -i & 2x \end{vmatrix}_{n\times n}$$

證明. 在 (4.2) 中令 $(A(x),B)=(2x,1)$。 □

我們特別地提出行列式型如 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix}$ 之值可由定理 4.4 及其與 $U_n(x)$ 的關係式求得, 以下提供兩個例子。

例 **4.3.** 張福春和莊淨惠 [1] 考慮 $n \times n$ 行列式 $D_n = \begin{vmatrix} b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b & b & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b & b \end{vmatrix}$ (其中 $b > 0$) 之值, 我們也可以利用 (4.2) 得到相同的結果。比較 D_n 和 $a_n(x)$, 令 $A(x) = b$, $-\sqrt{B}i = b$, 則 $B = -b^2$, 由註 4.4, 我們可得

$$\begin{aligned}
D_n &= \left(\frac{1}{b^2}\right)^{\frac{-n}{2}} U_n\left(\frac{b}{2}\left(\frac{1}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= b^n U_n\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= b^n \frac{\sin\left((n+1)\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \\
&= b^n \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left((n+1)\frac{\pi}{3}\right) \\
&= b^n \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{n\pi}{3}\right) \\
&= b^n \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{n\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{n\pi}{3}\right) \\
&= b^n \left(\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

例 **4.4.** 同樣地, [1] 中提出之習題4的第6題也可以用相同的方法得到答案。

我們令

$$E_n = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

比較 E_n 和 $a_n(x)$, 令 $A(x)=6$, $-\sqrt{B}i=3$, 則 $B=-9$。由註 4.4 我們可得

$$\begin{aligned} E_n &= \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{-n}{2}} U_n\left(3\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= 3^n U_n(1) \end{aligned}$$

再由 [11] 得 $U_n(1)=n+1$, 則 $E_n=(n+1)3^n$。

5. 致謝

感謝中研院數學所計畫暑期研習活動, 讓筆者能夠在美國內華達大學數學系薛昭雄教授的指導下, 完成此文, 也衷心感謝薛昭雄教授適時給予建議和鼓勵。最後也要感謝審稿人的細心與指教。

参考資料

1. 張福春、莊淨惠, 線性遞迴關係之求解(下)。數學傳播, 34(1): 35–57。
2. 翁翠微, Chebyshev 和 Morgan-Voyce 多項式、Fibonacci 數、Pell 數、Lucas 數等的關係探討。數學傳播, 34(4): 31–42。
3. R. A. Brualdi, *Introductory Combinatorics*, North-Holland, New York, 1992.
4. Y. C. William Chen, The combinatorial power of the companion matrix, *Linear Algebra and its Applications*, 232(1996), 261–278.
5. Hacl Civciv and Ramazan Türkmen, On the (s,t)-Fibonacci and Fibonacci matrix sequences, *ARS Combinatoria*, 87(2008), 2182–2212.
6. Louis Comtet, *Advanced Combinatorics*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-holland/Boston-U.S.A., 1974.
7. H. W. Gould, The Girard-Waring power sum formulas for symmetric functions and Fibonacci sequences, *Fibonacci Quarterly*, 37(2)(1999): 135–140.
8. A. F. Horadam, A synthesis of certain polynomial sequence, *Applications of Fibonacci Numbers*, 6(1968): 215–229.

9. A. F. Horadam, Chebyshev and fermat polynomials for diagonal functions, *The Fibonacci Quarterly*, 19(4)(1979): 328–333.
10. A. F. Horadam and Mahon Br. J. M., Pell and Pell-Lucas Polynomials, *The Fibonacci Quarterly*, 23(2)(1985): 7–20.
11. J. C. Mason and D. C. Handscomb, *Chebyshev Polynomials. Chapman and Hall/CRC*, Boca Raton, 2003.
12. M. N. S. Swamy, Properties of the polynomials defined by Morgan-Voyce, *Fibonacci Quarterly*, 4(1966): 75–81.
13. Koshy Thomas, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, A Wiley-Interscience Publication, 2001.

—本文作者翁翠微爲台大電機系、台大電信所畢業, 現在就讀麻省理工學院博士班; 顏綺美爲政大應數系畢業, 現在就讀交大應數系碩士班; 陳政宏爲國立台灣師範大學數學研究所碩士班學生—