數學傳播 38卷2期, pp. 88-96

畢氏三元數生成公式之研究與發展

賴昱維

摘要: 本研究不同於以往的畢氏三元數生成公式之產生方式, 從連續奇數和的公式, 延伸至圓點方陣的點數和的公式後, 進一步產生了畢氏三元數的生成公式。

關鍵詞: 畢氏定理、畢氏三元數、圓點方陣。

一、緒論

有一天, 老師在課堂上要大家利用畢氏定理 (Pythagorean theorem) 拼湊出畢氏三元數 (Pythagorean triple), 同學們找到了 (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), 這引發了我對畢氏三元數的興趣。後來, 我上網查資料, 找到以前的文獻: 古希臘學數學家歐幾里得 (Euclid)、丟番圖 (Diophantus) 和畢達哥拉斯 (Pythagoras)、古希臘哲學家柏拉圖 (Plato)、中國魏晉時期數學家劉徽以及近代法國數學家費馬 (Pierre de Fermat) 都曾提出畢氏三元數的生成公式。雖然他們都各自證明了所提出的生成公式, 可是我想還有沒有更簡單的方法可以證明呢? 以下是我的探討。

二、預備知識

三個正整數 a, b, c 滿足畢氏定理 $a^2+b^2=c^2$ 時, (a,b,c) 稱爲畢氏三元數。回顧文獻上的畢氏三元數的生成公式有下列三種:

$$\begin{cases} a=2n+1 \\ b=2n^2+2n \\ c=2n^2+2n+1 \end{cases} \text{公式 (1)},\quad \begin{cases} a=2n \\ b=n^2-1 \\ c=n^2+1 \end{cases} \text{公式 (2)},\quad \begin{cases} a=u^2-v^2 \\ b=2uv \\ c=u^2+v^2 \end{cases} \text{公式 (3)。}$$

n 是正整數　　n 是大於 1 正整數　　$u>v$, u, v 是正整數

蔡聰明和黃文達教授都詳細的探討這些畢氏三元數生成公式之產生方式: 畢達哥拉斯、丟番圖和柏拉圖—代數、歐幾里得—幾何、費馬—解析幾何、劉徽—面積割補法。說明如下:

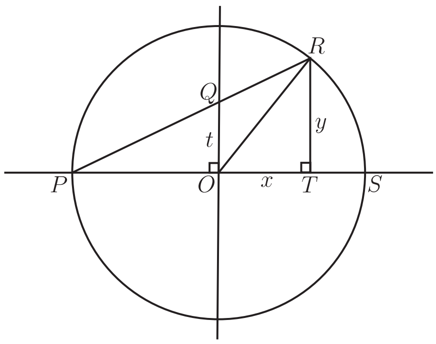
公式 (1) 的產生方式

畢達哥拉斯首先觀察一個恆等式 (蔡聰明 (2010)): $(2k-1)+(k-1)^2=k^2$, 他假設 $2k-1$ 爲一個完全平方數, 再令 $2k-1=m^2$, m 爲奇數, 解得: $k=\frac{m^2+1}{2}$, $k-1=\frac{m^2-1}{2}$, 代入恆等式得到: $m^2+\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$, 所以, 當 m 爲大於 1 之奇數時, 滿足畢氏定理。令 $m=2n+1$, n 是正整數, 得到公式 (1)。據說這個構想是來自堆石子遊戲 (黃文達 (2009)), 先用石子堆成邊長爲 k 之正方形, 然後剝掉一層, 變成邊長爲 $(k-1)$ 之正方形與含 $(2k-1)$ 個的一堆石子。

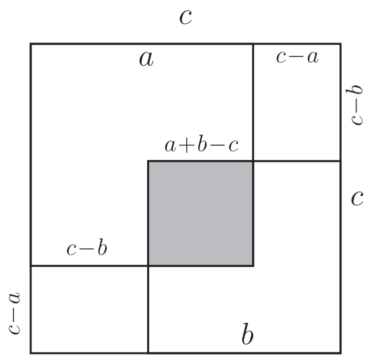
公式 (2) 的產生方式

柏拉圖觀察一個恆等式 (蔡聰明): $(k+1)^2=(k-1)^2+4k$, 假設 $4k$ 爲一個完全平方數, 令 $k=n^2$, 代入恆等式得到: $(2n)^2+(n^2-1)^2=(n^2+1)^2$, 所以, 得到公式 (2)。

公式 (3) 的產生方式



圖一: 圓與三角形



圖二: a,b,c 爲邊的三個正方形

歐幾里得以幾何的觀念 (蔡聰明), 假設有一個圓 (圖一), O 是圓心, P,R,S 是圓上三點, $\overline{PS}$ 是圓的直徑, $\overline{OP}$, $\overline{OR}$, $\overline{OS}$ 是圓的半徑, $\overline{OQ}$ 和 $\overline{TR}$ 垂直於 $\overline{PS}$, $\overline{OP}=\overline{OR}=\overline{OS}=z=1$, $\overline{OQ}=t$, $\overline{OT}=x$, $\overline{TR}=y$。由於 $\triangle TPR$ 和 $\triangle OPQ$ 都是直角三角形, 又共用一個內角 $\angle P$, 所以 $\triangle TPR$ 和 $\triangle OPQ$ 是相似的三角形, 因此得到:

$$\frac{\overline{TR}}{\overline{OQ}}=\frac{\overline{PT}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{OP}+\overline{OT}}{\overline{OP}}\Rightarrow\frac{y}{t}=\frac{1+x}{1}\Rightarrow y=(1+x)t,$$

又因爲 $\triangle TOR$ 是直角三角形, 由畢氏定理得到: $\overline{OR}^2=\overline{OT}^2+\overline{TR}^2\Rightarrow 1=x^2+y^2$, 因此解得到 $\triangle TOR$ 的三邊長: $x=\overline{OT}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y=\overline{TR}=\frac{2t}{1+t^2}$, $z=\overline{OR}=1$, 再令 $t=\frac{v}{u}$, $u>v$, u,v 均是正整數, 得到: $x=\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}$, $y=\frac{2uv}{u^2+v^2}$, $z=1$, 再把 x,y,z 放大 (u^2+v^2)

倍後, 這樣就得到公式 (3)。

劉徽也以面積割補法的想法 (黃文達), 將邊長分別爲直角三角形三邊長 a, b, c 爲邊的三個正方形按照圖二的方式排列, 這時候中間重疊部分的面積恰爲右下和左上兩個矩形面積的和, 因此, $2(c-a)(c-b)=(a+b-c)^2$。因爲 a, b, c 均爲正整數, 可取兩個正整數 p, q 滿足 $c-a=2p^2$, $c-b=q^2$, 此時 $a+b-c=2pq$, 由此解得直角三角形三邊長爲: $a=2pq+q^2$, $b=2p^2+2pq$, $c=2p^2+2pq+q^2$, 再令 $p+q=u$, $p=v$, 這樣就得到公式 (3)。

多數的學者認爲最先得到公式 (3) 的是丟番圖 (黃文達), 他假設 k 是有理數, 並將 $c^2=a^2+b^2$ 改寫成 $c^2-a^2=b^2=c^2a^2-2kca+c^2$, 解得:$a=\frac{2kc}{k^2+1}$, $b=\frac{(k^2-1)c}{k^2+1}$, 令 $k=\frac{u}{v}$, $c=u^2+v^2$ 代入, 得到了公式 (3)。

費馬也從解析幾何的觀點 (黃文達), 將 $c^2=a^2+b^2$ 改寫成$(\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2=1$, 即 $(\frac{a}{c},\frac{b}{c})$ 爲單位圓周 $x^2+y^2=1$ 上的有理點, 今已知 $(0,-1)$ 爲單位圓上的一點, 給定一有理數斜率 $\frac{u}{v}$, 則過點$(0,-1)$ 且斜率 $\frac{u}{v}$ 之直線 $y=\frac{u}{v}x-1$ 與單位圓 $x^2+y^2=1$ 之交點爲 $\left(\frac{2uv}{u^2+v^2},\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\right)$, 此點亦爲有理點$(\frac{a}{c},\frac{b}{c})$, 得到了公式 (3)。

三、主要結果與證明

畢氏三元數的關係式

在利用畢氏定理 $(a^2+b^2=c^2)$ 拼湊畢氏三元數 (a,b,c) 的過程中, 我觀察畢氏三元數之間的規律, 進一步得到畢氏三元數的關係式 (賴昱維 (2012))。

先挑戰第一個數 (a) 是奇數的情形

當 $a=1$ 時, $b=1,2,3,4,\ldots$ 時, 計算 a^2+b^2 得到:$1^2+1^2=2$, $1^2+2^2=5$, $1^2+3^2=10$, $1^2+4^2=17,\ldots$, 找不到平方數。又由於 $1^2-1^2=0$, 和 $2^2-1^2=3$, $2^2-2^2=0$, 和 $3^2-2^2=5$, $3^2-3^2=0$, 和 $4^2-3^2=7$, $\ldots$, 找不到平方差等於1^2。因此, 當 $\boldsymbol{a=1}$ 時, 無法得到畢氏三元數。

當 $a=3$ 時, $b=1,2,3$, 或 4 時, 計算 a^2+b^2 得到:

$$3^2+1^2=10,\quad 3^2+2^2=13,\quad 3^2+3^2=18,\quad \mathbf{3^2+4^2=25=5^2},$$

因此, 當 $\boldsymbol{a=3}$ 時, 得到畢氏三元數 $\boldsymbol{(a,b,c)=(3,4,5)}$。

當 $a=5$ 時, $b=1,2,3,4,\ldots,10,11,12$ 時, 計算 a^2+b^2 得到:
$5^2+1^2=26$, $5^2+2^2=29$, $5^2+3^2=34$, $5^2+4^2=41$, $\ldots$, $5^2+10^2=125$, $5^2+11^2=146$, $\mathbf{5^2+12^2=169=13^2}$,
因此, 當 $\boldsymbol{a=5}$ 時, 得到畢氏三元數 $\boldsymbol{(a,b,c)=(5,12,13)}$。

當 $a=7$ 時, $b=1,2,3,4,\ldots,22,23,24$ 時, 計算 a^2+b^2 得到:
$7^2+1^2=50, 7^2+2^2=53, 7^2+3^2=58, 7^2+4^2=65,\ldots, 7^2+21^2=490, 7^2+22^2=533,$

$7^2+23^2=578, \mathbf{7^2+24^2=625=25^2}$,
因此, 當 $\boldsymbol{a=7}$ 時, 得到畢氏三元數 $\boldsymbol{(a,b,c)=(7,24,25)}$。

接著觀察這三組畢氏三元數: $(3,4,5)$, $(5,12,13)$, $(7,24,25)$, 我找到它們的規律:

$$\begin{cases} (3,4,5) \quad \Rightarrow 4=\dfrac{3^2-1}{2}, \ \ 5=4+1 \\ (5,12,13) \Rightarrow 12=\dfrac{5^2-1}{2}, 13=12+1 \\ (7,24,25) \Rightarrow 24=\dfrac{7^2-1}{2}, 25=24+1 \end{cases}$$

所以,「每組第一個數 (a) 的平方數減去 1 後, 所產生新的數再除以 2, 得到每組第二個數 (b), 每組第二個數 (b) 再加上 1, 得到每組第三個數 (c) 。」

因此, 畢氏三元數的關係式可表示爲: $b=\dfrac{a^2-1}{2}$, $c=b+1$, 利用此關係式, 我可找到 (a) 是大於 1 的奇數之畢氏三元數, 例如: $(9,40,41)$, $(11,60,61)$, $(13,84,85)$, $(15,112,113)$ 。

$$\begin{cases} \dfrac{9^2-1}{2}=40, \quad 40+1=41 \quad \Rightarrow (9,40,41) \\ \dfrac{11^2-1}{2}=60, \ 60+1=61 \quad \Rightarrow (11,60,61) \\ \dfrac{13^2-1}{2}=80, \ 84+1=85 \quad \Rightarrow (13,84,85) \\ \dfrac{15^2-1}{2}=112, 112+1=113 \Rightarrow (15,112,113) \end{cases}$$, 並加以驗算:

$$\begin{cases} \mathbf{9^2+40^2=1681}, \qquad \mathbf{41^2=1681} \\ \mathbf{11^2+60^2=3721}, \quad \mathbf{61^2=3721} \\ \mathbf{13^2+84^2=7225}, \quad \mathbf{85^2=7225} \\ \mathbf{15^2+112^2=12769}, \mathbf{113^2=12769} \end{cases}$$, 所以, 這些都是畢氏三元數。

我找到畢氏三元數的關係式, 但是, 只適用在第一個數 (a) 是奇數的情形。接下來要挑戰的問題是要如何找到第一個數 (a) 是偶數的關係式。

再挑戰第一個數 (a) 是偶數的情形

當 $a=2$, $b=1,2,3,4$ 時, 計算 a^2+b^2 得到:
$2^2+1^2=5$, $2^2+2^2=8$, $2^2+3^2=13$, $2^2+4^2=20$, $\ldots$, 找不到平方數。由於 $1^2-1^2=0$, 和 $2^2-1^2=3$, $2^2-2^2=0$, 和 $3^2-2^2=5$, $3^2-3^2=0$, 和 $4^2-3^2=7$, $\ldots$, 找不到平方差等於 2^2。因此, 當 $\boldsymbol{a=2}$ 時, 無法得到畢氏三元數。

當 $a=4$ 時, $b=1,2,3,4$ 時, 計算 a^2+b^2 得到:

$4^2+1^2=17$, $4^2+2^2=20$, $\mathbf{4^2+3^2=25=5^2}$,
因此, 當 $\boldsymbol{a=4}$ 時, 得到畢氏三元數 $\boldsymbol{(a,b,c)=(4,3,5)}$。

當 $a=6$, $b=1,2,3,4,5,6,7,8$ 時, 計算 a^2+b^2 得到:
$6^2+1^2=37$, $6^2+2^2=40$, $6^2+3^2=45$, $6^2+4^2=52$, $6^2+5^2=61$, $6^2+6^2=72$, $6^2+7^2=85$, $\mathbf{6^2+8^2=100=10^2}$,
因此, 當 $\boldsymbol{a=6}$ 時, 得到畢氏三元數 $\boldsymbol{(a,b,c)=(6,8,10)}$。

當 $a=8$, $b=1,2,3,4,\ldots,13,14,15$ 時, 計算 a^2+b^2 得到:
$8^2+1^2=65$, $8^2+2^2=68$, $8^2+3^2=73$, $8^2+4^2=80,\ldots$, $8^2+13^2=233$, $8^2+14^2=260$, $\mathbf{8^2+15^2=289=17^2}$,
因此, 當 $\boldsymbol{a=8}$ 時, 得到畢氏三元數 $\boldsymbol{(a,b,c)=(8,15,17)}$。

接著觀察這三組畢氏三元數: (4,3,5), (6,8,10), (8,15,17), 我找到它們的規律:

$$\begin{cases}(4,3,5) & \Rightarrow 3=\dfrac{4^2}{4}-1,\ \ 5=3+2\\ (6,8,10) & \Rightarrow 8=\dfrac{6^2}{4}-1,\ \ 10=8+2\\ (8,15,17) & \Rightarrow 15=\dfrac{8^2}{4}-1, 17=15+2\end{cases}$$

所以,「每組第一個數 (a) 的平方數除以 4, 所產生新的數再減去 1 得到每組第二個數 (b), 每組第二個數 (b) 再加上2, 得到每組第三個數 (c) 。」

因此, 畢氏三元數的關係式可表示為: $b=\dfrac{a^2}{4}-1$, $c=b+2$, 利用此關係式, 我可找到 (a) 是大於 2 的偶數之畢氏三元數, 例如: (10,24,26), (12,35,37), (14,48,50), (16,63,65)。

$$\begin{cases}\dfrac{10^2}{4}-1=24, 24+2=26\Rightarrow(10,24,26)\\ \dfrac{12^2}{4}-1=35, 35+2=37\Rightarrow(12,35,37)\\ \dfrac{14^2}{4}-1=48, 48+2=50\Rightarrow(14,48,50)\\ \dfrac{16^2}{4}-1=63, 63+2=65\Rightarrow(16,63,65)\end{cases}$$,並加以驗算:

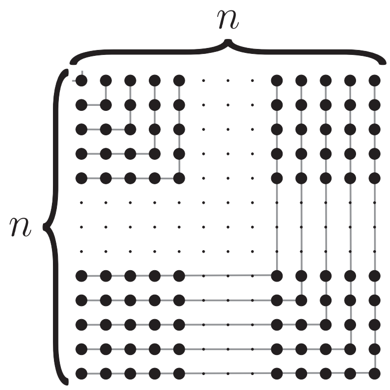
$$\begin{cases}\mathbf{10^2+24^2=676},\ \ \mathbf{26^2=676}\\ \mathbf{12^2+35^2=1369}, \mathbf{37^2=1369}\\ \mathbf{14^2+48^2=2500}, \mathbf{50^2=2500}\\ \mathbf{16^2+63^2=4225}, \mathbf{65^2=4225}\end{cases}$$, 所以, 這些都是畢氏三元數。

我如何拼湊出這些畢氏三元數?

答案是由一題國小數學競試題目:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=?$$

得到靈感後, 延伸到圓點方陣的運用, 順利的找到畢氏三元數的關係式。從 n 階圓點方陣 (圖三) 的左上角開始, 將圓點方陣分成 n 組, 各組圓點數目依序分別爲: $1, 3, 5, \ldots, (2n-1)$, 因此得到下列等式: $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$, 再仔細觀察圓點方陣, 得到以下五種關係式:



圖三: n 階圓點方陣

去掉 n 階圓點方陣中最外層的圓點後, 得到 $(n-1)$ 階圓點方陣:

$$n^2-(2n-1)=(n-1)^2$$

去掉 n 階圓點方陣中最外兩層的圓點後, 得到 $(n-2)$ 階圓點方陣:

$$n^2-(2n-1)-(2n-3)=(n-2)^2 \Rightarrow n^2-(4n-4)=(n-2)^2$$

去掉 n 階圓點方陣中最外三層的圓點後, 得到 $(n-3)$ 階圓點方陣:

$$n^2-(2n-1)-(2n-3)-(2n-5)=(n-3)^2 \Rightarrow n^2-(6n-9)=(n-3)^2$$

去掉 n 階圓點方陣中最外四層的圓點後, 得到 $(n-4)$ 階圓點方陣:

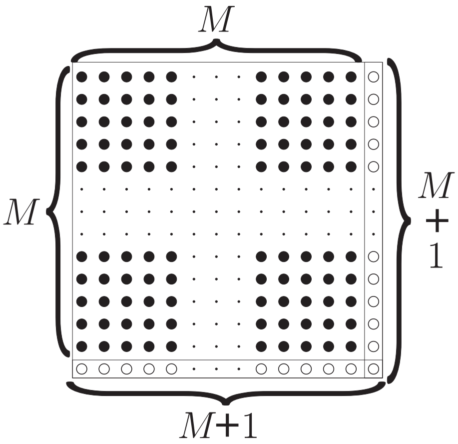
$$n^2-(2n-1)-(2n-3)-(2n-5)-(2n-7)=(n-4)^2 \Rightarrow n^2-(8n-16)=(n-4)^2$$

去掉 n 階圓點方陣中最外 m 層的圓點後, 得到 $(n-m)$ 階圓點方陣:

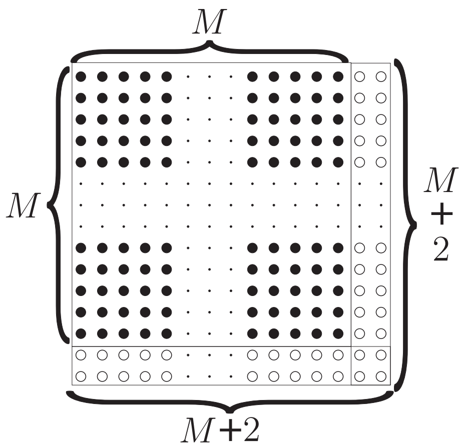
$$n^2-(2n-1)-(2n-3)-(2n-5)-(2n-7)-\cdots-(2n-2m+1)=(n-m)^2$$
$$\Rightarrow n^2-(2mn-m^2)=(n-m)^2, \quad (m \text{ 是正整數}, m<n)$$

圓點方陣的點數和畢氏三元數

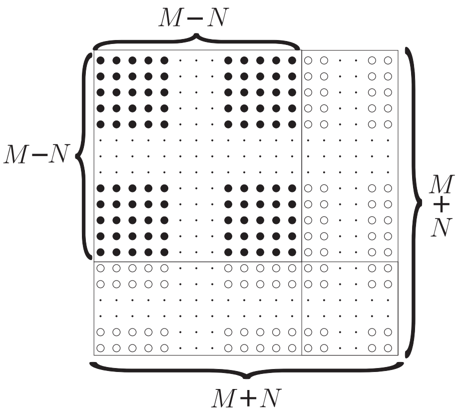
因爲圓點方陣的點數和畢氏三元數之關係都是平方的形態, 所以我利用下列四種不同的圓點方陣的降階方式來探討畢氏三元數的生成公式。由圖四至圖七的圓點方陣可知全部圓點的數目等於實心圓點 (●) 的數目加上空心圓點 (○) 的數目。



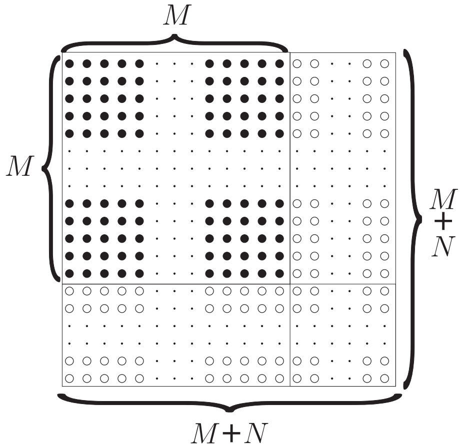
圖四: $(M+1)$ 階圓點方陣



圖五: $(M+2)$ 階圓點方陣



圖六: $(M+N)$ 階圓點方陣



圖七: $(M+N)$ 階圓點方陣

公式(1) 的產生方式

由 $(M+1)$ 階圓點方陣透過一次降一階的方式

因爲圖四的 $(M+1)$ 階圓點方陣全部圓點的數目等於 $(M+1)^2$, 實心圓點的數目等於 M^2, 空心圓點的數目等於 $(2M+1)$, 所以得到: $(2M+1)+M^2=(M+1)^2$, $(2M+1)$ 是一個奇數。這裡透過一次降一階的方式探討 a 是奇數的情況。假設 $a^2=2M+1$:

$$\begin{cases}(2M+1)+M^2=(M+1)^2\\ a^2+b^2=c^2\end{cases} \overset{a^2=2M+1}{\Longrightarrow} \begin{cases}b^2=M^2\\ c^2=(M+1)^2\end{cases} \overset{M=\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}}{\Longrightarrow} \begin{cases}b=\dfrac{a^2}{2}-\frac{1}{2} & \text{.........(1)}\\ c=b+1 & \text{............(2)}\end{cases}$$

由於 $a^2=2M+1>1$, 因此 $a>1$。$2M+1$ 是奇數, 又因爲奇數的平方數還是奇數, 所以設定 k 是正整數, 以 $a=2k+1$ 代入 (1) 和 (2) 得到: $\begin{cases}b=\dfrac{a^2}{2}-\frac{1}{2}\\ c=b+1\end{cases} \overset{a=2k+1}{\Longrightarrow} \begin{cases}b=2k^2+2k\\ c=2k^2+2k+1\end{cases}$

因此得到: $(a,b,c)=(2k+1,\dfrac{a^2}{2}-\frac{1}{2},b+1)=(2k+1,2k^2+2k,2k^2+2k+1)$。

公式(2) 的產生方式

由 $(M+2)$ 階圓點方陣透過一次降二階的方式

因為圖五的 $(M+2)$ 階圓點方陣全部圓點的數目等於 $(M+2)^2$, 實心圓點的數目等於 M^2, 空心圓點的數目等於 $(4M+4)$, 所以得到: $(4M+4)+M^2=(M+2)^2$, $(4M+4)$ 是一個偶數。這裡透過一次降兩階的方式探討 a 是偶數的情況。假設 $a^2=4M+4$:

$$\begin{cases}(4M{+}4){+}M^2{=}(M{+}2)^2\\ a^2+b^2=c^2\end{cases}\overset{a^2=4M+4}{\Longrightarrow}\begin{cases}b^2=M^2\\ c^2=(M+2)^2\end{cases}\overset{M=\frac{a^2}{4}-1}{\Longrightarrow}\begin{cases}b=\dfrac{a^2}{4}-1 & \text{.........(3)}\\ c=b+2 & \text{............(4)}\end{cases}$$

由於 $a^2=4M+4>4$, 因此 $a>2$。$4M+4$ 是偶數, 又因為偶數的平方數還是偶數, 所以設定 k 是正整數, 以 $a=2k+2$ 代入 (3) 和 (4) 得到:

$$\begin{cases}b=\dfrac{a^2}{4}-1\\ c=b+2\end{cases}\overset{a=2k+2}{\Longrightarrow}\begin{cases}b=\dfrac{(2k+2)^2}{4}-1=k^2+2k\\ c=b+2=k^2+2k+2\end{cases}$$

因此得到: $(a,b,c)=(2k+2,\dfrac{a^2}{4}-1,b+2)=(2k+2,k^2+2k,k^2+2k+2)$。

公式(3) 的產生方式

由 $(M+N)$ 階圓點方陣透過一次降 $2N$ 階的方式

因為圖六的 $(M+N)$ 階圓點方陣全部圓點的數目等於 $(M+N)^2$, 實心圓點的數目等於 $(M-N)^2$, 空心圓點的數目等於 $4MN$, 所以得到: $4MN+(M-N)^2=(M+N)^2$, 假設 $a^2=4MN$, 得到:

$$\begin{cases}4MN{+}(M{-}N)^2{=}(M{+}N)^2\\ a^2+b^2=c^2\end{cases}\overset{a^2=4MN}{\Longrightarrow}\begin{cases}b^2=(M-N)^2 & \text{.........(5)}\\ c^2=(M+N)^2 & \text{.........(6)}\end{cases},$$

由於 $a^2=4MN$, $4MN$ 是平方數, 所以設定 $M=u^2$, $N=v^2$ (u,v 是正整數, $u>v$)。再以 $a=2uv$ 代入 (5) 和 (6) 得到:

$$\begin{cases}b^2=(M-N)^2\\ c^2=(M+N)^2\end{cases}\overset{a=2uv}{\Longrightarrow}\begin{cases}b=u^2-v^2\\ c=u^2+v^2\end{cases}, \text{ 因此得到公式(3)。}$$

由 $(M+N)$ 階圓點方陣透過一次降 N 階的方式

因為圖七的 $(M+N)$ 階圓點方陣全部圓點的數目等於 $(M+N)^2$, 實心圓點的數目等於 M^2, 空心圓點的數目等於 $(2MN+N^2)$, 得到:$(2MN+N^2)+M^2=(M+N)^2$, 假設

$x^2 = 2MN + N^2$:

$$\begin{cases}(2MN+N^2)+M^2=(M+N)^2\\ x^2+y^2=z^2\end{cases} \overset{x^2=2MN+N^2}{\Longrightarrow} \begin{cases}y^2=M^2 & \text{.........(7)}\\ z^2=(M+N)^2 & \text{.........(8)}\end{cases},$$

由於 $x^2 = 2MN + N^2$, 所以 $(2MN + N^2)$ 是平方數, 所以設定 $2MN + N^2 = u^2$, $N = v$ (u, v, 是正整數, $u > v$)。再以 $x = u$ 和 $N = v$ 代入 (7) 和 (8) 得到:

$$\begin{cases}y^2=M^2\\ z^2=(M+N)^2\end{cases} \overset{\begin{cases}x=u\\ N=v\end{cases}}{\Longrightarrow} \begin{cases}y=\dfrac{u^2-v^2}{2v}\\ z=\dfrac{u^2+v^2}{2v}\end{cases},$$

再把 x, y, z 放大 $2v$ 倍後, 因此得到公式 (3)。

五、結論

本研究的靈感來自於觀察基本畢氏三元數的規律: (3,4,5), (5,12,13), (7,24,25), (9,40,41), (11,60,61), (13,84,85), (15,112,113), 發現每組第一個數的平方數減去1後, 所產生新的數再除以2, 得到每組第二個數, 每組第二個數再加上1, 得到每組第三個數。本研究探討畢氏三元數互相取代與產生的可能性, 從圓點方陣的計算點數獲得畢氏三元數的生成公式, 整個探索的過程呈現出數學中最美妙的規律性, 欣喜之餘, 期待將來有機會能對畢氏數作進一步的研究, 以發現更多美妙的數學規律性。

誌謝 由衷感謝彰化師範大學數學系施皓耀教授, 因爲在施教授的鼓勵與指導下, 這一篇文章才能完成。

参考資料

1. 黃文達 (2009)。勾股三元數組。台灣數學博物館。2009年9月7日,
   取自:http://museum.math.ntnu.edu.tw/view.php?menuID=55
2. 蔡聰明 (2010) 。數學拾貝。台北市: 三民。
3. 賴昱維 (2012) 。三僱四請 — 從畢氏定理到 N 元畢氏數。中華民國第五十二屆中小學展覽會國小組數學科, 民國101年。

—本文作者投稿時就讀彰化縣立員林國民小學六年級資優班—