數學傳播 38卷2期, pp. 82-87

冪次和表為 n 之多項式的係數律則

葉東進

證明等式 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$ 及 $1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2$, 幾乎是學過數學歸納法的人必有的經驗。證明是一回事, 較爲深刻的應當是提問: 這些等式是如何知道的?

這裡, 我們換個角度來看此問題。假定我們已經知道一般 $1^k+2^k+\cdots+n^k$ 是可表爲一個 n 的多項式, 且其最高次項爲 $\frac{1}{k+1}n^{k+1}$ (註), 那麼, 知道了多項式的各項係數, 便等同於找出了這些等式。

把 $1^k+2^k+\cdots+n^k$ 表爲 n 的多項式 $F_k(n)$ 時, 其通項 n^{k-m} 的係數記爲 A_m。由 $F_k(0)=0$, 知 $F_k(n)$ 的常數項爲 0; 把 $F_k(n)$ 的最高次項記爲 $A_{-1}n^{k+1}$。因此

$$F_k(n)=A_{-1}n^{k+1}+A_0n^k+A_1n^{k-1}+\cdots+A_{k-1}n$$

除了已知 $A_{-1}=\frac{1}{k+1}$ 之外, $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ 的呈現是否具有規律? 我們有

$$\begin{aligned}
F_1(n)&=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\\
F_2(n)&=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{2}{12}n\\
F_3(n)&=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{3}{12}n^2+0\cdot n\\
F_4(n)&=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{4}{12}n^3+0\cdot n^2-\frac{1}{30}n
\end{aligned}$$

觀察上面實例, 規律似乎存在。如果存在, 它是什麼樣子?

首先, 由

$$1^k+2^k+\cdots+n^k=A_{-1}n^{k+1}+A_0n^k+A_1n^{k-1}+\cdots+A_{k-1}n$$

所以

$$\begin{aligned}
&1^k+2^k+\cdots+(n-1)^k\\
&\quad=A_{-1}(n-1)^{k+1}+A_0(n-1)^k+A_1(n-1)^{k-1}+\cdots+A_{k-1}(n-1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= A_{-1}[n^{k+1} - C_1^{k+1}n^k + C_2^{k+1}n^{k-1} - C_3^{k+1}n^{k-2} + \cdots] \\
&\quad + A_0[n^k - C_1^k n^{k-1} + C_2^k n^{k-2} - C_3^k n^{k-3} + \cdots] \\
&\quad + A_1[n^{k-1} - C_1^{k-1}n^{k-2} + C_2^{k-1}n^{k-3} - C_3^{k-1}n^{k-4} + \cdots] \\
&\qquad \vdots \\
&\quad + A_{k-1}[n-1]
\end{aligned}
$$

上面二式相減得

$$
\begin{aligned}
&[A_{-1}C_1^{k+1} - 1]n^k - [A_{-1}C_2^{k+1} - A_0C_1^k]n^{k-1} + [A_{-1}C_3^{k+1} - A_0C_2^k + A_1C_1^{k-1}]n^{k-2} \\
&\qquad - [A_{-1}C_4^{k+1} - A_0C_3^k + A_1C_2^{k-1} - A_2C_1^{k-2}]n^{k-3} + \cdots = 0
\end{aligned}
$$

因爲上式是一個 n 的恆等式, 故其每項係數皆爲 0, 因此有:

$$
\begin{aligned}
1 - A_{-1}C_1^{k+1} &= 0 \\
A_0C_1^k - A_{-1}C_2^{k+1} &= 0 \qquad (1.0) \\
A_1C_1^{k-1} - A_0C_2^k + A_{-1}C_3^{k+1} &= 0 \qquad (1.1) \\
A_2C_1^{k-2} - A_1C_2^{k-1} + A_0C_3^k - A_{-1}C_4^{k+1} &= 0 \qquad (1.2) \\
\vdots \qquad\qquad & \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

一般爲

$$A_mC_1^{k-m} - A_{m-1}C_2^{k-m+1} + A_{m-2}C_3^{k-m+2} - \cdots + (-1)^{m+1}A_{-1}C_{m+2}^{k+1} = 0 \qquad (1.m)$$

因 $C_1^{k-m} = k - m$, 所以上面的一般式可化約爲:

$$A_m = \frac{1}{2}A_{m-1}C_1^{k-m+1} - \frac{1}{3}A_{m-2}C_2^{k-m+2} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{m+2}A_{-1}C_{m+1}^{k+1}$$

由此而得

$$
\begin{aligned}
A_{-1} &= \frac{1}{k+1} \\
A_0 &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2}C_0^k = a_0 \cdot C_0^k && (記\ \frac{1}{2} = a_0 (= A_0)) \\
A_1 &= \frac{1}{2}A_0C_1^k - \frac{1}{3}A_{-1}C_2^{k+1} \\
&= (\frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{6})C_1^k = a_1 \cdot C_1^k && (記\ \frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{6} = a_1) \\
A_2 &= \frac{1}{2}A_1C_1^{k-1} - \frac{1}{3}A_0C_2^k + \frac{1}{4}A_{-1}C_3^{k+1} \\
&= \frac{1}{2}a_1C_1^kC_1^{k-1} - \frac{1}{3}a_0C_2^k + \frac{1}{12}C_2^k
\end{aligned}
$$

$$= (a_1 - \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{12})C_2^k = a_2 \cdot C_2^k \qquad\qquad (\text{記 } a_1 - \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{12} = a_2)$$

以此類推, A_3 可表爲 $a_3 \cdot C_3^k$; A_4 可表爲 $a_4 \cdot C_4^k$ 等等。

假定 A_{m-1} 可表爲 $a_{m-1} \cdot C_{m-1}^k$, 則由

$$\begin{aligned}
A_m &= \frac{1}{2}A_{m-1}C_1^{k-m+1} - \frac{1}{3}A_{m-2}C_2^{k-m+2} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{m+2}A_{-1}C_{m+1}^{k+1}\\
\Rightarrow A_m &= \frac{1}{2}a_{m-1} \cdot C_{m-1}^k C_1^{k-m+1} - \frac{1}{3}a_{m-2} \cdot C_{m-2}^k C_2^{k-m+2} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(m+1)(m+2)}C_m^k\\
&= \frac{1}{2}a_{m-1} \cdot m \cdot C_m^k - \frac{1}{3}a_{m-2} \cdot \frac{m(m-1)}{2!} \cdot C_m^k + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(m+1)(m+2)}C_m^k\\
&= \Big[\frac{1}{2}C_1^m \cdot a_{m-1} - \frac{1}{3}C_2^m \cdot a_{m-2} + \cdots + (-1)^{m-1} \cdot \frac{1}{m+1}C_m^m \cdot a_0\\
&\quad + (-1)^m \frac{1}{(m+1)(m+2)}\Big]C_m^k
\end{aligned}$$

所以 A_m 亦可表爲 $a_m \cdot C_m^k$。

故由數學歸納, 我們得到如下結論:

定理: $1^k+2^k+\cdots+n^k$ 表爲 n 之多項式 $F_k(n)$ 時, 其通項 n^{k-m} 的係數爲 $A_m = a_m \cdot C_m^k$, 其中

$$a_m = \frac{1}{2}C_1^m \cdot a_{m-1} - \frac{1}{3}C_2^m \cdot a_{m-2} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{1}{m+1}C_m^m \cdot a_0 + (-1)^m \frac{1}{(m+1)(m+2)}$$

其次, 由

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k = A_{-1}n^{k+1} + A_0 n^k + A_1 n^{k-1} + \cdots + A_{k-1}n$$

所以

$$\begin{aligned}
&1^k + 2^k + \cdots + (n+1)^k\\
&\quad = A_{-1}(n+1)^{k+1} + A_0(n+1)^k + A_1(n+1)^{k-1} + \cdots + A_{k-1}(n+1)\\
&\quad = A_{-1}[n^{k+1} + C_1^{k+1}n^k + C_2^{k+1}n^{k-1} + C_3^{k+1}n^{k-2} + \cdots]\\
&\qquad + A_0[n^k + C_1^k n^{k-1} + C_2^k n^{k-2} + C_3^k n^{k-3} + \cdots]\\
&\qquad + A_1[n^{k-1} + C_1^{k-1}n^{k-2} + C_2^{k-1}n^{k-3} + C_3^{k-1}n^{k-4} + \cdots]\\
&\qquad\quad \vdots\\
&\qquad + A_{k-1}[n+1]
\end{aligned}$$

上面二式相減得

$$(n+1)^k = A_{-1}C_1^{k+1}n^k + [A_{-1}C_2^{k+1} + A_0C_1^k]n^{k-1} + [A_{-1}C_3^{k+1} + A_0C_2^k + A_1C_1^{k-1}]n^{k-2}$$
$$+[A_{-1}C_4^{k+1} + A_0C_3^k + A_1C_2^{k-1} + A_2C_1^{k-2}]n^{k-3} + \cdots$$

比較兩邊係數得

$$\begin{aligned}
C_0^k &= A_{-1}C_1^{k+1} \\
C_1^k &= A_0C_1^k + A_{-1}C_2^{k+1} && (2.0)\\
C_2^k &= A_1C_1^{k-1} + A_0C_2^k + A_{-1}C_3^{k+1} && (2.1)\\
C_3^k &= A_2C_1^{k-2} + A_1C_2^{k-1} + A_0C_3^k + A_{-1}C_4^{k+1} && (2.2)\\
&\vdots && \vdots
\end{aligned}$$

一般爲

$$C_{m+1}^k = A_mC_1^{k-m} + A_{m-1}C_2^{k-m+1} + \cdots + A_{-1}C_{m+2}^{k+1} \qquad (2.m)$$

現在把式 (1.0) + (2.0), (1.1) + (2.1), (1.2) + (2.2), …, (1.m) + (2.m), 得

$$\begin{aligned}
C_1^k &= 2A_0C_1^k \\
C_2^k &= 2[A_1C_1^{k-1} + A_{-1}C_3^{k+1}] \\
C_3^k &= 2[A_2C_1^{k-2} + A_0C_3^k] \\
&\vdots \\
C_{m+1}^k &= 2[A_mC_1^{k-m} + A_{m-2}C_3^{k-m+2} + \cdots]
\end{aligned}$$

上面最後一式在

(i) m 爲偶數時

$$C_{m+1}^k = 2[A_mC_1^{k-m} + A_{m-2}C_3^{k-m+2} + \cdots + A_0C_{m+1}^k] \tag{1}$$

(ii) m 爲奇數時

$$C_{m+1}^k = 2[A_mC_1^{k-m} + A_{m-2}C_3^{k-m+2} + \cdots + A_1C_m^{k-1} + A_{-1}C_{m+2}^{k+1}] \tag{2}$$

由於 A_m 可表爲 $a_m \cdot C_m^k$, 因此 (1) 式可化約爲:

$$1 = 2[C_1^{m+1} \cdot a_m + C_3^{m+1} \cdot a_{m-2} + \cdots + C_{m+1}^{m+1} \cdot a_0] \tag{3}$$

(2) 式可化約爲:

$$1 = 2[C_1^{m+1} \cdot a_m + C_3^{m+1} \cdot a_{m-2} + \cdots + C_m^{m+1} \cdot a_1 + \frac{1}{m+2}] \tag{4}$$

又由 $a_0=\frac{1}{2}$, 式 (3) 可再化簡爲:

$$C_1^{m+1}\cdot a_m+C_3^{m+1}\cdot a_{m-2}+\cdots+C_{m-1}^{m+1}\cdot a_2=0 \tag{5}$$

但

$$a_2=a_1-\frac{1}{3}a_0+\frac{1}{12}=(\frac{1}{2}a_0-\frac{1}{6})-\frac{1}{3}a_0+\frac{1}{12}=0$$

因此經由 (5) 式可推得 $a_4=a_6=\cdots=0$, 即當 m 爲偶數時, a_m 之值恆爲 0。

由此, 我們更簡化了前述所得到的定理中關於 $F_k(n)$ 的通項 n^{k-m} 的係數 $A_m=a_m\cdot C_m^k$, 其中的 a_m 爲:

$$\begin{cases}\text{當 } m \text{ 爲偶數時, } a_m=0, m=2,4,6,\ldots\\ \text{當 } m \text{ 爲奇數時, } a_m=-(\frac{1}{3}C_2^m\cdot a_{m-2}+\frac{1}{5}C_4^m\cdot a_{m-4}+\cdots+\frac{1}{m}C_{m-1}^m\cdot a_1)+\frac{m}{2(m+1)(m+2)}\\ \qquad(\text{或寫成: } a_m=-\frac{1}{m+1}[C_3^{m+1}\cdot a_{m-2}+C_5^{m+1}\cdot a_{m-4}+\cdots+c_m^{m+1}\cdot a_1-\frac{m}{2(m+2)}])\end{cases}$$

例: 由

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{2}\\ a_1&=\frac{1}{2\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{12}\\ a_3&=-a_1+\frac{3}{2\cdot 4\cdot 5}=-\frac{1}{120}\\ a_5&=-\frac{10}{3}a_3-a_1+\frac{5}{2\cdot 6\cdot 7}=\frac{1}{252}\\ &\vdots\end{aligned}$$

當 $k=6$ 時

$$\begin{aligned}A_0&=\frac{1}{2}C_0^6=\frac{1}{2}\\ A_1&=\frac{1}{12}C_1^6=\frac{1}{2}\\ A_3&=-\frac{1}{120}C_3^6=-\frac{1}{6}\\ A_5&=\frac{1}{252}C_5^6=\frac{1}{42}\end{aligned}$$

因此

$$1^6+2^6+\cdots+n^6=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n$$

註: 由二項式定理可得

$$(n+1)^{k+1}-n^{k+1}=C_k^{k+1}n^k+C_{k-1}^{k+1}n^{k-1}+\cdots+C_1^{k+1}n+1$$

經由此式, 得下列諸式:

$$\begin{cases} 2^{k+1}-1^{k+1}=C_k^{k+1}\cdot 1^k+C_{k-1}^{k+1}\cdot 1^{k-1}+\cdots+C_1^{k+1}\cdot 1+1 \\ 3^{k+1}-2^{k+1}=C_k^{k+1}\cdot 2^k+C_{k-1}^{k+1}\cdot 2^{k-1}+\cdots+C_1^{k+1}\cdot 2+1 \\ \vdots \\ (n+1)^{k+1}-n^{k+1}=C_k^{k+1}\cdot n^k+C_{k-1}^{k+1}\cdot n^{k-1}+\cdots+C_1^{k+1}\cdot n+1 \end{cases}$$

上面諸式相加, 得遞迴關係式:

$$(n+1)^{k+1}-1=C_k^{k+1}F_k(n)+C_{k-1}^{k+1}F_{k-1}(n)+\cdots+C_1^{k+1}F_1(n)+n,$$
$$\text{其中}\quad F_k(n)=1^k+2^k+\cdots+n^k,\qquad k=1,2,3,\ldots$$

運用此式, 便知道, 對任意正整數 k, $1^k+2^k+\cdots+n^k$ 確可表爲一個 n 的多項式, 且其最高次項爲 $\frac{1}{k+1}n^{k+1}$。

—本文作者爲國立科學園區實驗高中退休數學教師—