數學傳播　38卷2期, pp. 59-69

曲面簡介

邱鴻麟

摘要: 本文介紹連通封閉曲面的基本性質和分類; 這裡所謂的性質指的是拓樸性質。預設的讀者是高中或大學部學生。我們將描述分類定理, 並以例子來說明定理內容, 讓讀者更容易地瞭解定理。之後, 我們會再給出封閉曲面的一組完備的不變量, 其組成有兩個, 即可定位性和尤拉數。對於可定位封閉曲面, 尤拉數是唯一不變量, 文章後面將給出尤拉數的各種不同的表法, 讓讀者瞭解從各種不同的觀點手法出發, 都可以表達出曲面的根本性質, 這也充分展現出條條道路通羅馬的精神, 也是本文的主旨。

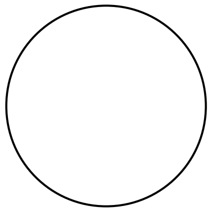
1. 曲面分類

這一節所介紹的題材, 將是本文的主要內容, 主要是要把曲面的分類定理講清楚。每一類曲面都有相同的拓樸性質, 在本文第 1.3 小節將會對拓樸性質做更充分的說明。事實上, 它是以同胚來區分的, 而同胚就是兩個拓樸曲面之間存在一個可逆映射, 這個映射與它的逆映射都是連續的。直觀上, 我們可以對曲面做任意變形和拉扯, 只要不把曲面扯斷或把原先不相同的點黏在一塊兒, 都可視爲同胚曲面。例如, 球面與橢圓面或多面體表面都是同胚, 一個圓環與把手亦同胚。

1.1. 曲面初略概念圖示與操作

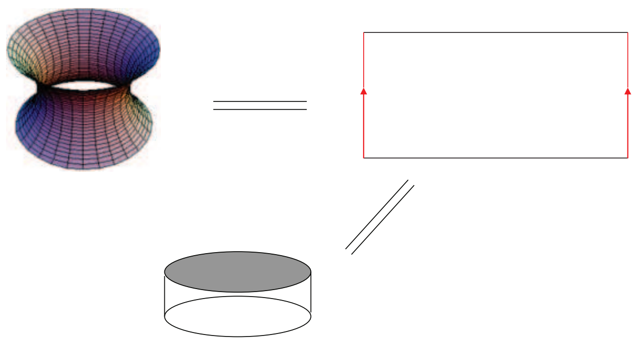
所謂曲面指的就是二維的流形, 局部上來看, 它就像是 $\mathbb{R}^2$ 平面上的一個開集, 所以曲面可以想像成是諸如此類的若干開集, 以適當的方式黏起來的結果。在文裡, 只要是同胚的曲面, 都視爲相同曲面, 沒有分別。至此, 對於曲面的理解, 也許還是模糊的。對曲面概念做一粗略的介紹, 我們將以圖示的方式, 讓我們對曲面有更進一步的理解。底下是常見的一些例子。

- 圓盤: 這是最簡單的曲面, 如下圖所示



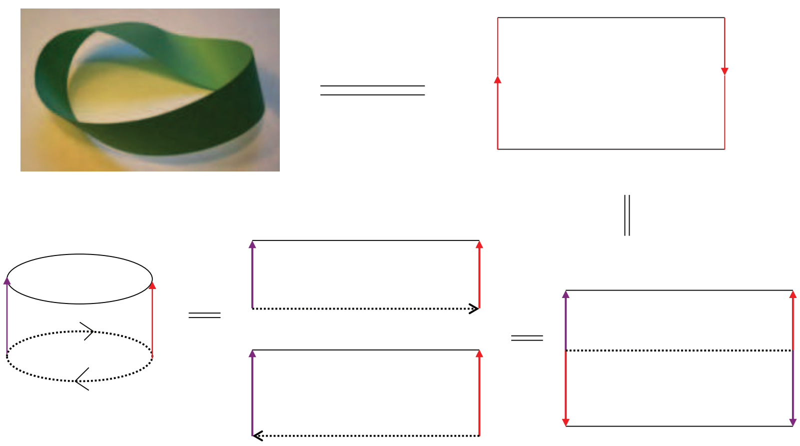
它是在 $\mathbb{R}^2$ 平面上, 與原點距離小於等於某一個固定值的點所構成之集合。這個圓盤實際上是帶邊界的, 它的邊界是一個圓。

- 把手 (環面): 如下圖



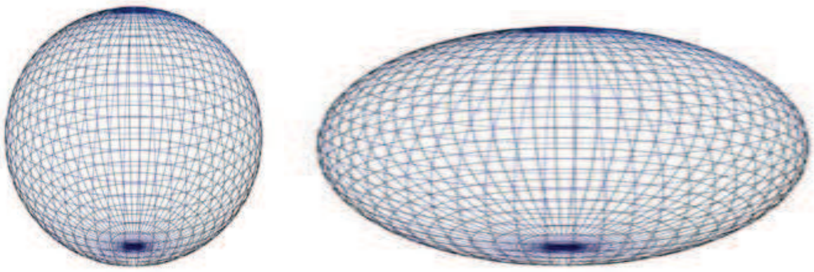
把一張長方形的紙左右兩邊以相同方向的箭頭標出其方向, 再遵照箭頭方向黏起來 便得到把手。把手其實就是一個圓盤, 然後在其內部挖掉一個洞 (開圓盤)。假設 S^1 是一個圓且 $I=[0,1]$ 是一個閉區間, 則把手就是此積空間 $S^1\times I$。把手的邊界是由兩個圓組成。

- 莫比耳環: 如下圖



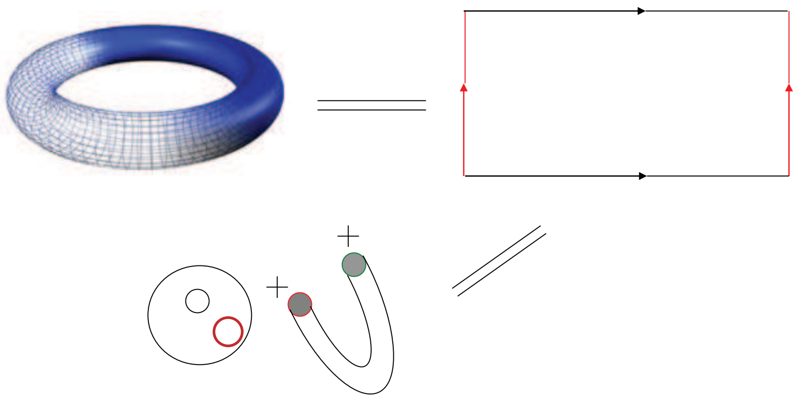
莫比耳環與把手不一樣的地方在於標示在長方形左右兩邊的箭頭方向相反, 所以沿箭頭方向黏起兩邊時, 得到不一樣的曲面。我們亦可對這一張紙作一點勞作, 給出莫勞作操作的方式通常是沿某些曲線, 用剪刀剪開, 再做適當的組合, 最後還必須把當初剪開的部分黏起來, 這過程並不會影響空間的同胚性, 所以最後操作出來的空間跟原先的空間是一致的。例如對於莫比耳環, 我們可以沿這一張長方形紙的中線 (虛線部分) 剪開來分成兩個長方形, 每一個長方形虛線部分再標以箭頭以示相黏的方向, 最後一步再黏長方所成的左右兩邊, 黏的時候要尊重當初的箭頭方向, 這樣便得到莫比耳環, 它其實就是一個把手; 是把其中一個邊界圓的對徑點等同起來的商空間。從拓樸學來說, 所謂黏起來的意思就是把一些點等同起來; 或視爲同一點, 然後取商拓樸, 這是一種商空間。這一般是在幾何和拓樸學裡, 構造空間常用的手法。底下會一直用到這樣的概念。

- 球面: 地球表面就是一個球面、橢圓面、多面體表面, 亦都是一個球面。如下圖所示



定義球面的方式很多, 最標準的定義應是在$\mathbb{R}^3$上與固定點等距的所有點構成的空間。

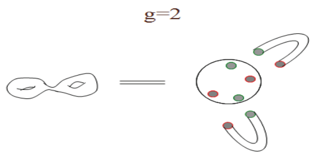
- 輪胎面: 如下圖



輪胎面就是一張長方形的紙, 把左右上下兩組對邊, 依箭頭所標方向黏起來的結果。它也可以看成是一個球面挖掉兩個洞, 再直接沿邊黏上一根把手得到。輪胎面可以定義爲此積空間 $S^1 \times S^1$。它其實就是一個把手, 是把構成邊界的兩個圓, 視爲同一個圓; 即一個把手, 然後

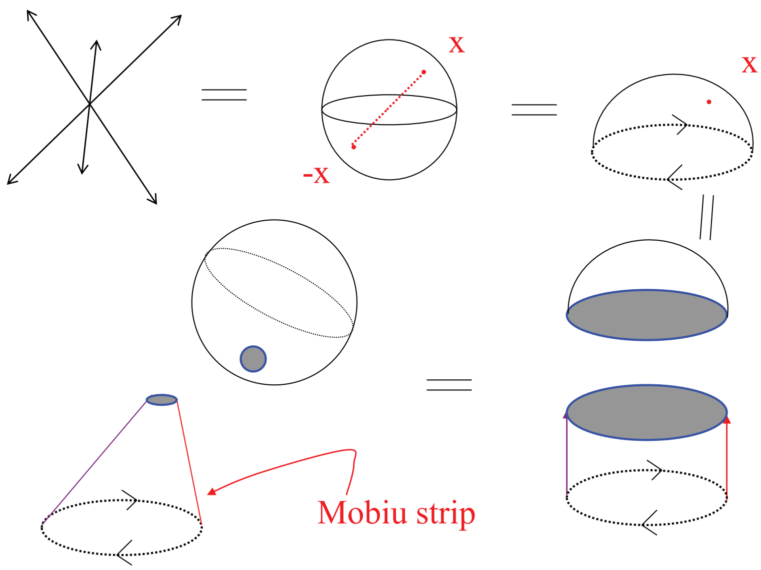
把兩個邊界圓黏起來的曲面。

- 多輪胎面: 如下圖



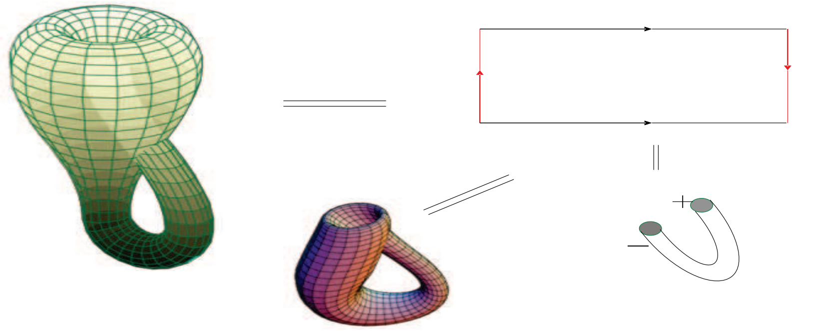
是若干個輪胎面, 一個接一個做連通和的結果。兩個輪胎面做連通和得到如圖左上角的圖形, 簡稱 2-輪胎面。三個輪胎面做連通和得到如圖右上角的圖形, 爲3-輪胎面。若是g個輪胎面做連通和, 就得 g-輪胎面。所謂連通和的意思, 就是在任意兩個曲面上, 各自挖掉一個圓盤 (開圓盤), 然後兩曲面再沿著洞的邊黏起來所得到的結果。2-輪胎面亦可看成是一個球面挖掉四個洞, 再直接沿邊黏上兩根把手得到。依此類推, g-輪胎面就是一個球面挖掉 $2g$ 個洞, 再直接沿邊黏上 g 根把手得到。

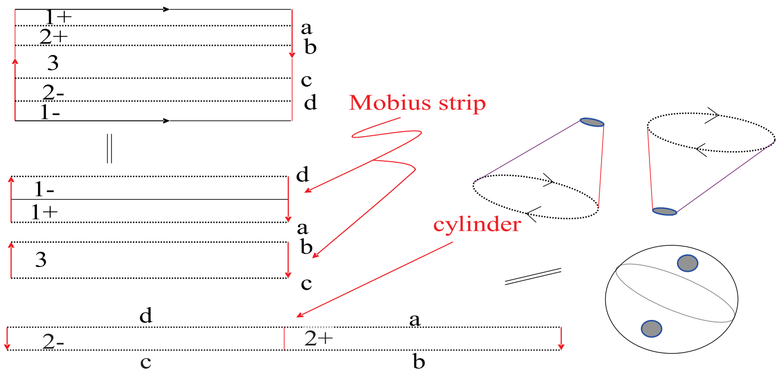
- 射影平面: 粗略來說, 就是在$\mathbb{R}^3$上, 把通過原點的直線視爲一個點所構成的空間。因自由度少一維, 所以是一個2維空間。亦可把射影平面看成是一個球面但需把對徑點視爲同一個點。如下圖



前面兩個圖形就如上所示, 它們代表相同的曲面, 是因爲一條過原點的直線只跟球面有兩個交點; 事實上就是對徑點 x 與 $-x$。若上下兩半球, 我們只取 x 爲射影平面上點的代表, 則射影平面就變成帶邊的上半球面, 然後把赤道部分的對徑點等同起來。很容易看出, 只要在代表射影平面的上半球面內部挖一個洞, 則得到一個莫比耳環。因此我們亦可看出, 射影平面實際上就是一個球面; 挖掉一個洞 (開圓盤), 然後再黏上一個莫比耳環所得到的結果。

- 克萊因瓶: 如下圖





克萊因瓶與輪胎面都是由把手把兩個邊界圓黏起來得到, 只是黏的方向相反。因此克萊因瓶就是一張長方形的紙, 把左右上下兩組對應邊黏起來, 但注意到其黏起來的方向與輪胎面不一樣, 左右兩邊的箭頭一上一下。若把代表克萊因瓶的這一張紙做適當的剪裁, 組合, 再重新黏起來, 我們亦可得到克萊因瓶; 實際上就是一個球面挖掉兩個洞, 然後在每一個洞上逐一黏上一個莫比爾環得到的。如圖所示, 虛線的部分是要剪裁的部分, 分別用 a, b, c, d 代表。第二步是把 $1+, 1-$ 所代表的兩個長方形沿箭頭方向黏起來, 這一過程得到一個莫比耳環, 然後黏 $2+, 2-$, 得到一個把手。注意到 3 本身亦是一個莫比耳環。最後再把剪裁的部分黏起來。因爲一個把手就是一個球面挖掉兩個洞得到, 因此我們得到上述結果。

1.2. 拓樸性質

現在我們對曲面已有基本的認識, 因爲從拓樸觀點看, 同一曲面的表現方式有時差異非常

大, 我們如何去區別不同的曲面呢? 例如前面所介紹的諸曲面, 我們如何知道他們到底是不是同一種曲面, 這裡所謂同一種是說它們之間有一個同胚映射, 這就牽涉到曲面本質的探討, 也就是曲面的拓樸性質。簡單地說, 拓樸性質就是空間在同胚映射下不會改變的性質; 有時是一個量或者一個方程等。拓樸性質有時也稱爲拓樸不變量, 例如緊致性, 連通性, 可定位性等。相反地, 兩點之間的距離、面積、形狀等, 就不是拓樸性質。原則上我們可以用任一個拓樸性質來檢查空間的相異性, 因爲只要其中有一個不變量不一樣, 這兩個空間就不同胚, 也就是說, 從拓樸觀點來看, 這兩個空間不一樣。檢查空間的相異性是比較簡單的, 困難的是檢查兩個空間是否等價, 從拓樸觀點來說, 就是檢查他們是一樣的空間。一般我們沒辦法一一的檢查它們的不變量, 來說明兩個空間一樣, 因爲我們不知道這樣的檢查是否詳盡完備, 也許你檢查了 100 個甚至 1000 個不變量都相同, 但可能在第 1001 個時出問題, 除非你能確定一組完備的不變量。所謂完備的意思就是說, 只要檢查了這一組裏的所有不變量, 如果都是一樣, 則可以表示這兩個空間一樣。

一般來說找一組完備不變量是非常困難的事情, 對於封閉曲面可以找到一組, 它由兩個不變量構成; 一是可定位性, 另一個是其尤拉數。這兩個拓樸性質可以完全地區分不同的封閉曲面。

1.3. 可定位性

在描述分類定理之前, 我們先把可定位性講淸楚。若是一個擺在$\mathbb{R}^3$空間的曲面, 所謂曲面是可定位的意思是說這一曲面存在一個定義在整個曲面上的連續法向量場。檢查一下前面所介紹的曲面, 可以知道圓盤、把手、球面、輪胎面、多輪胎面是屬於可定位的曲面; 然而莫比爾環, 射影平面和克萊因瓶是屬於不可定位曲面。

1.4. 分類定理

由前面介紹的封閉曲面, 我們認識到, 他們基本上都可以從一個球面經由適當的手術或操作而構造出來。例如多輪胎面就是由球面挖掉偶數個洞, 再兩兩回黏上一個把手; 而射影平面與克萊因瓶則是由球面分別挖掉一個和兩個洞, 然後分別在每個挖掉的洞回黏上一個莫比耳環。下面的曲面分類定理告訴我們所有的連通封閉曲面都可以這樣的方式構造出來。

定理 2.1 (**分類基本定理**): 任何可定位封閉曲面必定同胚於

- 一個球面; 或
- 一個球面; 挖掉偶數個圓盤, 然後沿著邊, 兩兩回黏上一個把手。

若是不可定位封閉曲面, 則其同胚於一個球面; 挖掉若干個圓盤, 然後沿邊逐一回黏上一個莫比耳環。這樣的曲面兩兩之間不同胚。

對於可定位曲面, 若令 g 是得到它所必需黏上球面的把手數, 則可知 g 是區別可定位封閉曲面的一個完全的不變量。相似地, 對於不可定位曲面, 若令 k 是得到它所必需黏上球面的莫比耳環數, 則 k 就是區別不可定位封閉曲面的一個完全的不變量。事實上 $2-2g$ 和 $2-k$ 分別是它們的尤拉數。所以對於封閉曲面, 可定位性和尤拉數構成一組完備的不變量, 它們可以完全地區別不同的封閉曲面。

2. 尤拉數

可定位性把曲面分成兩大類, 剩下的就完全由尤拉數來決定。對於曲面, 可作三角分割。所謂三角分割就是將曲面分割成若干個三角形的聯集, 不同三角形之間只可能在邊或點上有重疊。而曲面 Σ 的尤拉數就定義爲這一三角分割的點線面個數的交錯和, 即尤拉數 $\chi(\Sigma)=V-E+F$, 其中 V, E, F 分別代表此三角分割的頂點, 邊和面的個數。可以證明這樣的定義跟三角分割無關, 甚至也不一定要做三角分割也可做四角分割或多邊形的分割這並不會影響尤拉數的計算結果。

3. 尤拉數的其它表達方式

對於可定位封閉連通曲面, 其惟一的拓樸本質就是尤拉數 (不可定位曲面亦然)。這一節主要是要表明, 從不同的觀點切入曲面的研究, 總是可以讓我們達到這一拓樸本質。也就是說, 不管你是直接從拓樸切入或從幾何, 分析, 組合任何觀點, 甚至從物理切入, 你總是可以給出尤拉數的一個精緻的表達式。這確確實實讓我們體悟出, 什麼叫做條條道路通羅馬的精神。本節將著重在從幾何的觀點來理解可定位曲面的尤拉數。

3.1. 高斯曲率的解釋

我們可以從歐式平面三角形的內角和說起。國中時期每個同學都熟悉的一個定理說, 三角形內角和等於 180 度。其實這一定理只有在歐式平面幾何是對的。對於其他二維空間的幾何這不一定正確, 例如球面幾何, 其三角形的三內角和大於 180 度, 而非歐幾何或雙曲幾何則剛好相反, 其三角形的三內角和小於 180 度。這裡當然需要把三角形講清楚, 也就是說它的邊是怎樣的一種曲線, 這種曲線當然是歐式平面幾何直線的一種推廣, 它事實上就是測地線。有一種情況我們容易去描述直線在任何曲面的一種推廣, 就是假設曲面被平滑的擺在三維歐式空間中, 則曲面每一點有一個切平面, 每一個切平面從外在三維歐式空間定義了一個內積, 則我們可以利用此內積去計算任意兩點之間的距離。而測地線可以理解成是連接固定兩點之間所有曲線長度最短的曲線。事實上, 這只有在局部上是對的。對於球面其測地線就是大圓, 即局部上在球面連接任意兩固定點的最短曲線就是大圓。這也說明爲什麼飛機總是要盡可能的走大圓航線, 因

爲航程最短。所以球面上的三角形就是三邊是由大圓所構成的三角形。而對於任意地擺在三維歐式空間中的平滑曲面, 其內部之三角形就是三邊由測地線所構成, 這樣我們就可以計算其三內角和。由曲面的一般理論知, 這三角形的三內角和減掉一個 π 會跟曲面的曲率有關。這就是著名的 (局部形式的) Gauss-Bonnet 定理, 其嚴格表述如下:

定理 3.1 (**局部形式的** Gauss-Bonnet **定理**): 假設曲面上三角形 Δ 的三內角分別是 A, B 和 C 則我們有

$$A+B+C-\pi=\int_{\Delta} K\ dA, \tag{1}$$

其中 K 和 dA 分別是曲面的高斯曲率和面積元。

半徑爲 r 的球面, 其高斯曲率爲 $\frac{1}{r^2}>0$。這說明在球面幾何, 其三角形內角和大於180度。反之, 在雙曲幾何高斯曲率爲負。我們可以一個例子來檢驗這一定理。例如在半徑爲r的球面上, 我們可以取兩條互相垂直的經線, 再配和赤道, 則這三條大圓把球面均分成 8 個三角形。對其中一個三角形做驗算, 因赤道與經線永遠垂直, 所以每一個內角是 90度; 即 $\frac{\pi}{2}$, 因此三內角和扣掉一個 π 等於 $\frac{\pi}{2}$。反之, 計算式子 (1) 的右邊積分式, 因高斯曲率是常數 $\frac{1}{r^2}>0$ 且三角形面積是 $\frac{\pi r^2}{2}$, 所以此積分式容易看出亦等於 $\frac{\pi}{2}$。

如果更一般, 假設三角形的三個邊不限制爲測地線, 這個時候邊跟測地線的差異要考慮進來。這個差異是由測地曲率來描述, 即一條躺在某一曲面的曲線是測地線的充要條件是該曲線的測地曲率爲零。此時局部形式的 Gauss-Bonnet 定理, 要把測地曲率在邊上的總值加進來. 其形式如下:

定理 3.2 (**局部形式的** Gauss-Bonnet **定理**): 假設曲面上三角形 Δ 的三內角分別是 A, B 和 C 且三角形三邊不一定是測地線, 則我們有

$$A+B+C-\pi=\int_{\Delta} K\ dA+\sum_{j=1}^{3}\int_{\gamma_j} k_j d\sigma_j, \tag{2}$$

其中 k_j 和 $d\sigma_j$ 分別是邊 $\gamma_j, j=1,2,3$ 的測地曲率和長度元。

對於一封閉曲面, 作一三角分割, 然後在每一子三角形上應用局部形式的 Gauss-Bonnet 定理, 再經由適當的組合整理, 便可得到全域的 Gauss-Bonnet 定理 如下:

定理 3.3 (**Gauss-Bonnet 定理**):

$$\chi(\Sigma)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} K\ dA. \tag{3}$$

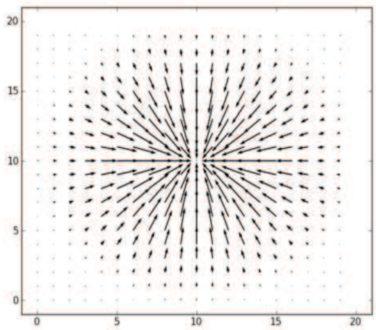
Gauss-Bonnet 定理的含義是說, 一個曲面的本質, 可以從其曲面的某種彎曲率 (高斯曲率) 的總和完全決定。一個住在這一曲面的生物, 如果它有可能逐點求出其曲率, 再總和, 它便

知道它是住在什麼樣的空間。反過來說, 把一個曲面擺在 $\mathbb{R}^3$中 我們可以對它做不同的變形使其逐點高斯曲率改變, 但 Gauss-Bonnet 定理告訴我們, 它的曲率總和不變, 它受到曲面本質的束縛, 是一種宿命。

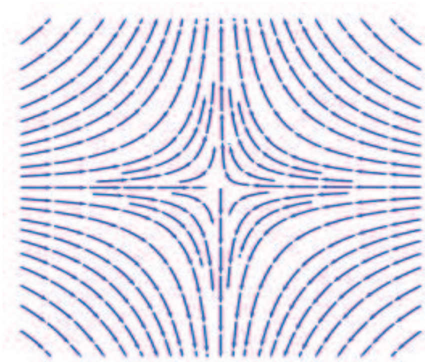
曲面尤拉數在數學上還有很多種理解和表示, 但因牽涉到較多的數學, 所以底下只對它們做一簡單表述, 有興趣的讀者請參考文獻 [3]。

3.2. 向量場奇點指標的解釋

假設 X 是一個向量場, 其奇點就是 X 等於零的那些點。對於孤立奇點可定義其指標。指標的意思就是假設你繞奇點逆時鐘走一圈, 看看向量場會繞幾圈, 這個圈數就是指標, 正負值由逆或順時鐘來決定, 若逆則正, 若順則負, 如圖:



指標 = 1



指標 = -1

左圖中間是向量場的一個孤立奇點, 如果我們沿半徑足夠小的圓, 逆時鐘繞此奇點一圈, 會看到在此小半徑圓上, 向量場亦逆時鐘繞此奇點一圈, 所以其指標爲 1。例如, 我們從奇點正東邊出發, 此時向量指向西邊, 當我們逆時鐘走到北邊時, 看到向量指向南邊, 依此走一圈, 向量指向將由西, 再南, 再東, 再北, 最後又回到西邊, 剛好亦是逆時鐘轉一圈。右圖剛好相反, 所以其奇點指標是-1。

若 X 只有孤立奇點, 則 Hopf's 指標定理表明, 尤拉數等於向量場的奇點指標總和。

定理 3.4 (**Hopf's 指標定理**):

$$\chi(\Sigma) = \sum_{p\in S} Ind(X,p), \tag{4}$$

其中 S 是 X 的奇點集且 $Ind(X,p)$ 是其點 p 的指標。

陳省身先生在 1944 年 Ann. Math 的一篇短文給出 Gauss-Bonnet 定理的第一個 intrinsic 的證明, 並重証了 Hopf 指標定理。

3.3. Morse 理論的解釋

假設 $f:\Sigma:\to\mathbb{R}$ 是定義在曲面 Σ 上的一個 Morse 函數, 意思就是說其臨界點都是非退化的。因爲曲面局部是 $\mathbb{R}^2$ 上的開集, 所以可以把函數看成是兩個變數的函數。對某一點做泰勒展開式, 若其一階係數皆爲零, 則該點是一個臨界點。另外, 二階係數構成一個二階的方陣, 此二階方陣就是函數在此臨界點的 $Hessian$。若 $Hessian$ 是可逆的, 則稱此臨界點是非退化的。因爲曲面是二維的, 所以在每一個臨界點 a, 其 $Hessian$ 的負特徵値的個數是 $0,1$ 或 2。這個數目就定義爲臨界點 a 的指標, 用符號 $Ind(f,a)$ 表示。如果用 ν_j 表示指標爲j的臨界點個數, 則 Morse 定理表明, 尤拉數其實就是這些臨界點個數的某一種交錯總和。其明確形式如下:

定理 3.5 (**Morse 定理**):

$$\chi(\Sigma)=\sum_{j=0}^{2}(-1)^j\nu_j. \tag{5}$$

3.4. 理解成橢圓算子的指標

即 $\chi(\Sigma)=Ind(D)$, 其中 D 是 de-Rham Hodge 算子且 $Ind(D)$ 是算子指標。算子指標有兩種表達式, 一種是定義成 Kernel 的維數減掉 co-Kernel 的維數, 這是解析指標, 它其實就是流形上調和形式空間維度的交錯和。著名的 Atiyah-Singer 指標定理說明, 這一解析指標等於某一種拓樸指標, 即可表成特徵類的一種積分式。

3.5. 路徑積分的表示

可透過 Supersymmetric 理論重證 Gauss-Bonnet 定理。讀者可參考文獻[2],[4]。

4. 結論

對於可定位曲面, 尤拉數是唯一的不變量。

這樣的不變量可從不同的觀點方法出發而得到。本文的說明沒有任何證明, 嚴格說來也不嚴密。若要嚴格說明曲面的各種操作, 需要引進商拓樸(quotient topology) 的概念。但這件事情並不會幫助我們對曲面的理解, 所以我們捨棄掉。另外對於尤拉數曲率的表達, 讀者可參考曲面微分幾何的各種文獻, 一般都會介紹。Hopf's指標定理和 Morse 定理可參考文獻[3]。

對於曲面的理解, 讓我們瞭解到, 透過觀察空間上的一些現象; 例如一個流(向量場), 某一種函數或一種曲率, 就可以明確地讓我們知道我們是生活在什麼樣的空間, 而從某一含義來講, 這樣的觀察都是局部的, 而這也間接驗證了, 從局部來掌握全域是一種可行的想法或概念。在幾何上, 這是一種重要的想法, 而這樣的想法, 通常都蘊含豐富的數學題材。

參考文獻

1. Armstrong, M.A.: Basic Topology.
2. Cheng, J.-H. : A note on Surfaces.
3. 黃武雄: 初等微分幾何講稿。
4. Roger A. : A superspace path integral proof of the Gauss-Bonnet-Chern theorem, **J.G.P.**, vol 4, no. 4,1987.

—本文作者任教國立中央大學數學系—