數學傳播　38卷1期, pp. 76-96

幾種常見的數學思維方法

周春荔

從思維的基本成分方面對數學思維進行分類, 有數學形象思維; 數學邏輯思維; 數學直覺思維三大類。在認識數學規律、解決數學問題的過程中, 還常常使用由其自身特點所形成的一些數學思維方式、方法, 主要的有類化思維、配對思維、函數思維、空間思維、程序思維、整體思維、極端思維和構造思維等。

1. 求同為依據的類化思維

在形式邏輯中, 分類是揭示概念外延的一種邏輯方法。分類, 一要有分類標準, 二要既不遺漏又不重複。比如對全體正整數, 按能否被2整除爲標準可以分爲奇數與偶數兩大類; 按約數的個數可以劃分爲單位1 (1個正約數)、質數 (2個正約數)、合數 (正約數的個數 ≥ 3) 三類。對三角形的問題可以分爲直角三角形、銳角三角形和鈍角三角形三類進行討論; 對實數的問題有時按正數、負數與零三類進行研究; 有時按有理數與無理數兩大類數進行分析。這些都是在中學數學中常見的類化思維的例子。

分類方法在數學上的直接表現是集合的分劃。研究複雜的數學物件, 往往把具有共同性質的部分分爲一類, 形成數學上很有特色的思維方法 —類化思維。

設物件爲集合 M, $M_1, M_2, \ldots, M_k$ 爲其子部分。

若 $M=\bigcup_{i=1}^k M_i$ 且 $M_i \bigcap M_j=\varnothing$, $(i\neq j,\, i,j=1,2,\ldots,k)$ 則稱 $M_1, M_2, \ldots, M_k$ 爲 M 的一個分劃。若對每個 M_i 都認識清楚了, 對 M 的規律一般說來也就容易概括。俗語說 “物以類聚, 人以群分”, 就體現了類化思維的道理。

有人說, 不會正確分類就不可能學好數學, 這是非常有道理的。分類思想在中小學數學中非常有用。主要體現在分類討論或分情況說理在求解數學問題中的應用。

例1. 商店的糖果有3千克及5千克兩種包裝, 貨源充足保證供應。求證：凡購買8千克和8千克以上的整數千克的糖果, 售貨員都不需要拆包就可支付。

分析: 這個問題轉化爲純數學問題就是對自然數 $N\geq 8$, 一定存在非負整數 m, n, 使得 $N=3m+5n$ 成立。

證明: 對 $N \geq 8$, 按被 3 除的餘數分類討論:

(1) 若 $N = 3k(k \geq 3)$, 這時給顧客 k 包 3千克的糖果即可。

(2) $N = 3k+1(k \geq 3)$, 因爲 $3k+1 = 3(k-3) + 2 \times 5$, 所以給顧客 $k-3$ 包 3 千克包裝的糖果及 2 包 5 千克包裝的糖果即可。

(3) $N = 3k-1(k \geq 3)$, 因爲 $3k-1 = 3(k-2) + 1 \times 5$, 所以給顧客 $k-2$ 包 3 千克包裝的糖果及一包 5 千克包裝的糖果即可。

綜上討論表明, 對任意購買不小於8千克的整數千克的糖果, 都可以用3千克及5千克的包裝不用拆包即可完成支付。

例2. 證明: 平面上不過 $\triangle ABC$ 頂點的直線至多與 $\triangle ABC$ 的兩邊相交。

證明: 設 $\triangle ABC$ 所在平面爲 α, l 是 α 上不過 A, B, C 的一條直線。顯見, 直線 l 將平面分爲兩個半平面, l 下方的部分記爲 (I), l 上方的部分記爲 (II)。(I)、(II) 看作兩個抽屜, A, B, C 三點看作 3 個蘋果, 由抽屜原則, (I)、(II) 中有一個含有 A, B, C 中至少兩個點。爲確定起見, 不妨設 (I) 中至少含有 B、C 兩點, 顯然線段 BC 與 l 沒有公共點。即 l 與 $\triangle ABC$ 的 BC 邊不相交。因此可以斷言, l 至多與 $\triangle ABC$ 的 AB, AC 兩邊相交。

例3. 平面上五個點, 任三點不共線。一定存在其中的四個點爲一個凸四邊形的四個頂點。

分析: 平面上五個點, 任三點不共線。但5個點在平面上的分佈有無窮多種情況, 如何入手呢? 不妨把點的分佈分成幾類, 關鍵是確定好分類標準。可以按包圍這5個點的 “最小的凸多邊形” 的情形分爲3類: (1) 包圍這5個點的“最小的凸多邊形”是凸五邊形; (2) 包圍這5個點的“最小的凸多邊形”是凸四邊形; (3) 包圍這5個點的“最小的凸多邊形”是三角形。

若五個點構成一個凸五邊形的五個頂點, 其中的任意四點就是一個凸四邊形的四個頂點 (圖1(a))。

若有四個點是某個凸四邊形的四個頂點, 另一點在這個凸四邊形內, (圖1(b)), 顯然。

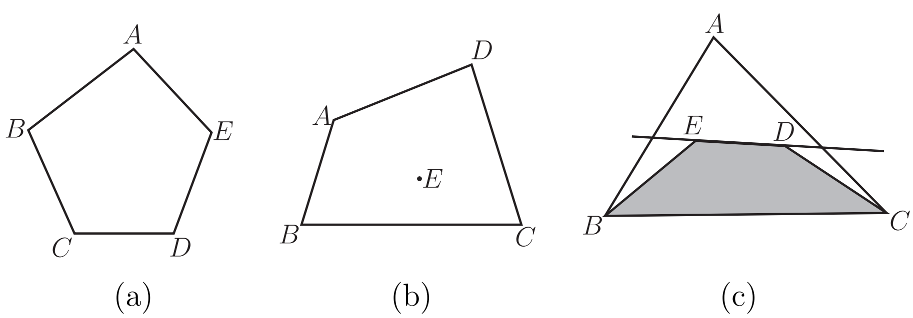


圖 1

若有三個點是個三角形的三個頂點, 另二點在這個三角形內, 比如, D, E 兩點在 $\triangle ABC$ 內 (圖1(c)), 連接 DE 與 AB, AC 相交, 不與邊 BC 相交, 則 B, C, D, E 就是一個凸四邊形的四個頂點。

問題解決了, 人們將包圍一個平面點集的"最小的凸多邊形"叫做這個平面點集的"凸包", 於是, 由平面點集的分類產生了平面點集的"凸包"的概念。平面點集的"凸包"就成爲了對平面點集分類的一種思維方法。

2. 一一相對應的配對思維

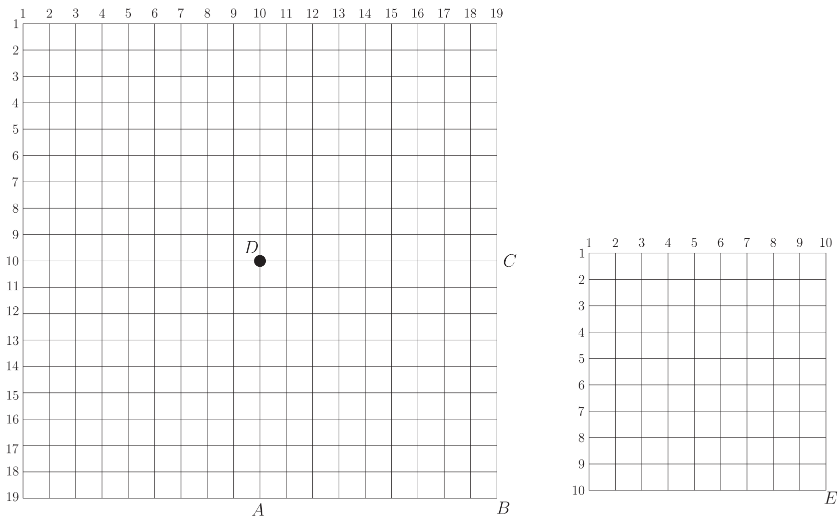
原始人以狩獵、採摘野果爲生。對獲得的果實, 需要一定的記數方法, 比如, 打來一個獵物就存放一顆石子, 最後, 數一數堆放的石子的個數就可以知道獵物的總數. 由於石子堆放容易散亂, 改成"結繩記數"就更爲實用了。在人類的記數過程中, 逐漸形成了"一一對應"的配對思維。一一對應的概念在現代數學中扮演著重要的角色。

對有限集合 S 的元素個數, 我們記爲 $|S|$。

設 A 與 B 是兩個有限集合, 如果 A 與 B 之間能建立一一對應 (即存在 A 到 B 的一一映射), 則 $|A| = |B|$ (兩個集合元素個數相等)。

例1. 如圖 (a) 是一個圍棋盤。它由橫豎各19條線組成。問圍棋盤上有多少個與圖 (b) 的小正方形一樣的正方形?

解: 我們先在圖 2(b) 中小正方形找一個代表點 E (右下角)。然後將小正方形按照題意放在圍棋盤圖 2(a) 上, 仔細觀察。



(a)　　(b)

圖 2

(1) 點 E 只能在棋盤右下角的正方形 $ABCD$ (包括邊界) 的格子點上。

(2) 反過來, 右下角正方形 $ABCD$中的每一個格子點都可以作爲小正方形的點 E。也只能作爲一個小正方形的點 E。

這樣就將“小正方形”與正方形 $ABCD$ 中的格子點一一配對。很容易看出正方形 $ABCD$ 中格子點共 $10 \times 10 = 100$ 個。

所以圖 2(a) 中有 100 個與 (b) 一樣的正方形。

例2. 圓周上有 $n(n \geq 4)$個點, 用直線段 (圓的弦) 將它們兩兩相連成弦, 問: 這些弦在圓內的交點最多有多少個?

易知, 在“這些弦中任三條不共點”的條件下, 這些弦在圓內的交點個數最多。但交點個數如何計算呢? 我們不妨分析一下, 一個交點是如何產生的? 哈! 圓上任四個點連成的四邊形對角線有一個交點, 反之, 兩條弦圓內的交點對應這兩條弦的四個端點 (圓上四邊形的四個頂點), 建立了這個一一對應關係後立刻求得這些弦在圓內的交點數最多爲 C_n^4 個。

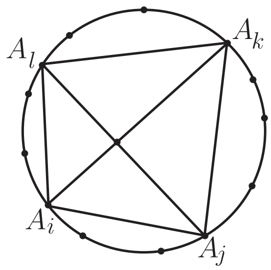


圖 3

例3. 從 8×8 的棋盤上剪掉對角上的兩個方格。問這個缺角棋盤能用 31 個 1×2 的矩形骨牌覆蓋住嗎?

你動手試一試, 發現這個缺角棋盤不能用31張 1×2 的矩形骨牌覆蓋。因此猜想, 這個缺角棋盤不能用31張 1×2 的矩形骨牌覆蓋住! 於是試著分析其中的道理。

理由如下: 將這個缺角棋盤的方格黑白相間二染色, 可得 32 個黑格, 30 個白格 (如圖5). 而 1×2 的矩形骨牌蓋住的小方格恰是 1 黑、1 白。如果這個缺角棋盤能用 1×2 的矩形骨牌蓋滿, 則黑色小方格與白色小方格的個數相等。與32個黑格, 30個白格的事實矛盾!

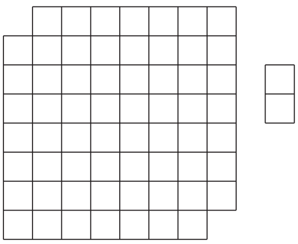


圖 4

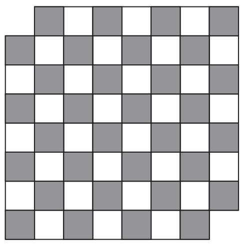


圖 5

所以, 這個缺角棋盤不能用31張 1×2 的矩形骨牌覆蓋住!

例4. 證明: 任何六個人的聚會, 其中總有三個人彼此相識或彼此不相識。

要證明這一結論, 我們可以把六個人用平面內的六個點 A、B、C、D、E、F 表示, 設它們無三點共線, 並約定每兩個相識者的點之間用實線連結, 不相識者的點之間用虛線連結。這樣原問題等價轉化為"在15 條線段中總存在完全由實線段或完全由虛線段組成的三角形 (簡稱為實三角形或虛三角形)"。現在不妨取 A 點來考察。由 A 點同其餘五個點連線, 其中至少有三條同虛、實, 不妨設這三條為 AB、AC、AD 同為實線。再考察 B、C、D 這三點之間的連線情況, 不難發現, 無論用實線段連或虛線段連, 都必然會出現一個實三角形或虛三角形。

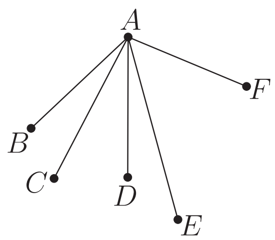


圖 6

本題思維的特點是六個人 $\{a,b,c,d,e,f\}$ 與六個點 $\{A,B,C,D,E,F\}$ 建立一一對應: $a\leftrightarrow A$; $b\leftrightarrow B$; $c\leftrightarrow C$; $d\leftrightarrow D$; $e\leftrightarrow E$; $f\leftrightarrow F$。

兩人相識 $\leftrightarrow$ 對應的兩點連實線; 兩人不相識 $\leftrightarrow$ 對應的兩點連虛線。

因此, 3個人兩兩相識 $\leftrightarrow$ 對應三點為頂點的三角形為實線邊的三角形;

3個人兩兩不相識 $\leftrightarrow$ 對應三點為頂點的三角形為虛線邊的三角形。

這樣就使 6 個人相識關係的問題等價轉化為平面 6 個點中的關係問題, 從而應用平面點集的討論證明了這個初看起來很難處理的問題。

正如數學家指出的: *在兩個集合之間建立一一對應關係, 並進一步研究由這些關係所引出的命題, 可能是現代數學的中心思想。*[1]

3. 運動為特點的函數思維

數學所研究的往往是運動變化著的量及其相互之間的關係, 而這主要是利用函數 (或映射) 來實現的。運用函數 (映射) 概念和性質來認識數學規律、解決數學問題的數學思維就是函數思維。函數思維的特點在於對數學物件與其性質之間一般的和個別的相互關係的動態認識。正如數學教育家克萊因所說: "*一般受教育者在數學課上應該學會的重要的事情是用變數與函數來思考。*" 可見函數思維在數學思維中的重要地位。

例1. 一個四面體中有五條棱長都是1。求這樣的四面體體積的最大值。

分析: 設另一條棱的長為 x, 顯然四面體的體積只隨著棱長 x 的變化而變化, 因此體積值是 x 的函數 $F(x)$, 其定義域為 $(0,\sqrt{3})$, 如圖7。四面體的底面積 ($\triangle BCD$ 的面積) 為定值 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$,

[1] [美]莫里茲, 數學家言行錄, 南京, 江蘇教育出版社, 1990, 51。

所以其體積由 A 點到底面 $\triangle BCD$ 的距離來決定, 將面 ACD 以 CD 爲軸旋轉, 在運動變化中對 A 點進行考察。其體積的最大值取決於 A 點到底面 $\triangle BCD$ 的最大距離, 即側面 ACD 與底面垂直時, A 點到底面 $\triangle BCD$ 的距離, 這個距離等於 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 所以四面體體積的最大值爲 $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{8}$。

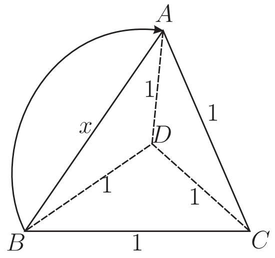


圖 7

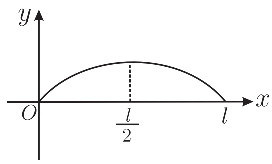
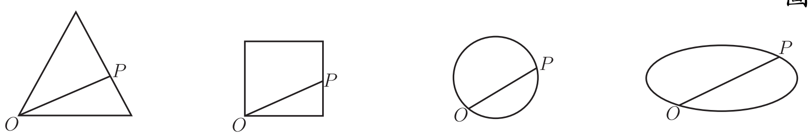


圖 8

例2. 點 P 從 O 出發, 按逆時針方向沿周長爲 l 的圖形運動一周, O, P 兩點的距離 y 與點 P 走過的路程 x 的函數關係如圖 8 所示。

那麼點 P 所走過的圖形是 (　)。



(A)　(B)　(C)　(D)

思考: 由於在四個選擇項中選取, 不妨採用排除法: (A), (B) 的圖形的對應圖像在開始階段應是直線 $y=x$ 的一部分。不會是曲線, 故 (A), (B) 應排除。(D) 圖中 O 點不在長 (短) 軸的端點時, 圖像不對稱, (D) 也應排除; 所以只能選 (C)。事實上, 對於圓來講, O, P 兩點的距離 y 與點 P 所走的路程 x 之間函數關係的圖像恰如圖 8。答: 選 (C)

例3. 試確定方程 $3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}=\dfrac{120}{x}$ 的解集。

思考分析:方程 $3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}=\dfrac{120}{x}$ 的定義域爲 $x\geq 5$。在 $[5,+\infty)$ 上, 左邊 $y_1=3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}$ (嚴格單增), 右邊 $y_2=\dfrac{120}{x}$ (嚴格單減), 所以 y_1 與 y_2 的圖形有且只有一個交點, 即方程 $3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}=\dfrac{120}{x}$ 有且只有一個解。

試算易知, $x=5$ 滿足方程 $3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}=\dfrac{120}{x}$, 因此方程 $3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}=\dfrac{120}{x}$ 的解集是 $\{5\}$。

例4. 設 a,b,c 兩兩不等, 證明:

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1.$$

將左邊通分化簡來論證, 方法繁瑣。我們從變數 x 的函數觀點來考慮, 構造輔助方程:

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1. \qquad (*)$$

這是關於 x 的不超過二次的方程, 容易驗證, 它有三個不同的根 $x=a$, $x=b$, $x=c$。故 $(*)$ 式是關於 x 的恒等式, 即對於任何 x 值, $(*)$ 式均成立。特別地, 取 $x=0$, 就得出了所求證的恒等式。

一般地, 要解某一數學問題, 如根據所給條件能適當建立起函數關係, 把它化爲一個已經會解的問題; 或把它轉化爲另一個數學問題, 當解出它以後, 把所得結果反回去 (利用反函數) 就得到原來問題的解。如借助座標法把幾何問題轉化爲 (利用映射) 代數問題, 然後運用代數方法解決這個代數問題, 於是把所得結果反回去 (利用逆映射) 就得到幾何問題的解。這些都是運用函數思維的體現。

4. 形狀與方位的空間思維

在研究一些數學問題時, 常需要運用有關圖形的知識和豐富的空間想像來解決。這種運用圖形的知識和空間想像來認識數學規律, 解決數學問題的數學思維就是空間思維。空間思維的特點在於善於在頭腦中構成研究物件的空間形狀和簡略的結構, 並能將對實物所進行的一些操作, 在頭腦中進行相應的思考。空間思維不僅在學生學習幾何時常要用到它, 而且“還可以讓學生借助于某種圖形, 來表達這樣或那樣的數學物件、操作以及這些物件間的關係, 這種圖形具有各式各樣的特點”。[2]

例1. 正方形的林場裡面有白楊樹和楡樹。小明從樹林的西南角走入樹林東行, 見到一株白楊樹就往北走, 見到一株楡樹就往東走, 最後, 小明走到了東北角上, 共走了2000米。問: 正方形林場的面積是多少平方米?

解: 小明往正北走路程可能分許多段。不管是多少段, 可以想像得到, 各段距離的和正好是正方形南北方向的一條邊長1000米; 同樣, 小明往正東走若干段距離的和也正好是東西方向的一條邊長1000米。如圖9所示。所以, 正方形面積等於1000000(平方米)。

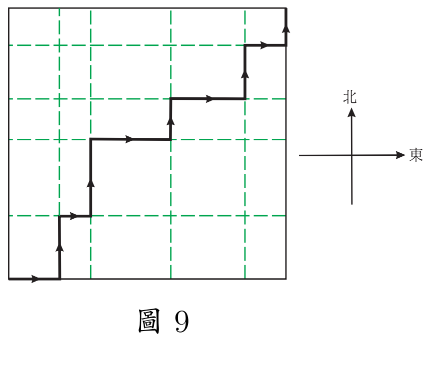


圖 9

例2. 一條白色的正方形手帕, 它的邊長是18釐米, 手帕上橫豎各有二紅條, 如圖10左圖陰影所示部分, 紅條寬都是2釐米。問: 這條手帕白色部分的面積是多少?

[2][蘇]奧加涅相:《中小學數學教學法》 第132頁, 測繪出版社,1983年。

容易看出, 手帕中白色部分的面積等於手帕總面積 (圖10) 減去四個紅條覆蓋的面積. 然而紅條的面積又有重疊. 這樣直接計算較爲複雜。有沒有較簡單的辦法呢? 我們設想, 豎的兩個紅條向左平移緊貼在一起, 並與正方形左邊界重合, 橫的兩個紅條向下平移緊貼在一起, 並與正方形下邊界重合, 如圖10右圖所示。這樣平移後白色部分的總面積不變, 等於邊長爲14的正方形的面積, 爲196平方釐米。

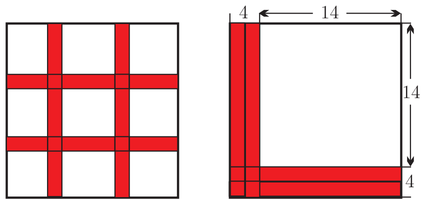


圖 10

例3. 在美麗的平面珊瑚礁圖案中, 三角形都是直角三角形, 四邊形都是正方形. 如果圖11中所有的正方形的面積之和是980平方釐米。問: 最大的正方形的邊長是多少釐米?

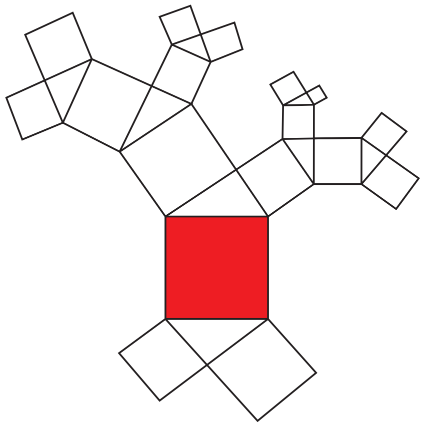


圖 11

初看圖形似乎找不到解題的線索。但仔細觀察, 發現每個直角三角形與相鄰的三個正方形恰構成畢氏定理的圖形結構, 於是找到了思維的突破口。根據畢氏定理的圖形可知, 圖11中所有正方形的面積之和等於5倍的最大的正方形的面積, 爲980平方釐米。所以最大的正方形面積是 $980 \div 5 = 196$平方釐米。因此最大的正方形的邊長等於14釐米。

答: 最大的正方形的邊長等於14釐米。

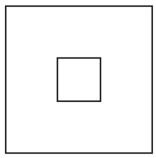


圖 12

例4. 圖12中大正方形的邊長等於 10釐米, 小正方形的邊長等於 3 釐米. 這個“回字形”既是一個多面體的俯視圖, 也是這個多面體的正視圖。問: 這種多面體的體積最大是多少立方釐米?

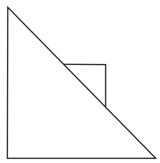


圖 13

解: 發揮空間想像力, 由於這個”回字形”既是一個多面體的俯視圖, 也是這個多面體的正視圖, 想像出最大體積時的這個多面體左視圖如圖13所示, 多面體如圖14所示。其體積爲

$$\frac{1}{2} \times 10^3 + \frac{1}{2} \times 3^3 = 500 + 13.5 = 513.5 \text{ (立方釐米)。}$$

答: 這個多面體的最大體積是 513.5 立方釐米。

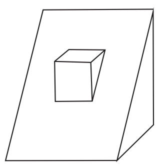


圖 14

例5. 有人曾給受試者提出如下問題:“用六根火柴作出四個等邊三角形, 使三角形每邊由一根火

柴構成。”

在解決這個問題時, 由於一般三角形是平面的, 材料也是在平面上出現的, 大多數受試者都在平面上作種種嘗試 (這是過濾性的分析)。在多次嘗試失敗以後, 有的受試者逐漸作出對條件和要求之間聯繫的深入分析, 例如, 有的受試者說: “三角形有三條邊, 四個三角形要有12條邊. 但火柴只有六根, 這就意味著每根火柴都要作爲兩個三角形的公共邊。” 這樣一來, 綜合的分析就出現了。這個考慮方向促使受試者從立體方面去尋找解決的辦法。

綜合的分析是思維活動的主要環節。它使客體顯露出新的方面, 客體參加到新的聯繫中, 新的性質就表現出來. 這時, 受試者通過綜合的分析得出了新的想法: “每個邊都是公共邊” 的實現, 只有在空間圖形之中, 把六根火柴擺成一個正四面體 (圖15), 這就綜合實現了這個方案。這充分體現了綜合的創造性。

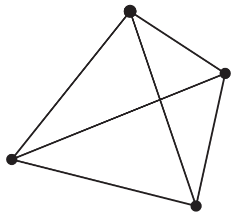
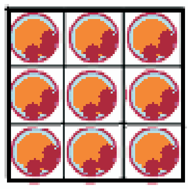


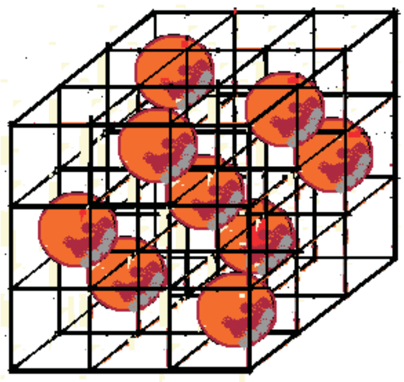
圖 15

例6. 在 $3\times3\times3$ 的正方體玻璃支架上有 27 個單位立方體空格。每個單位立方體空格中至多放有一個彩球。要使主視圖、俯視圖、左視圖都如右圖中所示。問正方體支架上至少需放多少個彩球? 請你放置出來。



答: 至少放9個彩球。

一種放法如下:



(x,y,z)

上層	(1,3,3)	(2,1,3)	(3,2,3)
中層	(1,1,2)	(2,2,2)	(3,3,2)
下層	(1,2,1)	(2,3,1)	(3,1,1)

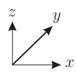


圖 16

5. 排序為手段的程序思維

在日常生活中, 一班新同學按個子高矮排成一隊, 這實際是按身高排序。等公共汽車, 人們在站前排隊, 很有秩序, 這是按到車站的先後次序來排隊, 將無序的狀態整理爲有序, 使我們能

更好地處理問題。

在數學中, 任給兩個有理數, 我們可以比較它們的大小。同樣, 任給兩個實數, 我們也可以比較它們的大小。這稱爲實數的有序性。因此, 給定 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 這 n 個實數, 我們一定可以按量值由小到大排成一列, 只要給出 n 個實數, 它們在量值大小上的序也就確定了。只是題目中沒有明確指出。這時, 我們可以 "不妨設這 n 個實數就是 $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_{n-1} \le a_n$", 將次序關係揭示出來, 會對解題造成很多便利條件, 會使分類討論變得簡潔, 條理清晰。例如, 三條線段 a, b, c 能夠構成三角形三邊的充分必要條件是:

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < c + a \\ c < a + b \end{cases}$$

如果我們將線段 a, b, c 按長度大小排序爲 $c \le b \le a$, 則線段 a, b, c 構成一個三角形三邊的充分必要條件就可簡化爲 $a < b + c$。

下面舉例示範排序思想在解題中的應用。

例 1. 平面上給定7個不同的點。試證: 一定可以畫一個圓, 使圓內恰有4個點, 圓外有3個點。

其實, 我們只要能確定所畫的圓的圓心與半徑就可以了。設 7 個點爲 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, 將它們兩兩連接共計 21 條線段: P_1P_2, P_1P_3, …, P_1P_7, P_2P_3, …, P_6P_7, 分別作這 21 條線段的垂直平分線 l_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,\ i \ne j)$。在平面上取不在這21條直線 l_{ij} 上的一點 O, 則由線段垂直平分線的性質可知, O 到 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 的距離兩兩不等。不失一般性, 我們設

$$OP_1 < OP_2 < OP_3 < OP_4 < OP_5 < OP_6 < OP_7 \quad \text{(排序!)。}$$

取 $r = \frac{1}{2}(OP_4 + OP_5)$, 則 $OP_4 < r < OP_5$。以 O 爲圓心, r 爲半徑畫 $\odot\ (O, r)$, 則 P_1, P_2, P_3, P_4 這 4 個點在該圓內部, P_5, P_6, P_7 這 3 個點在該圓的外部。

例 2. 七個採蘑菇的兒童共採了 100 個蘑菇。其中任兩個兒童採的蘑菇個數都不相等。求證: 一定有三個兒童採的蘑菇個數之和不少於50個。

設想, 七個兒童採的蘑菇個數, 由多到少依次設爲 $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6 > a_7$ (排序!)。則 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 100$。我們只須證明 $a_1 + a_2 + a_3 \ge 50$ 即可。如果 $a_3 \ge 16$, 則 $a_2 \ge 17$, $a_1 \ge 18$。此時 $a_1 + a_2 + a_3 \ge 18 + 17 + 16 = 51 > 50$。如果 $a_3 < 16$, 則有 $a_3 \le 15$。此時 $a_4 \le 14$, $a_5 \le 13$, $a_6 \le 12$, $a_7 \le 11$。於是 $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \le 14 + 13 + 12 + 11 = 50$。所以 $a_1 + a_2 + a_3 = 100 - (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) \ge 100 - 50 = 50$。綜上所述, 一定有三個兒童採的蘑菇的個數不少於 50 個。

例3. 如果正整數 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 滿足 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=x_1x_2x_3x_4x_5$。問 x_5 的最大值是多少?

由於 x_i 的地位輪換對稱, 地位平等, 易知 x_5 的最大值也就是 x_1, x_2, x_3, x_4 的最大值。為確定起見, 不妨設 $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5$ (排序!) 則

$$\begin{aligned}1 &= \frac{1}{x_2x_3x_4x_5}+\frac{1}{x_1x_3x_4x_5}+\frac{1}{x_1x_2x_4x_5}+\frac{1}{x_1x_2x_3x_5}+\frac{1}{x_1x_2x_3x_4}\\ &\le \frac{1}{x_4x_5}+\frac{1}{x_4x_5}+\frac{1}{x_4x_5}+\frac{1}{x_5}+\frac{1}{x_4}=\frac{3+x_4+x_5}{x_4x_5}\end{aligned}$$

於是得 $x_4x_5-x_4-x_5\le 3$, 即 $(x_4-1)(x_5-1)\le 4$。

若 $x_4=1$, 則 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$。題設等式為 $4+x_5=x_5$ 矛盾!

若 $x_4>1$, 則 $x_5-1\le 4$, 即 $x_5\le 5$。

當 $x_5=5$ 時容易找到滿足條件的陣列 $(1,1,1,2,5)$, 所以 x_5 的最大值是 5。

例4. 給出 5 條線段, 它們中任三條都能構成三角形。則由這5條線段構成的三角形中至少有一個是銳角三角形。

要直接找到哪三條線段構成銳角三角形是極為困難的! 我們正難則反, 不妨從反面入手分析。我們只要說明: 如果任三條都不能構成銳角三角形, 必會產生矛盾就可以了!

不妨設這五條線段 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 滿足 $a_1\le a_2\le a_3\le a_4\le a_5$ (排序!)。

假設這五條線段中任三條組成的三角形都不是銳角三角形, 根據餘弦定理, 我們有:$a_3^2\ge a_1^2+a_2^2$, $a_4^2\ge a_2^2+a_3^2$, $a_5^2\ge a_3^2+a_4^2$,

相加得 $a_5^2\ge a_1^2+2a_2^2+a_3^2\ge 2(a_1^2+a_2^2)\ge (a_1+a_2)^2$。

所以 $a_5\ge a_1+a_2$. 這與 a_1, a_2, a_5 三條線段構成三角形的條件 $a_5<a_1+a_2$ 矛盾! 所以, 由所給的這 5 條線段構成的三角形中至少有一個是銳角三角形。

以上諸例, 不論是證明題還是計算題、智巧題, 均由於對實數排序而為解題創設了有利的條件。有人說, 數學的發展, 其研究的物件已經是模式和秩序。因此, 排序的思想應從中、小學階段逐步進行滲透。

6. 把握不變性的整體思維

整體與局部是對立統一的。一般情況下, 為了弄清整體, 常把整體分為有限個部分, 如果對每個部分都弄清楚了, 就便於綜合概括得出整體的性質, 使問題得以解決。然而, 有些問題, 有些時候, 局部情況相當複雜, 如果盲目進入局部探索, 往往會陷入五里霧中。此時, 如果能從整體上把握方向, 常會找到問題的簡明解法。所謂整體思維就是從問題的整體性質出發, 發現問題及整體的結構特性, 從而導出局部結構和元素的特性。就好像進入林海中需要望北斗、看年輪 (或帶上指南針) 掌握方向一樣, 整體思維是幫我們解題的重要思維方式之一。

例1. 對 32541 這個五位數, 能否改變各個數字的位置, 變成一個質數?

許多學生的做法是先排除個位數是 2, 4, 5 的情況, 再注意考察剩下的 48 種情形用篩選法解決。但直覺思維能力較強的學生, 會從整體上把五個數字考察一番, 由 $3+2+5+4+1=15$, 而 15 被 3 整除, 所以 3、2、5、4、1 這五個數位組成的五位數必能被 3 整除, 不能是質數。於是, 便一眼看出了答案。無論如何改變 32541 的數字排列, 都不能使之變爲質數。

例2. 1024名乒乓球選手用淘汰制爭奪單打冠軍。問: 應進行多少場比賽? 爲什麼?

解法1: 因每兩人比賽一場, 第一輪要比賽 $\frac{1024}{2}$ 場, 第二輪要比賽 $\frac{1024}{2^2}$ 場, 第 3、4、5、6、7、8、9 輪分別要比賽 $\frac{1024}{2^3}$, $\frac{1024}{2^4}$, $\frac{1024}{2^5}$, $\frac{1024}{2^6}$, $\frac{1024}{2^7}$, $\frac{1024}{2^8}$, $\frac{1024}{2^9}$ 場, 第 10 輪比賽 $\frac{1024}{2^{10}}$ 場, 最終決出冠軍. 可見, 共應比賽

$$\begin{aligned}&\frac{1024}{2}+\frac{1024}{2^2}+\frac{1024}{2^3}+\frac{1024}{2^4}+\frac{1024}{2^5}+\frac{1024}{2^6}+\frac{1024}{2^7}+\frac{1024}{2^8}+\frac{1024}{2^9}+\frac{1024}{2^{10}}\\&\quad=512+256+128+64+32+16+8+4+2+1=1023(\text{場}).\end{aligned}$$

解法2: 從整體思想考慮, 即從淘汰制看, 每場比賽總要淘汰一名選手, 現在1024名選手中要決出冠軍, 需淘汰1023名選手, 因此需要進行1023場比賽。

上面兩種解法比較, 顯然, 解法2簡潔明快, 美不勝收。從中可以品位到應用整體思維解題的特點。

例3. 甲、乙二人從相距20千米的兩地同時出發相向而行。甲的速度爲6千米/時, 乙的速度爲4千米 / 時。一隻小狗與甲同時出發向乙奔去, 遇到乙後立即調頭向甲跑去, 遇到甲後又立即調過頭來向乙跑去, ..., 直到甲、乙二人相遇爲止. 若小狗的速度是13千米 / 時, 在這一奔跑過程中, 小狗的總行程是多少千米?

分析: 如果從小狗各段跑的時間和距離去計算, 每個部分都很複雜, 最後還要求一個無窮遞縮等比數列的和。這對中小學生是難於處理的。究其原因, 就在於一開始我們的思路就被小狗牽著鼻子走, 盲目地闖入了“小狗的總行程等於各部分行程的和”的思路中。如果我們跳出來站在旁觀者的位置縱覽全局, 就會看到, 小狗與甲、乙同時起步, 往返於二人之間, 直到二人相遇爲止。這時小狗跑的總時間就是甲、乙二人從出發到相遇所用的時間 $\frac{20}{6+4}=2$ (小時), 從而可迅速得到小狗奔跑的總路程爲 $13\times 2=26$ (千米)。用整體思維幫我們解題, 眞是妙趣橫生!

例4. 已知一個 4×4 的數表

$$\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3 & -4\\ 5 & 6 & -7 & -8\\ 9 & -10 & -11 & 12\\ 13 & -14 & 15 & -16\end{bmatrix}$$

如果把它的任一行 (橫行) 或一列 (豎行) 中的所有數同時變號, 稱作一次變換。試問能否經過有限次變換, 使表中的數全變爲正數?

分析: 如果你想按行、列去實驗, 看能否碰到表中的數全變爲正數的情況, 這種實驗的次數不可窮盡, 因此實際行不通。這時你若站在局外縱覽, 就會發現每一次變換只改變表中一行 (或列) 中4個數的符號, 但並不改變這4個數的乘積的符號。由此入手, 就從整體上找到了思維的突破口。因爲每行、每列都是4個數。當每一次變換, 只改變表中一行 (或一列) 中4個數的符號, 並不改變這一行 (列) 中4個數乘積的符號, 從而也不會改變表中16個數乘積的符號. 但表中共有9個負數, 所以表中16個數乘積的符號爲負, 於是無論作多少次操作變換, 表中16個數的乘積總是負的。不會變爲表中各數都爲正數, 從而使乘積爲正的狀態。

例5. 證明, 不存在具有奇數個面, 每個面都有奇數條邊的多面體。

如果一個個多面體去實驗, 很難得到結論。最好的辦法是考察多面體的各面的邊數之和及其奇偶性, 從反面分析入手。

設多面體有 n 個面, 每個面有 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 條邊, 記

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

如果 n 及 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 都是奇數, 則 S 是奇數個奇數之和, 因而是個奇數。但是多面體的每條棱都是多面體兩個相鄰面上多邊形的公共邊, 因此, S 是多面體中總棱數的兩倍, 是個偶數。上述兩件事產生矛盾, 所以不可能存在題設條件的多面體.

通過上述各例, 我們看到, 從整體上考察事物的數量性質, 使我們擺脫了對局部細節中的難以弄清的數量關係的糾纏。反而使眼界更加開闊, 洞察力更爲深刻, 能起到出奇制勝一舉解決問題的作用。其表現形式是對整體上不變性質、不變數量等特性的把握。整體思維對數學解題思路很有幫助。在數學上有著廣泛的用途, 我們應當努力掌握它!

7. 考慮邊值的極端思維

在你寫出的 n 個實數中, 其中必有一個最小的, 也必有一個最大的。這是最簡單的極端性思維. 在宏觀的估值中, 比如, 200人的單位義務捐款, 已知每人至少捐50元, 那麼200人捐款不少於 $50 \times 200 = 10000$ 元。就是利用極端性思考。在推理證明中, 極端性思維是非常有用的思維方法。

例1. 在容器中放有70個球, 其中有20個紅球, 20個綠球, 20個黃球, 其餘是黑球和白球。各球大小、質地相同, 只是顏色不同。現欲在黑暗中取球, 使得它們之中某一種顏色的球不少於10個, 問: 必須至少摸取出多少個球?

我們可以看出, 滿足題設要求, 即某一種顏色的球不少於10個, 只能從紅、綠、黃三種色

球中產生。我們現在考慮最壞的情形, 即在所取的球中應包含有黑球與白球共10個, 9個紅球、9個綠球和9個黃球, 共計37個球。只要我們再取1個球, 此球必爲紅、綠、黃三色之一, 故必有一種顏色的球不少於10個。由此得知, 我們至少取38個球才能使“某一種顏色的球不少於10個”。

例1的解法中的獨到之處在於:“考慮最壞的情形”。也就是考慮極端的情況。其基本依據是:

1. 設 N 是正整數集, M 是 N 的一個非空子集, 則 M 中必有最小數。
2. 設 R 是實數集, M 是 R 的有限非空子集, 則 M 中必有最小數, 也必有最大數。

例2. 在一次乒乓球循環賽中, n $(n \geq 3)$ 個選手中沒有全勝的。請你證明: 一定可以從中找到3名選手 A, B, C, 使得 A 勝 B, B 勝 C 且 C 勝 A。

開始想不出頭緒, 考慮勝的最多的選手, 設爲 A, 由於“n $(n \geq 3)$ 個選手中沒有全勝的”, 所以 A 未全勝, 即至少存在選手 C, 有 C 勝 A。

另外, 在被 A 所戰敗的選手中, 一定存在某個選手 B 是勝 C 的。如若不然, 會出現被 A 戰勝的選手也是被 C 戰勝的選手。但 C 又戰勝了 A, 則 C 所戰勝的選手數將大於 A 所戰勝的選手數。這與 A 是勝的最多的選手的假設相矛盾!

因此, 一定可以從中找到 3 名選手 A, B, C, 使得 A 勝 B, B 勝 C 且 C 勝 A。

例2的解法關鍵是抓住了“勝的最多的選手”, 利用這一點, 解決了我們“無從著手”的難處, 使解題簡潔明快!

在“證明有一個 x 它具有性質 $P(x)$” 類型的涉及狀態存在性的問題時, 從“考察極端”入手的極端性原理是非常重要的思考途徑。

例3. 證明: 任意凸五邊形中都能找到三條對角線, 由這三條對角線爲邊可以構成一個三角形。

證明: 在凸五邊形 $ABCDE$ 的五條對角線中存在最長的對角線設爲 BD (考慮極端!), 又設對角線 BE, DA 相交於點 P。

顯然 $BP < BE$, $DP < AD$。

有 $BD < BP + DP < AD + BE$, 因此 BD, BE, AD 三條對角線爲邊可以構成一個三角形。

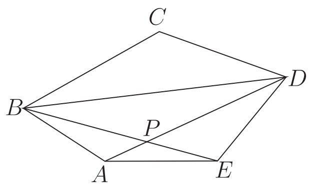


圖 17

例4. 某校學生中, 沒有一個學生讀過學校圖書館的所有圖書。又知道圖書館內任何兩本書至少被一個同學都讀過。證明: 一定能找到兩個學生甲、乙和三本書 A、B、C, 使得甲讀過 A、B 沒讀過 C, 而乙讀過 B、C 沒讀過 A。

要認眞分析題意, 注意如下兩個條件: (1) 沒有一個學生讀過學校圖書館的所有圖書; (2) 任何兩本書都至少被一個同學讀過。

第一步, 取讀書最多的一位學生設爲甲 (考慮極端!)。由條件 (1), 甲沒讀過圖書館中的所

有的圖書. 因此, 至少有一本書 C 甲沒讀過。在被甲讀過的書中任取一本爲 B, 根據 (2), B、C 至少被一位學生讀過。不妨設讀過 B, C 的學生是乙。易知乙$\neq$甲 (因甲未讀過 C)。

第二步, 可以斷言, 甲讀過的所有書中一定有乙未讀過的書 (否則, 甲讀過的書乙都讀過, 而乙比甲還多讀一本書 C, 這與甲是讀書最多的一個學生的假設相矛盾)。爲確定起見, 設 A 是甲讀過的書中乙未讀過的。這樣一來, 我們就找到了甲、乙兩個學生和 A, B, C 三本書, 滿足甲讀過 A, B 沒有讀過 C, 乙讀過 B, C 沒有讀過 A。

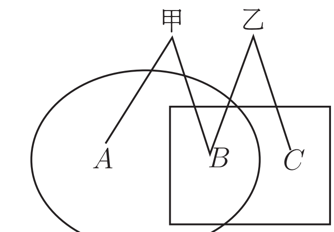


圖 18

例5. 證明: 不存在四個正整數 x,y,z,u, 它們滿足方程 $x^2+y^2=3(z^2+u^2)$。

分析, 方程的形式很有特點, 左邊是 x^2+y^2, 右邊有 z^2+u^2。不妨從 x^2+y^2 的最小整數值入手考慮。

假設滿足 $x^2+y^2=3(z^2+u^2)$ 的四個正整數存在, 則其中必有使 x^2+y^2 取得最小值的那一組 (考慮極端!), 如果有若干組解都使 x^2+y^2 取最小值, 我們只取其中一組即可。設這四元陣列爲 (a,b,c,d)。由方程 $a^2+b^2=3(c^2+d^2)$ 可知, $3\mid a^2+b^2$, 容易證明 $3\mid a^2+b^2 \Leftrightarrow 3\mid a$ 且 $3\mid b$。因此可設 $a=3m$, $b=3n$。所以 $a^2+b^2=9m^2+9n^2=3(c^2+d^2)$, 即 $c^2+d^2=3(m^2+n^2)$。這樣我們找到了四個正整數組 (c,d,m,n) 滿足方程 $x^2+y^2=3(z^2+u^2)$, 同時 $c^2+d^2<a^2+b^2$。這與 a^2+b^2 是使 x^2+y^2 取最小值的選擇相矛盾。因此, 不存在四個正整數 x,y,z,u 滿足方程 $x^2+y^2=3(z^2+u^2)$。

8. 建構可實現的構造思維

我們考察數學思維, 就要考察數學思維的物件, 過程與結果。數學概念是思維的基本材料, 是數學大廈的磚瓦, 沙石, 木料, 而關係、定理、公式是連接這些材料的粘合劑或構架。比如, 一個集合 A, 我們通過取子集的方法可以構造出它的冪集, 這樣一來, 就產生了一個由包含與被包含的關係所引起的新的不尋常的結構。從兩個集合 A 與 B 中取 A 的元素 a 和 B 的元素 b, 組成元素對 (a,b), 所有這樣的元素對的集合又產生出一種新的結構, 記爲 $A\times B$, 這就是集合 A 與 B 的笛卡兒積。人們完全可以設想, 學習數學的過程也就是在頭腦中產生和建構數學知識形成數學認知結構的過程。下面我們分析如何在思維中實現建構, 從而認識數學結構的構造性思維。

數學思維就其過程來說, 是將數學概念、公式、關係通過思維的組合聯結爲一個結構, 綜合爲頭腦中的一個新的思維創造物或想像物, 這個過程稱之爲數學思維中的構造。實現構造的具體操作叫做建構。

爲了說明數學中的構造, 先從我自己於1985年給北京數學奧林匹克學校講的一道例題的分析談起。

例1. 證明, 存在兩個無理數 x, y, 使 $z = x^y$ 是有理數。

證法1: 這是我講的證法, 用反證法。設對於任何兩個無理數 x, y 來說, $z = x^y$ 都是無理數。那麼, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 就一定是無理數。進而 $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$ 是有理數, 因此得出矛盾。這表明, "對於任何兩個無理數 x, y 來說, $z = x^y$ 都是無理數" 的假設不能成立, 因此, "存在兩個無理數 x, y, 使 $z = x^y$ 是有理數"是正確的。

當時, 人大附中的丹陽同學提出了下面的另一種解法。

證法2: 我們已知 $\sqrt{2}$ 與 $\log_2 9$ 都是無理數, 令 $x = \sqrt{2}$, $y = \log_2 9$, 則有 $z = x^y = \sqrt{2}^{\log_2 9} = 2^{\log_2 3} = 3$ 是有理數。問題得證。

比較例 1 的兩種證法, 證法 1 雖很巧妙, 但證明完畢, 我們對 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 到底是個有理數還是無理數並不清楚。證明的基礎是排中律與矛盾律。若 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是個有理數, 這就是我們要找的例子; 若 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是個無理數, 則 $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$ 就是我們要找的例子。證法2則是構造了一個滿足問題條件的實例, 構作的"元件"是無理數 $\sqrt{2}$ 與 $\log_2 9$, 構作的"支架"是對數基本關係式 $a^{\log_a b} = b$。證法1是非構造性的間接證明, 證法2簡單明快, 是一種構造性證明。在證法2中, 以問題已知元素或條件爲"元件", 數學中的某些關係式爲"支架", 在思維中構作了一個新的"建築物"。這種思維操作有一定的普遍意義。我們再通過一道例題來概括這種思維操作的特點。

例2. a, b, c, d 都是正數, 證明: 存在這樣的三角形, 它的三邊長等於

$$\sqrt{b^2+c^2}, \sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd}, \sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}.$$

並計算這個三角形的面積。

分析: 如果要利用三線段構成三角形的充分必要條件來判定滿足條件要求的三角形的存在性, 不是容易之舉。再用海倫公式根據三邊計算這個三角形面積就更使人望而生畏了。

怎麼辦? 在這"山窮水複疑無路"之際, 只要注意到

$$\sqrt{b^2+c^2}, \sqrt{a^2+(c+d)^2}, \sqrt{(a+b)^2+d^2},$$

的特點, 就會點燃思想的火花, 考慮利用畢氏定理把這三條線段構作出來, 不妨試試看!

如圖 19, 以 $a+b$, $c+d$ 爲邊畫一個矩形 $ABCD$。陰影所示的三角形 CEF 的三條邊:

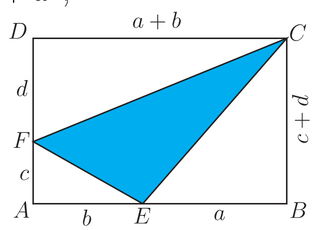


圖 19

$$CE=\sqrt{a^2+(c+d)^2},\quad CF=\sqrt{(a+b)^2+d^2},\quad EF=\sqrt{b^2+c^2},$$

滿足題設條件的三角形作出來了, 當然, 它的存在性也就自明了。設 $\triangle CEF$ 的面積是 S, 顯然

$$S=(a+b)(c+d)-\frac{1}{2}bc-\frac{1}{2}d(a+b)-\frac{1}{2}a(c+d)=\frac{1}{2}(ac+bc+bd).$$

眞可謂“柳暗花明又一村”了。

例1、例2的解法表明, 在解題過程中, 由於某種需要, 要麼把題設條件中的關係構造出來, 要麼將這些關係設想在某個模型上得到實現, 要麼把題設條件經過適當的邏輯組合而產生一種新的形式, 從而使數學問題獲得解決。在這個過程中思維活動的特點是“構造”, 構造是思維中綜合過程的一種最高級的表現形式和結果。

在構造性思維過程中, 一般化、特殊化、巧妙地對概念進行分析與綜合, 最後製造出一種新的產品–思維的創造物與想像物。需要注意, “構造”不是一般的綜合, 而是巧妙地對概念進行的分析與綜合, 它是綜合的高級形式。

思維的構造活動, 是思維在分析基礎上進行綜合的高級形式。思維的構造是一種思維的過程, 在這個過程中, 往往體現出諸多種思維方式的綜合。也可以大體看到作爲構造活動的幾個基本環節。

例3. 若 $a>0$, $b>0$, 求證 $a^2+b^2\geq 2ab$。

分析: 所證的不等式等價於 $\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{b^2}{2}\geq ab$。

$\dfrac{a^2}{2}$ 可作爲腰爲 a 的等腰三角形的面積, $\dfrac{b^2}{2}$ 可作爲腰爲 b 的等腰三角形的面積, ab 可作爲邊長爲 a, b 的長方形面積。於是可得圖 20 的構圖。

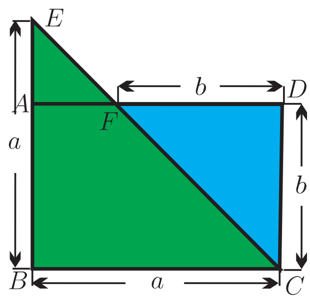


圖 20

證明: 作長方形 $ABCD$, 使 $BC=a$, $CD=b$ (不妨 $a\geq b$)。延長 BA 到 E, 使 $BE=a$。連接 EC, 交 AD於 F。則 $S_{\triangle EBC}=\dfrac{a^2}{2}$, $S_{\triangle FDC}=\dfrac{b^2}{2}$ 而 $S_{ABCD}=ab$。顯然 $S_{\triangle EBC}+S_{\triangle FDC}\geq S_{ABCD}$ 即 $\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{b^2}{2}\geq ab$。也就是 $a^2+b^2\geq 2ab$。

容易看出, 當且僅當 $a=b$ 時, 成立等式。

其實用圖21的構想也可以證明 $a^2+b^2\geq 2ab$。

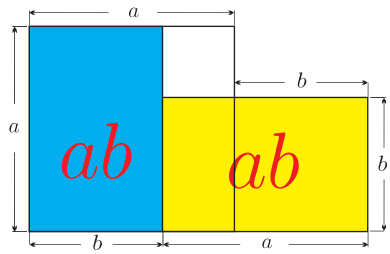


圖 21

例4. 若 a,b,m 都是正數, 並且 $a<b$。求證: $\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$。

分析: 對正數 a, b 的關係 $a<b$ 可用直角三角形中直角邊 a 小於斜邊 b 來表示。同理, 設想

$\dfrac{a+m}{b+m}=\dfrac{a}{b}$ 時, 可利用相似三角形來表示, 於是得出如下的直觀證法。

證明: 作 $Rt\triangle ABC$, 使 $\angle C=90^\circ$, $AC=a$, $AB=b$。延長 AC 到 D, 使得 $CD=m$, 則 $AD=a+m$。過 D 作 AD 的垂線交 AB 的延長線於 E, 過 B 作 AD 的平行線交 DE 於 K。顯見, $BE>BK=CD=m$。由 $\triangle ACB\sim\triangle ADE$, 可得 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{a+m}{b+BE}<\dfrac{a+m}{b+m}$。這樣, 我們利用圖形證明了這個不等式。

其實, 這個常用的重要不等式很好理解。設想, b 克的糖水中含糖為 a 克, 當然有 $b>a>0$。其濃度為 $\frac{a}{b}$ 若再溶入 m 克糖後, 糖水的濃度增大, 為 $\dfrac{a+m}{b+m}$, 由 $\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$, 與糖水變得更甜的直感完全一致。

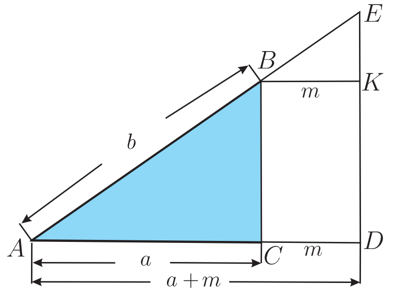


圖 22

例5. 正數 a,b,c,A,B,C 滿足條件 $a+A=b+B=c+C=k$。求證:$aB+bC+cA<k^2$。

這是第 21 屆全蘇數學競賽八年級的一道試題。先給出原試題給出的代數解法, 然後再與我們的幾何解法比較。可以更好地領悟幾何圖形解法的妙處。

代數解法: 因為
$$\begin{aligned}k^3&=(a+A)(b+B)(c+C)\\&=abc+Abc+acB+ABc+abC+AbC+aBC+ABC\\&=abc+ABC+aB(c+C)+cA(b+B)+bC(a+A)\\&>aBk+bCk+cAk=k(aB+bC+cA)\end{aligned}$$

又因為 $k>0$, 所以 $k^2>aB+bC+cA$。即 $aB+bC+cA<k^2$。

不難見到, 完成以上代數法證明, 要求具備很好的因式分解的基本功。

幾何證法: 利用我們給出的代數關係式的幾何表示, 將 k^2 看成邊長為 k 的正方形面積。先作一個邊長為 k 的正方形 $PQMN$, 設 $PQ=b+B$, $QM=a+A$。

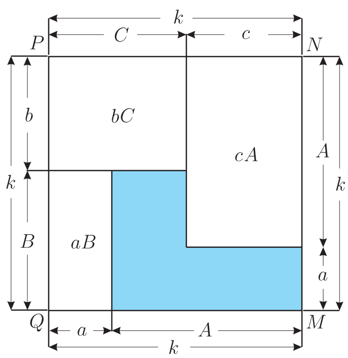


圖 23

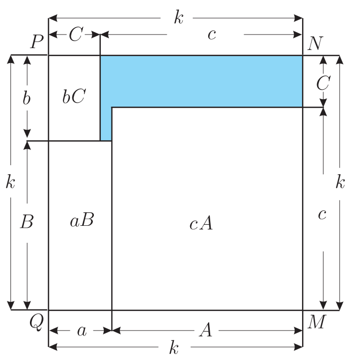


圖 24

若 $a \le C$ 令 $PN = C + c$, $MN = A + a$, 在正方形 $PQMN$ 內, 如圖 23 完成面積爲 aB, bC, cA 的三個長方形, 三個未塗陰影的長方形面積之和恰爲 $aB + bC + cA$, 顯然小於正方形 $PQMN$ 的面積 k^2。

若 $a > C$, 如圖24完成面積爲 aB, bC, cA 的三個長方形, 三個未塗陰影的長方形面積之和恰爲 $aB + bC + cA$, 顯然也小於正方形 $PQMN$ 的面積 k^2。這個證法簡單明快, 直觀有趣, 小學生也可以理解。

例6. 已知 $a > b > 0$, 求證: $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$。

解: 很容易用下面的幾何圖形 (如圖25) 加以證明。這個圖中 $ABCD$ 是邊長爲 $a+b$ 的正方形, 它的面積 $(a+b)^2$ 等於中間的正方形的面積 $(a-b)^2$ 與邊上 4 個面積爲 ab 的長方形的面積之和。

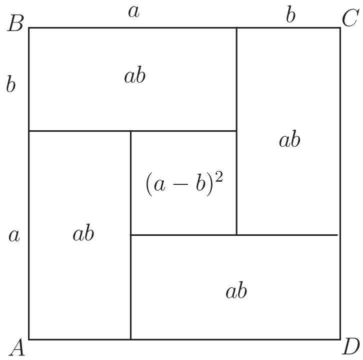


圖 25

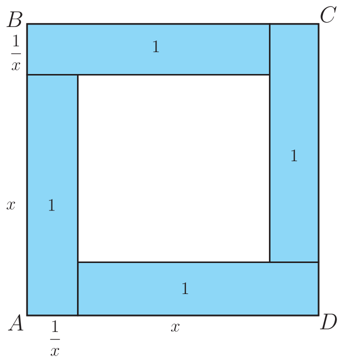


圖 26

例7. 已知 $x > 0$, 求證:$x + \dfrac{1}{x} \ge 2$。

解: 其實, 結合圖25仔細想一想, 可以用數形結合的方法來證明這個不等式。如圖26, 因爲 $x > 0$, 所以 $\dfrac{1}{x} > 0$ 且 $x \cdot \dfrac{1}{x} = 1$ 即圖 26 中的每個陰影長方形的面積都等於 1。

正方形 $ABCD$ 的面積爲 $(x + \dfrac{1}{x})^2$, 這個面積顯然不小於 4 個面積等於 1 的陰影長方形的總面積, 即 $(x + \dfrac{1}{x})^2 \ge 4$。兩邊開平方得 $x + \dfrac{1}{x} \ge 2$ (等號在 $x = \dfrac{1}{x} = 1$ 時達到)。這個證法既簡潔又直觀! 精彩!

例8. 如圖 27 所示, 面積爲13平方釐米、29平方釐米和34平方釐米的三張正方形紙片拼放在一起, 中間恰圍成 $\triangle ABC$。求 $\triangle ABC$ 的面積是多少平方釐米?

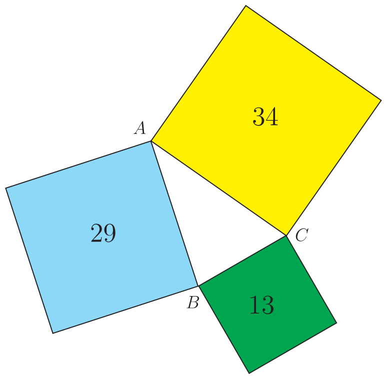


圖 27

解: 注意到 $13 = 3^2 + 2^2$, $29 = 5^2 + 2^2$, $34 = 5^2 + 3^2$。

如圖 28 作邊長爲 5 釐米的正方形 $AMNP$, 分成 $5\times5=25$ 個 1 平方釐米的正方形網格。根據畢氏定理, 可知圖 28 中的 AB, BC, CA 分別等於題圖中 3 個正方形的邊長。因此 $\triangle ABC$ 的面積可求。

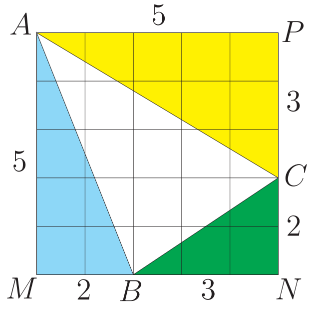


圖 28

事實上,

$\triangle ABC$ 的面積

$=5\times5-\dfrac{1}{2}\times3\times5-\dfrac{1}{2}\times2\times5-\dfrac{1}{2}\times2\times3$

$=9.5$(平方釐米)　答: $\triangle ABC$ 的面積的面積爲 9.5 平方釐米。

例9. 若 $x>0$, $y>0$, $z>0$。求證: $\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}>\sqrt{z^2-zx+x^2}$。

解: 注意到 $x>0$, $y>0$, $z>0$,

$$\sqrt{x^2-xy+y^2}=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos 60^\circ}$$

表示以 x, y 爲邊夾角爲 60° 的三角形的第三邊。同理 $\sqrt{y^2-yz+z^2}$, $\sqrt{z^2-zx+x^2}$ 也有類似的幾何意義。這樣, 我們構作頂點爲 O 的四面體 O-ABC, 使得 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=60^\circ$, $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$, 則有

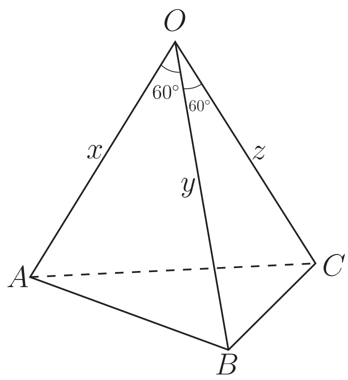


圖 29

$$AB=\sqrt{x^2-xy+y^2},$$
$$BC=\sqrt{y^2-yz+z^2},$$
$$CA=\sqrt{z^2-zx+x^2},$$

由 $\triangle ABC$ 中, $AB+BC>AC$, 所以 $\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}>\sqrt{z^2-zx+x^2}$。此法更是令人拍案叫絕!

例10. 直徑爲 5 的圓中放入 10 個點。求證, 其中必有兩個點, 它們之間的距離小於 2。

很容易看出這是個抽屜原則問題。只要將直徑爲 5 的圓分爲 9 個區域, 10 個點中至少有兩個點分佈在同一區域。問題只要使每個區域中任二點距離都小於 2 就可以了。

設想將圓九等分, 連接圓心與各分點, 成爲九個相等的扇形。顯然, 每個區域都不能保證任二點間的距離都小於 2。這種設想失敗。分析原因, 問題在於沿半徑方向最長可達 2.5, 所以我們要減少沿半徑方向的長度, 另法建構抽屜。

爲此, 先把圓等分爲 8 個扇形, 再以圓心 O 爲中心, 0.9 爲半徑畫圓。這樣構想出以這個小圓爲一個抽屜, 8個被切扇形所餘部分爲另 8 個抽屜, 共計 9 個抽屜。小圓直徑爲 $1.8<2$。剩下, 我們再檢驗截角曲邊扇形 $ABCD$ 中任兩點間的距離小於 2。如圖 30, 弧 $AB<\dfrac{5\times 3.2}{8}=2$ 所以 $AB<2$。

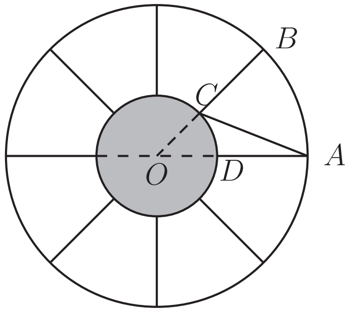


圖 30

$AD=BC=2.5-0.9=1.6<2.$

$$BD=AC=\sqrt{OA^2+OC^2-2\times OA\times OC\cos 45^\circ}$$
$$=\sqrt{2.5^2+0.9^2-2\times 2.5\times 0.9\times\frac{\sqrt{2}}{2}}\le\sqrt{3.91}<2.$$

可見, 曲邊扇形 $ABCD$ 中任兩點間的距離都小於2。

這樣我們就構造了合於題設的九個抽屜。10 個點放在圓中, 至少有兩個點落在同一個抽屜內, 其間的距離小於 2。

我們從此例看到, 初步的構想, 是粗線條的, 大方向對, 方法不對, 也不會成功。要從可分成的九個抽屜的集合中, 選擇合於題設條件的九個抽屜。所以, 構造其實是一種選擇! 在這種選擇中, 與個人的直覺經驗、知識見聞、閱歷深淺, 藝術修養等都很有關係。

我們看到的事物, 不管有意或無意, 都把它的形象留在潛意識中了。這叫記憶表像。所謂想像, 就是對頭腦中的記憶表像進行加工改造, 創造出新的形象的思維過程。這個新形象稱爲想像表像。如果你構想的新形象過去有過, 這個想像表像叫做再造想像。如果你構想的新形象爲過去所沒見過的, 這個想像表像叫做 創造想像。

由類比聯想到加工改造構造出一種模式、結構、程序、圖式, 是想像爲思維插上了翅膀! 對事物的分析綜合, 要善於類比聯想。不光要精巧的技藝, 更需要思維大膽的想像! 這樣, 只有這樣, 思維的構造才能變爲改造世界能動的力量!

—本文作者任教於北京首都師範大學數學科學學院—

小品

短文二

作者: 何玉鳳

兩個陌生的人因爲機率而相遇, 但卻又因爲不斷的微分而分開。

—本文作者爲中國科技大學財務金融系學生—