數學傳播 38卷1期, pp. 64-71

一個關於冪次和的定理

葉東進

唸高中時, 學數學歸納法, 有一道問題是: 證明 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$。$1^3+2^3+\cdots+n^3$ 竟可表為 $1+2+\cdots+n$ 的多項式!? 那麼, 是否還有其它的 $1^k+2^k+\cdots+n^k$ 亦可表為 $1+2+\cdots+n$ 的多項式? 這個疑惑深刻地留置於我心中。之後, 三十年的教書期間, 也未曾好好地想過此一問題。這些日子 (五月) 是梅雨期, 待在屋內無所事事, 深埋已久的這個疑惑又浮上我的心頭。

把 $1^k+2^k+\cdots+n^k$ 的和記為 $S_k(n)$, 其中 k 為任意正整數。為行文的簡便, 不致混淆的情形下, 暫且把 $S_k(n)$ 簡記為 S_k。
由二項式定理

$$(n+1)^{k+1}-n^{k+1}=C_k^{k+1}n^k+C_{k-1}^{k+1}n^{k-1}+\cdots+C_1^{k+1}n+C_0^{k+1}$$

可推得

$$(n+1)[(n+1)^k-1]=C_k^{k+1}S_k+C_{k-1}^{k+1}S_{k-1}+\cdots+C_1^{k+1}S_1$$

此式表示 $S_1,S_2,\ldots,S_k$ 之間的一個遞迴關係。所以, 如果知道 $S_1,S_2,\ldots,S_{k-1}$ 的 n 的多項式表式, 則運用此式即可推得 S_k 的 n 的多項式的表式。此外, 亦可由此式看出當 S_k 表為 n 的多項式時, 其最高次項為 $\frac{1}{k+1}n^{k+1}$。

我們已知有:

$$\begin{aligned}S_1&=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\\ S_2&=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\\ S_3&=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2\qquad\text{等}\end{aligned}$$

除了利用上述遞迴關係來找出 S_k 的 n 之多項式表式之外, 是否 S_k 還有其它的呈現方式? 經

由導算, 得到下列結果:

$$\begin{aligned}S_3 &= \frac{4}{4}S_1^2\\ S_5 &= \frac{8}{6}S_1^3 - \frac{1}{3}S_1^2\\ S_7 &= \frac{16}{8}S_1^4 - \frac{4}{3}S_1^3 + \frac{1}{3}S_1^2\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}S_4 &= \Big(\frac{6}{5}S_1 - \frac{1}{5}\Big)S_2\\ S_6 &= \Big(\frac{12}{7}S_1^2 - \frac{6}{7}S_1 + \frac{1}{7}\Big)S_2\\ S_8 &= \Big(\frac{24}{9}S_1^3 - \frac{8}{3}S_1^2 + \frac{6}{5}S_1 - \frac{1}{5}\Big)S_2\end{aligned}$$

這是以 S_1 與 S_2 爲基元來呈現 S_k 的一種表式。觀察上面諸式, 隱然呈現了某些共通的規律。事實上, 我們有下面的定理。

定理:

(1) 當 k 爲奇數時, S_k 恆可表爲一個純 S_1 的多項式, 其最高次項爲 $\frac{2^m}{k+1}S_1^m$, 其中 $k=2m-1$; 最低次項則爲 $C\cdot S_1^2$, 其中 C 爲一個相應於 k 的常數 (此時, 限於 $k\geq 3$)。

(2) 當 k 爲偶數時, S_k 恆可表爲一個純 S_1 的多項式與 S_2 的乘積, 其最高次項爲 $\frac{3\cdot 2^{m-1}}{k+1}S_1^{m-1}\cdot S_2$, 其中 $k=2m$; 最低次項則爲 $C\cdot S_2$, 其中 C 爲一個相應於 k 的常數。

(3) 承 (1) 與 (2), S_k 表爲 S_1 與 S_2 的多項式時, 其係數和恆爲 1。

證明

(1) 與 (2): 首先, 由

$$n^{k+1}-(n-1)^{k+1} = C_k^{k+1}n^k - C_{k-1}^{k+1}n^{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}C_1^{k+1}n + (-1)^k$$

可導得另一個遞迴關係式:

$$n^{k+1}-(-1)^k n = C_k^{k+1}S_k - C_{k-1}^{k+1}S_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}C_1^{k+1}S_1$$

與之前的遞回關係式:

$$(n+1)^{k+1}-(n+1) = C_k^{k+1}S_k + C_{k-1}^{k+1}S_{k-1} + \cdots + C_1^{k+1}S_1$$

兩者相加得到另一遞迴關係式:

$$[(n+1)^{k+1}-(n+1)] + [n^{k+1}-(-1)^k n] = 2[C_k^{k+1}S_k + C_{k-2}^{k+1}S_{k-2} + \cdots]$$

(i) 當 k 爲奇數時, 關係式成爲

$$(n+1)^{k+1}+n^{k+1}-1=2[C_k^{k+1}S_k+C_{k-2}^{k+1}S_{k-2}+\cdots+C_1^{k+1}S_1] \tag{1}$$

取

$$f_k(n)=(n+1)^{k+1}+n^{k+1}-1,$$

由

$$f_k(0)=f_k(-1)=0,$$

知 $f_k(n)$ 有因式 $n(n+1)$, 但

$$n(n+1)=2S_1,$$

因此 $f_k(n)$ 有因式 S_1。

如果我們能夠證明, 無論 k 爲任何奇數, $f_k(n)$ 恆可表爲一個純 S_1 的多項式, 又加以 $S_3=S_1^2$, $S_5=\frac{4}{3}S_1^3-\frac{1}{3}S_1^2$ 等初始條件的滿足, 則由此遞迴關係式, 經數學歸納, 即是證得了 S_k 恆可表爲一個純 S_1 的多項式。

因 k 爲奇數, 令 $k=2m-1$, $m>1$, 因此

$$f_k(n)=(n+1)^{2m}+n^{2m}-1$$

記爲

$$F_m(n)=(n+1)^{2m}+n^{2m}-1$$

(ii) 當 k 爲偶數時, 關係式成爲

$$(n+1)^{k+1}+n^{k+1}-(2n+1)=2[C_k^{k+1}S_k+C_{k-2}^{k+1}S_{k-2}+\cdots+C_2^{k+1}S_2] \tag{2}$$

取

$$g_k(n)=(n+1)^{k+1}+n^{k+1}-(2n+1),$$

由

$$g_k(0)=g_k(-1)=g_k(-\frac{1}{2})=0,$$

知 $g_k(n)$ 有因式 $n(n+1)(2n+1)$, 但

$$n(n+1)(2n+1)=6S_2,$$

因此 $g_k(n)$ 有因式 S_2。

如果我們能夠證明, 無論 k 爲任何偶數, $g_k(n)$ 恆可表爲一個純 S_1 的多項式與 S_2 的乘積, 又加以 $S_4=(\frac{6}{5}S_1-\frac{1}{5})S_2$, $S_6=(\frac{12}{7}S_1^2-\frac{6}{7}S_1+\frac{1}{7})S_2$ 等初始條件的滿足, 則由此遞迴關係式, 經數學歸納, 即是證得了 S_k 恆可表爲一個純 S_1 的多項式與 S_2 的乘積。

因 k 爲偶數, 令 $k=2m-2$, $m>1$, 因此

$$g_k(n)=(n+1)^{2m-1}+n^{2m-1}-(2n+1)$$

記爲

$$G_m(n)=(n+1)^{2m-1}+n^{2m-1}-(2n+1)$$

其次, 以 $n+1$ 及 n 爲兩根造一個二次方程式

$$x^2-(2n+1)x+n(n+1)=0$$

因此有

$$\begin{cases}(n+1)^{2m}-(2n+1)(n+1)^{2m-1}+n(n+1)(n+1)^{2m-2}=0\\ n^{2m}-(2n+1)n^{2m-1}+n(n+1)n^{2m-2}=0\end{cases}$$

上面二式相加得

$$[(n+1)^{2m}+n^{2m}]-(2n+1)[(n+1)^{2m-1}+n^{2m-1}]+n(n+1)[(n+1)^{2m-2}+n^{2m-2}]=0$$

改寫爲

$$\begin{aligned}&[(n+1)^{2m}+n^{2m}-1]-(2n+1)[(n+1)^{2m-1}+n^{2m-1}-(2n+1)]\\&\quad+n(n+1)[(n+1)^{2m-2}+n^{2m-2}-1]+1-(2n+1)^2+n(n+1)=0\end{aligned}$$

但是

$$1-(2n+1)^2+n(n+1)=-3n(n+1)=-6S_1$$

即得

$$F_m(n)-(2n+1)\cdot G_m(n)+2S_1\cdot F_{m-1}(n)-6S_1=0 \tag{3}$$

假定 $G_m(n)$ $(=g_k(n))$ 果眞是一個純 S_1 的多項式與 S_2 的乘積, 此時,
令 $G_m(n)=h_m(S_1)\cdot S_2$, 則

$$\begin{aligned}(2n+1)\cdot G_m(n)&=h_m(S_1)\cdot(2n+1)S_2\\&=h_m(S_1)\cdot\left(\frac{8}{3}S_1^2+\frac{1}{3}S_1\right)\qquad\text{(註1)}\end{aligned}$$

也就是說 $(2n+1)\cdot G_m(n)$ 可表爲一個純 S_1 的多項式。
因此我們可以說: 假定 $G_m(n)$ 可表爲一個純 S_1 的多項式與 S_2 的乘積, 則由遞迴關係式 (3), 經數學歸納, 便得到 $F_m(n)$ 恆可表爲一個純 S_1 的多項式。

再回到以 $n+1$ 及 n 爲兩根所造的二次方程式

$$x^2-(2n+1)x+n(n+1)=0$$

我們也有

$$\begin{cases}(n+1)^{2m-1}-(2n+1)(n+1)^{2m-2}+n(n+1)(n+1)^{2m-3}=0\\ n^{2m-1}-(2n+1)n^{2m-2}+n(n+1)n^{2m-3}=0\end{cases}$$

上面二式相加得

$$[(n+1)^{2m-1}+n^{2m-1}]-(2n+1)[(n+1)^{2m-2}+n^{2m-2}]+n(n+1)[(n+1)^{2m-3}+n^{2m-3}]=0$$

改寫爲

$$\begin{aligned}&[(n+1)^{2m-1}+n^{2m-1}-(2n+1)]-(2n+1)[(n+1)^{2m-2}+n^{2m-2}-1]\\ &\quad+n(n+1)[(n+1)^{2m-3}+n^{2m-3}-(2n+1)]+n(n+1)(2n+1)=0\end{aligned}$$

但是

$$n(n+1)(2n+1)=6S_2$$

即得

$$G_m(n)-(2n+1)\cdot F_{m-1}(n)+2S_1\cdot G_{m-1}(n)+6S_2=0 \tag{4}$$

假定 $F_{m-1}(n)$ $(=f_{k-1}(n))$ 果眞能夠表爲一個純 S_1 的多項式, 因 $f_{k-1}(n)$ 有因式 S_1, 此時, 令 $F_{m-1}(n)=k_{m-1}(S_1)\cdot S_1$, 則

$$\begin{aligned}(2n+1)\cdot F_{m-1}(n)&=k_{m-1}(S_1)\cdot(2n+1)S_1\\ &=3k_{m-1}(S_1)\cdot S_2\end{aligned}$$

也就是說 $(2n+1)\cdot F_{m-1}(n)$ 可表爲一個純 S_1 的多項式與 S_2 的乘積。

因此我們可以說: 假定 $F_{m-1}(n)$ 可表爲一個純 S_1 的多項式, 則由遞迴關係式 (4), 經數學歸納, 便得到 $G_m(n)$ 恆可表爲一個純 S_1 的多項式與 S_2 的乘積。

由於

$$\begin{aligned}F_2(n)&=(n+1)^4+n^4-1=8S_1^2+8S_1 &&(\text{註}2)\\ G_2(n)&=(n+1)^3+n^3-(2n+1)=6S_2 &&(\text{註}3)\\ F_3(n)&=(n+1)^6+n^6-1=16S_1^3+36S_1^2+12S_1 &&(\text{註}4)\\ G_3(n)&=(n+1)^5+n^5-(2n+1)=(12S_1+18)S_2 &&(\text{註}5)\end{aligned}$$

這些事實滿足了數學歸納的初始條件, 經由關係式 (3) 與 (4), 我們確定如下結論:

$F_m(n)$ 恆可表爲一個純 S_1 的多項式,
$G_m(n)$ 恆可表爲一個純 S_1 的多項式與 S_2 的乘積。

隨之, 我們亦即證得了:

$$\begin{cases} \text{當 } k \text{ 爲奇數時, } S_k \text{ 恆可表爲一個純 } S_1 \text{ 的多項式。} \\ \text{當 } k \text{ 爲偶數時, } S_k \text{ 恆可表爲一個純 } S_1 \text{ 的多項式與 } S_2 \text{ 的乘積。} \end{cases}$$

現在, 來看 S_k 表爲 S_1、S_2 的多項式時的最高次項與最低次項。

已知 S_k 表爲 n 之多項式時, 其最高次項爲 $\frac{1}{k+1}n^{k+1}$, 且 $S_1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$, $S_2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$, 因此,

(i) 當 k 爲奇數 $(k = 2m-1)$ 時,

$$\frac{1}{k+1}n^{k+1} = \frac{1}{k+1}n^{2m} = \frac{1}{k+1}(2S_1 - n)^m = \frac{2^m}{k+1}S_1^m + \cdots$$

(ii) 當 k 爲偶數 $(k = 2m)$ 時,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+1}n^{k+1} = \frac{1}{k+1}n^{2(m-1)+3} &= \frac{1}{k+1}(2S_1 - n)^{m-1} \cdot (3S_2 - \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n) \\ &= \frac{3 \cdot 2^{m-1}}{k+1}S_1^{m-1} \cdot S_2 + \cdots \end{aligned}$$

至於最低次項的情形,

(i) 當 k 爲奇數時,
我們回到關係式 (1):

$$(n+1)^{k+1} + n^{k+1} - 1 = 2[C_k^{k+1}S_k + C_{k-2}^{k+1} \cdot S_{k-2} + \cdots + C_1^{k+1}S_1]$$

即

$$(n+1)^{k+1} + n^{k+1} - 1 - 2C_1^{k+1}S_1 = 2[C_k^{k+1}S_k + C_{k-2}^{k+1}S_{k-2} + \cdots + C_3^{k+1}S_3] \quad (5)$$

取

$$p_k(n) = (n+1)^{k+1} + n^{k+1} - 1 - 2C_1^{k+1}S_1$$

則

$$p_k'(n) = (k+1)[(n+1)^k + n^k - 2n - 1]$$

由

$$p_k'(0) = p_k'(-1) = 0$$

知

$$p_k'(n)\text{有因式 } n(n+1)$$

再由多項式的重根定理知 $p_k(n)$ 有因式 $n^2(n+1)^2$, 即 $p_k(n)$ 有因式 S_1^2。因此, 由關係式 (5) 及 $S_3 = S_1^2$ 滿足初始條件, 經數學歸納, 便得到: S_k 表爲一個純 S_1 的多項式時, 其最低次項爲 $c \cdot S_1^2$, 其中 c 是一個相應於 k 的常數。

(ii) 當 k 爲偶數時,
由關係式 (2):

$$(n+1)^{k+1} + n^{k+1} - (2n+1) = 2[C_k^{k+1} S_k + C_{k-2}^{k+1} S_{k-2} + \cdots + C_2^{k+1} S_2]$$

即

$$(n+1)^{k+1} + n^{k+1} - (2n+1) - 2C_2^{k+1} S_2 = 2[C_k^{k+1} S_k + C_{k-2}^{k+1} S_{k-2} + \cdots + C_4^{k+1} S_4] \quad (6)$$

取

$$q_k(n) = (n+1)^{k+1} + n^{k+1} - (2n+1) - 2C_2^{k+1} S_2$$

由於在前文中我們已知 $(n+1)^{k+1} + n^{k+1} - (2n+1)$ 有因式 S_2, 因此, $q_k(n)$ 有因式 S_2。又

$$q_k'(n) = (k+1)[(n+1)^k + n^k] - 2 - k(k+1)(n^2 + n + \frac{1}{6})$$

由

$$q_k'(0) \neq 0, q_k'(-1) \neq 0$$

知 $q_k'(n)$ 無因式 $n(n+1)$, 即 $q_k'(n)$ 無因式 S_1, 因而由多項式的重根定理知道 $q_k(n)$ 無因式 S_1^2。但 $q_k(n)$ 既有因式 S_2 (請注意: S_2 亦有因式 S_1) , 便知道 $q_k(n)$ 表爲一個純 S_1 的多項式與 S_2 的乘積時, 其最低次項必爲 $\lambda \cdot S_2$, 其中 λ 是一個常數。
因此, 由關係式 (6) 及 $S_4 = (\frac{6}{5} S_1 - \frac{1}{5}) S_2$ 滿足初始條件, 經數學歸納, 便得到: S_k 表爲一個純 S_1 的多項式與 S_2 的乘積時, 其最低次項爲 $C \cdot S_2$, 其中 C 是一個相應於 k 的常數。

以上, 便是關於定理中之 (1) 與 (2) 的證明部分。

(3): 承 (1) 與 (2), 令 $S_k = P_k(S_1, S_2)$, 由於 $S_k = S_k(n)$, 當 $n = 1$ 時, $S_1(1) = S_2(1) = S_k(1) = 1$, 所以 $P_k(1,1) = S_k(1) = 1$, 而 $P_k(1,1)$ 是多項式 $P_k(S_1, S_2)$ 的係數和, 因此即證得 S_k 表爲 S_1 與 S_2 的多項式時, 其係數和恆爲 1。

註 1:

$$\begin{aligned}
nS_1 &= \Big(\frac{2n+1}{2}-\frac{1}{2}\Big)S_1=\frac{2n+1}{2}S_1-\frac{1}{2}S_1=\frac{3}{2}S_2-\frac{1}{2}S_1\\
nS_2 &= n\cdot\frac{(2n+1)S_1}{3}=\frac{1}{3}S_1\cdot n[(n+1)+n]=\frac{1}{3}S_1\cdot(2S_1+n^2)\\
&=\frac{2}{3}S_1^2+\frac{1}{3}S_1\cdot n^2=\frac{2}{3}S_1^2+\frac{1}{3}S_1(2S_1-n)=\frac{4}{3}S_1^2-\frac{1}{3}nS_1\\
&=\frac{4}{3}S_1^2-\frac{1}{3}(\frac{3}{2}S_2-\frac{1}{2}S_1)=\frac{4}{3}S_1^2-\frac{1}{2}S_2+\frac{1}{6}S_1\\
(2n+1)S_2 &= 2nS_2+S_2=\frac{8}{3}S_1^2+\frac{1}{3}S_1
\end{aligned}$$

註 2:

$$\begin{aligned}
F_2(n) &= (n+1)^4+n^4-1=2n^3(n+1)+2n^2(n+1)+4n(n+1)\\
&=2n(n+1)[n^2+n]+8S_1=8S_1^2+8S_1
\end{aligned}$$

註 3:

$$\begin{aligned}
G_2(n) &= (n+1)^3+n^3-(2n+1)=n(n+1)(2n+1)\\
&=6S_2
\end{aligned}$$

註 4 **與 註** 5: 仿 (註 2) 與 (註 3) 之法, 利用 (註 1) 的結果, 即得

$$\begin{aligned}
F_3(n) &= 16S_1^3+36S_1^2+12S_1\\
G_3(n) &= (12S_1+18)S_2
\end{aligned}$$

附記: 若 S_k 表爲 S_1 與 S_2 的多項式而不受制於定理中之 (1) 與 (2) 的型式時, 其表出的形式並非唯一。例如 $S_5=\frac{4}{3}S_1^3-\frac{1}{3}S_1^2$, 但也有 $S_5=\frac{3}{2}S_2^2-\frac{1}{2}S_1^2$。

(這裡, 作者非常感謝審核先生對此非唯一性的提醒)

—本文作者爲國立科學園區實驗高中退休數學教師—