數學傳播 38卷1期, pp. 56-63

關於第一型廣義 Stirling 數之同餘式的註記

許家甄

一、前言

當 $n=1,2,\ldots$ 時, 我們定義降階乘函數 $[x]_n=x(x-1)\cdots(x-n+1)$。特別地, 我們定義 $[x]_0=1$。第一型與第二型的 Stirling 數分別是以冪次函數基底 ${x^k}_{k\geq 0}$ 來表示 $[x]_n$, 與用降階乘函數基底 $[x]_{k_{k\geq 0}}$ 來表示 x^n 所涉及的係數, 是由 James Stirling 在 1780 年定義的。現在, 我們具體地給出第一型 Stirling 數的定義:

$$[x]_n=\sum_{k\geq 0} S_1(n,k)\,x^k。$$

而第一型 Stirling 數, 還有另一層含義: $|S_1(n,k)|$ 是「將 n 個元素, 先分成 k 個非空組後, 再將每一組做成一個環狀排列」的方法數。$|S_1(n,k)|$ 也經常被寫成 $\left[{n \atop k}\right]$, 因為 $\left[{n+1 \atop k}\right]=n\left[{n \atop k}\right]+\left[{n \atop k-1}\right]$ 類似於二項式係數等式。

本文的主要目的是將 Comtet [3] 的同餘關係式

$$S_1(p,n)\equiv 0 \pmod p,\ 2\leq n\leq p-1,$$

延伸至模 p 的更高次方 (請參考定理 2)。接著再推廣至廣義的第一型 Stirling 數之同餘關係式 (請參考第 3 節)。

最後, 我們將簡單介紹一些特殊的第一型 Stirling 數, 並利用主要定理, 對特殊的第一型 Stirling 數的同餘關係進行探討。

二、第一型 Stirling 數的同餘關係式

從本節開始, 以下的 p 皆為奇質數。我們直接引用下面的遞迴關係式, 因為網路上可以輕易找到證明, 就不浪費篇幅了。

性質 1. $S_1(n,k) = S_1(n-1,k-1) - (n-1)S_1(n-1,k)$。

已知當 $2 \le n \le p-1$, $S_1(p,n) \equiv 0 (\bmod p)$ (請參考 [3]), 再利用性質 1, 我們有

$$S_1(p+1,n) = S_1(p,n-1) - pS_1(p,n) \equiv S_1(p,n-1) \pmod{p^2}。$$

我們得到一引理如下:

引理 1. 當 $2 \le n \le p-1$,

$$S_1(p,n-1) \equiv S_1(p+1,n) \pmod{p^2}。$$

更一般地, 我們可得

定理 2.

$$S_1(p,n-(k-1)) \equiv \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{k-2} p^i S_1(p+1,n+i-(k-2)) \pmod{p^k}, & 2 \le k \le n+1; \\ 0 \pmod{p}, & k=1。\end{cases}$$

其中 $2 \le n \le p-1$。

證明: 令 $2 \le n \le p-1$, 我們將對 k 做數學歸納法。當 $k=2$ 時, 由引理 1 可知此命題爲眞。

假設當 $2 \le k = j \le n$, 此命題爲眞。亦即

$$S_1(p,n-(j-1)) \equiv \sum_{l=0}^{j-2} p^l S_1(p+1,n+l-(j-2)) \pmod{p^j}。$$

則當 $k=j+1$ 時,

$$\begin{aligned} S_1(p,n-j) &= S_1(p+1,n-j+1) + pS_1(p,n-(j-1)) \\ &\equiv S_1(p+1,n-j+1) + \sum_{l=0}^{j-2} p^{l+1} S_1(p+1,n+l-(j-2)) \\ &\equiv S_1(p+1,n-j+1) + \sum_{i=1}^{j-1} p^i S_1(p+1,n+i-(j-1)) \\ &\equiv \sum_{i=0}^{j-1} p^i S_1(p+1,n+i-(j-1)) \pmod{p^{j+1}}, \end{aligned}$$

其中 $l = i-1$。由數學歸納法得證。 □

三、廣義的 Stirling 數與同餘關係式

在上一節中, 我們所討論的第一型 Stirling 數如今已被廣泛推廣, 例如 Broder [1] 的 r-Stirling 數, 以及 Carlitz 在 [2] 中所提及兩種衰退的 Stirling 數。廣義的 Stirling 數, 則由 Hsu 及 Shiue 在 [4] 中給出了較具體的定義: 當 $n=1,2,\ldots$ 時, 他們定義 $[z\mid\alpha]_n=z(z-\alpha)\cdots(z-n\alpha+\alpha)$, 而 $[z\mid\alpha]_0=1$, 其中 α 爲任意實數。明顯地, 有 $[z\mid 0]_n=z^n$ 以及 $[z\mid 1]_n=[z]_n$。我們從 [4] 引入以下定義:

定義 1.

$$[t\mid\alpha]_n=\sum_{k=0}^{n}S\left(n,k;\alpha,\beta,\gamma\right)[t-\gamma\mid\beta]_k\,,$$

其中 α、β、γ 爲任意實數, 而 $S\left(n,k;\alpha,\beta,\gamma\right)$ 即爲第一型的廣義 Stirling 數。

爲了方便起見, 我們把 $S\left(n,k;\alpha,\beta,\gamma\right)$ 簡記成 $S\left(n,k\right)$, 必要時會將參數表示出來。下面是本文會提到的一些特殊廣義第一型 Stirling 數 ([4]):

- 當 $\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle=\langle 1,0,0\rangle$ 時, $S\left(n,k\right)$ 即爲第一型 Stirling 數;
- 當 $\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle=\langle -1,-\lambda,0\rangle$ 時, $S(n,k)$ 即爲 Carlitz 的第一型衰退 Stirling 數;
- 當 $\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle=\langle -1,0,r\rangle$ 時, $S\left(n,k\right)$ 則爲 r-Stirling 數的第一型。

這些在稍後會有較詳細的介紹及說明。

以下列出我們需要的廣義 Stirling 數的性質:

性質 2 ([4])**.** *(遞迴關係式)* 對任意的 α、β、γ 我們有

$$S\left(n+1,k\right)=S\left(n,k-1\right)+\left(k\beta-n\alpha+\gamma\right)S\left(n,k\right),$$

其中 $1\le k\le n$。

性質 3 ([4])**.** 當 α、β、γ 是整數, 我們有以下的同餘關係式:

$$S\left(p,n;\alpha,\beta,\gamma\right)\equiv 0\pmod p,$$

其中 $2\le n\le p-1$。

類似於定理 2 可得:

主要定理. 當 $2 \le n \le p-1$, 且 $\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod p$

$$
\begin{aligned}
&S(p, n-(k-1)) \\
\equiv &\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{k-2} [\phi + (k-2)\beta \mid \beta]_i \, S(p+1, n+i-(k-2)) \pmod{p^k}, & 2 \le k \le n+1; \\ 0 \pmod p &, \ k=1。 \end{cases}
\end{aligned}
$$

其中 $\phi = p\alpha - n\beta - \gamma$。

證明: 令 $2 \le n \le p-1$, 我們將對 k 用數學歸納法證明。當 $k=2$, 由性質 2 及性質 3, 我們有

$$S(p+1, n) = S(p, n-1) + (n\beta - p\alpha + \gamma) S(p, n),$$

且 $S(p, n) \equiv 0 \pmod p$。又, 因爲 $\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod p$, 所以我們有

$$S(p, n-1) \equiv S(p+1, n) \pmod{p^2},$$

本命題在 $k=2$ 時爲眞。

假設在 $2 \le k = j \le n$ 時, 此命題爲眞, 換句話說,

$$S(p, n-(j-1)) \equiv \sum_{i=0}^{j-2} [\phi + (j-2)\beta \mid \beta]_i \, S(p+1, n+i-(j-2)) \pmod{p^j}。$$

則當 $k = j+1$ 時,

$$
\begin{aligned}
&S(p, n-j) \\
= &S(p+1, n-j+1) - ((n-j+1)\beta - p\alpha + \gamma) \, S(p, n-j+1) \\
\equiv &S(p+1, n-j+1) \\
&- ((n-j+1)\beta - p\alpha + \gamma) \sum_{i=0}^{j-2} [\phi + (j-2)\beta \mid \beta]_i \, S(p+1, n+i-(j-2)) \\
\equiv &S(p+1, n-j+1) \\
&+ (\phi + (j-1)\beta) \sum_{i=0}^{j-2} [\phi + (j-2)\beta \mid \beta]_i \, S(p+1, n+i-(j-2)) \\
\equiv &S(p+1, n-j+1) + \sum_{i=1}^{j-1} [\phi + (j-1)\beta \mid \beta]_i \, S(p+1, n+i-(j-1)) \\
\equiv &\sum_{i=0}^{j-1} [\phi + (j-1)\beta \mid \beta]_i \, S(p+1, n+i-(j-1)) \pmod{p^{j+1}}。
\end{aligned}
$$

□

因爲 $S(n,k;1,0,0)=S_1(n,k)$, 再代入主要定理, 即可得定理 2。

接下來, 我們要將以上的主要定理, 應用在兩個特別的 Stirling 數上。

在 [2] 中, Carlitz 第一型衰退的 Stirling 數 $S_1(n,k\mid\lambda)$ 滿足

$$[x]_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}S_1(n,k\mid\lambda)[x\mid\lambda]_k,$$

我們已知 Carlitz 第一型衰退的 Stirling 數爲: $S(n,k;-1,-\lambda,0)$。

當 $\lambda=-1$、-2 及 -3, Carlitz 分別給出下列的表 1、表 2, 還有表 3:

表 1. $\lambda=-1$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	0	1				
2	0	2	1			
3	0	6	6	1		
4	0	24	36	12	1	
5	0	120	240	120	20	1

表 2. $\lambda=-2$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	0	1				
2	0	3	1			
3	0	12	9	1		
4	0	60	75	18	1	
5	0	360	660	255	30	1

表 3. $\lambda=-3$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	0	1				
2	0	4	1			
3	0	20	12	1		
4	0	120	128	24	1	
5	0	840	405	440	40	1

此時 $\phi=n\lambda-p$, 再利用主要定理, 可得:

系理 3. 當 $\lambda \equiv 0 (\bmod p)$, 且 $2 \leq k \leq n+1$, $2 \leq n \leq p-1$ 時,

$$\begin{aligned} & S\,(p, n-(k-1); -1, -\lambda, 0) \\ & \equiv \sum_{i=0}^{k-2} [(n-k+2)\lambda - p \mid -\lambda]_i \, S\,(p+1, n+i-(k-2); -1, -\lambda, 0) \quad (\bmod p^k)。\end{aligned}$$

例 1. 取 $p=3$、$\lambda=-3$、$n=2$。

- 當 $k=2$ 時,

$$\begin{aligned} 左式 &= S\,(3,1;-1,3,0) = 20; \\ 右式 &= S\,(4,2;-1,3,0) = 128。\end{aligned}$$

顯然 $S\,(3,1;-1,3,0) \equiv 20 \equiv 128 \equiv S\,(4,2;-1,3,0) \pmod 9$。

- 當 $k=3$ 時,

$$\begin{aligned} 左式 &= S\,(3,0;-1,3,0) = 0; \\ 右式 &= S\,(4,1;-1,3,0) - 6 \cdot S\,(4,2;-1,3,0) = -648 = (-24)\cdot 27。\end{aligned}$$

所以有 $S\,(3,0;-1,3,0) \equiv S\,(4,1;-1,3,0) - 6 \cdot S\,(4,2;-1,3,0) \quad (\bmod 27)$。

類似地, 考慮 r-Stirling 數的第一型 $S_r(n,k)$ (請參考 [1]), 滿足以下關係式:

$$[x \mid -1]_n = \sum_{k=0}^{n} S_r(n,k)(x-r)^k,$$

所以 $S_r(n,k) = S\,(n,k;-1,0,r)$。當 $r=2,3$ 時, Broder [1] 分別給出表 4 和表 5:

表 4. $r=2$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	2	1				
2	6	5	1			
3	24	26	9	1		
4	120	154	71	14	1	
5	720	1044	580	155	20	1

表 5. $r=3$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	3	1				
2	12	7	1			
3	60	47	12	1		
4	360	342	119	18	1	
5	2520	2754	1175	245	25	1

在這種情況下, $\phi = -p-r$, 利用主要定理, 可得以下系理:

系理 4. 當 $r \equiv 0 \pmod{p}$, 且 $2 \le k \le n+1$, $2 \le n \le p-1$ 時

$$\begin{aligned} & S\left(p, n-(k-1); -1, 0, r\right) \\ & \equiv \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i \left(p+r\right)^i S\left(p+1, n+i-(k-2); -1, 0, r\right) \pmod{p^k}。\end{aligned}$$

例 2. 取 $p = r = 3$、$n = 2$。

- 當 $k = 2$ 時,

$$\begin{aligned} \text{左式} &= S\left(3, 1; -1, 0, 3\right) = 47; \\ \text{右式} &= S\left(4, 2; -1, 0, 3\right) = 119。\end{aligned}$$

顯然我們有 $S\left(3, 1; -1, 0, 3\right) \equiv 47 \equiv 119 \equiv S\left(4, 2; -1, 0, 3\right) \pmod{9}$。

- 當 $k = 3$ 時,

$$\begin{aligned} \text{左式} &= S\left(3, 0; -1, 0, 3\right) = 60; \\ \text{右式} &= S\left(4, 1; -1, 0, 3\right) - 6 \cdot S\left(4, 2; -1, 0, 3\right) = -372。\end{aligned}$$

明顯地,

$$S\left(3, 0; -1, 0, 3\right) \equiv 60 \equiv -372 \equiv S\left(4, 1; -1, 0, 3\right) - 6 \cdot S\left(4, 2; -1, 0, 3\right) \pmod{27}。$$

備註. 本文之主要定理並不適用於廣義的第二型 Stirling 數。我們針對第二型 Stirling 數舉一個反例:

當 $p = 3$、$n = k = 2$ 時, 主要定理中的左式爲 $S_2(3, 1) = 1$, 而右式則爲 $S_2(4, 2) = 7$。但, 明顯地 $S_2(3, 1) \not\equiv S_2(4, 2) \pmod{3^2}$ (請參考表 6)。

表 6.

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	0	1				
2	0	1	1			
3	0	1	3	1		
4	0	1	7	6	1	
5	0	1	15	25	10	1

致謝:　感謝中央研究院所舉辦的暑期研習, 讓筆者有機會受到薛昭雄老師的悉心指導, 也謝謝老師常常幫忙看我們所寫的東西, 改正我們的缺點與錯誤。另外, 特別感謝孫維良同學在本文撰寫期間, 所給予的許多建議及幫助。

參考資料

1. A. Z. Broder, *The r-Stirling numbers*, Discrete Math. **49**(1984), 241-259.
2. L. Carlitz, *Degenerate Stirling, Bernoulli and Eulerian numbers*, Utilitas Math. **15** (1979), 51-88.
3. L. Comtet, *Advanced combinatorics*, p.218, Reidel Dordrecht, 1974.
4. Leetsch C. Hsu and Peter J.-S. Shiue, *A unified approach to generalized Stirling numbers*, Adv. in Appl. Math. **20**(1998), no. 3, 366-384.

—本文作者投稿時就讀國立台東大學數學系—