數學傳播 38卷1期, pp. 36-55

用矩陣方法探討三階遞迴數列

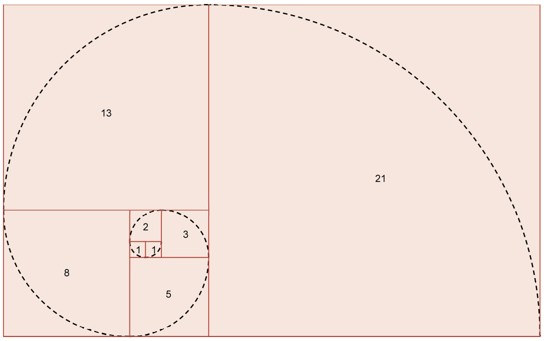
廖信傑

一、前言

義大利數學家 Fibonacci 於 1202 年在其著作中提出兔子問題, 這個問題造就了現在廣爲人知的 Fibonacci 數列:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad F_0 = F_1 = 1,$$

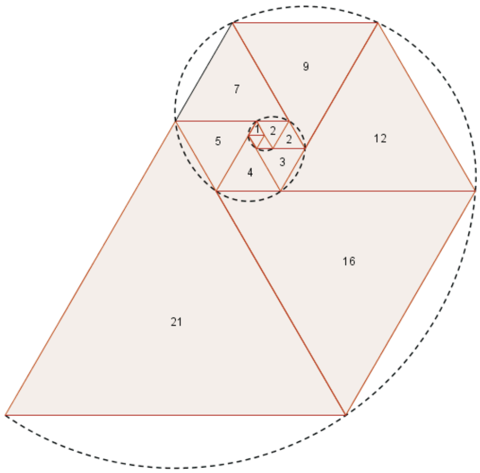
利用幾何的方式, 我們可以將 Fibonacci 數列表現出來, 如圖一。



圖一

圖一中, 正方形的邊長由小至大恰爲 Fibonacci 數列, 在每個正方形內加上以其邊長爲半徑的圓, 可以得到一條優美的螺線 (spiral), 這條螺線可以做爲對數螺線 (logarithmetic spiral) 的近似。

若我們將圖一中的正方形以正三角形替代, 依照類似的方法排列, 也可以得到類似的結果, 如圖二。這些正三角形的邊長由小到大形成一個新的數列, 稱爲 Padovan 數列 [11]。



圖二

Padovan 數列 $\{P_n\}$ 是由 Ian Stewart 在科學人雜誌 1996 年 6 月號所提出, 滿足三階遞迴關係式

$$P_{n+3} = P_{n+1} + P_n, \qquad P_0 = P_1 = P_2 = 1,$$

以建築師 Richard Padovan 的名字命名。

另一個與 $\{P_n\}$ 有關的是 Perrin 數 $\{R_n\}$, 滿足遞迴關係

$$R_{n+3} = R_{n+1} + R_n, \qquad R_0 = 3, R_1 = 0, R_2 = 2,$$

與 $\{P_n\}$ 具有相同的遞迴式, 但不同的初始值。

對於 Padovan 數及 Perrin 數的研究, 近年來已有一些結果, 使用的工具有生成函數、矩陣方法$\cdots$等等。本文將利用矩陣方法研究 Padovan 數列, 爲此需要先探討一些一般三階遞迴多項式所具備的性質。在這過程中, 我們也發現我們的成果部分回答了 Gould [5] 於其文章 — A history of the Fibonacci Q-matrix and a higher dimensional problem最末提出該如何推廣二階的 Fibonacci Q-矩陣到三階、四階甚至更高階的問題。

利用矩陣方法處理二階遞迴數列已見於多處文獻, 如 [7], [14]。最近在數學傳播 36 卷第二期中林鈺傑 [14] 定義

$$Q=\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

並用其處理二階遞迴數列 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$, 其中數列 $\{x_n\}$ 滿足遞迴式

$$x_{n+1}=cx_{n+1}+dx_n, \quad x_0=a,\ x_{-1}=0,$$

數列 $\{y_n\}$ 滿足

$$y_{n+1}=cy_{n+1}+dy_n, \quad y_0=x_0=a,\ y_1=b,$$

他利用 Q-矩陣得到一些二階遞迴數列的恆等式。這讓我們想到若用類似的矩陣方法處理三階遞迴式是否可以與 Gould 提出的問題做連結, 並得到常係數三階遞迴數列的一些性質。

在第二節中, 我們考慮一個三階遞迴數列 $\{a_n\}$ 滿足遞迴式

$$a_{n+3}=pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n \quad (r\neq 0),$$

其初始條件爲 $a_{-2}=a_{-1}=0$、$a_0=a\neq 0$, 令

$$Q=\begin{bmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

並證明給定一個所有元素皆由數列 $\{a_n\}$ 以某種固定的形式組成的 3×3 方陣, 此種方陣可以表示成 Q 的乘冪, 我們可以由這個性質得到一些數列 $\{a_n\}$ 的恆等式, 其中 Waddill [10] 稱 Q 爲 S-矩陣。

在第三節中, 我們將第二節證明的性質做了一些調整, 使其可以應用在一般的常係數三階遞迴關係, 從而可以得到一些關於此類遞迴數列的恆等式。

最後在第四節中, 我們以前兩節得到的性質做工具, 導出了一連串關於 Padovan 數列 [11] 的恆等式。

二、特殊三階遞迴數列的性質

本文於此節及下一節中同樣以矩陣方法研究三階遞迴數列, 並導出幾個可以與林鈺傑 [14] 的二階遞迴數列相對應的三階遞迴數列性質, 我們將在第三節末將其列出比較。

首先, 考慮一個三階遞迴數列 $\{a_n\}_{n\in Z}$, 滿足遞迴式

$$a_{n+3}=pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n \quad (r\neq 0),$$

其初始條件爲 $a_{-2}=a_{-1}=0$、$a_0=a\neq 0$。

直接計算可得 $a_{-3}=\dfrac{a}{r}$、$a_{-4}=-\dfrac{qa}{r^2}$、$a_1=pa$ 及 $a_2=(p^2+q)a$。

我們可以將遞迴式用矩陣表示如下:

$$\begin{bmatrix} a_{n+3}\\ a_{n+2}\\ a_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p & q & r\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n+2}\\ a_{n+1}\\ a_{n}\end{bmatrix}.$$

以下便是這一節的一些主要定理。

定理1. 對任意整數 n 皆有

$$Q^n=\begin{bmatrix} p & q & r\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^n=\frac{1}{a}\begin{bmatrix} a_n & qa_{n-1}+ra_{n-2} & ra_{n-1}\\ a_{n-1} & qa_{n-2}+ra_{n-3} & ra_{n-2}\\ a_{n-2} & qa_{n-3}+ra_{n-4} & ra_{n-3}\end{bmatrix} \tag{2.1}$$

證明: 我們將利用數學歸納法證明。

當 $n=0$ 時,

$$\frac{1}{a}\begin{bmatrix} a_0 & qa_{-1}+ra_{-2} & ra_{-1}\\ a_{-1} & qa_{-2}+ra_{-3} & ra_{-2}\\ a_{-2} & qa_{-3}+ra_{-4} & ra_{-3}\end{bmatrix}=\frac{1}{a}\begin{bmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}=I_3=Q^0,$$

成立。假設 $n=k\geq 0$ 時, 有

$$Q^k=\frac{1}{a}\begin{bmatrix} a_k & qa_{k-1}+ra_{k-2} & ra_{k-1}\\ a_{k-1} & qa_{k-2}+ra_{k-3} & ra_{k-2}\\ a_{k-2} & qa_{k-3}+ra_{k-4} & ra_{k-3}\end{bmatrix}.$$

現在考慮 $n=k+1$, 則

$$Q^{k+1}=Q^kQ=\frac{1}{a}\begin{bmatrix} a_k & qa_{k-1}+ra_{k-2} & ra_{k-1}\\ a_{k-1} & qa_{k-2}+ra_{k-3} & ra_{k-2}\\ a_{k-2} & qa_{k-3}+ra_{k-4} & ra_{k-3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q & r\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{a}\begin{bmatrix} pa_k+qa_{k-1}+ra_{k-2} & qa_k+ra_{k-1} & ra_k \\ pa_{k-1}+qa_{k-2}+ra_{k-3} & qa_{k-1}+ra_{k-2} & ra_{k-1} \\ pa_{k-2}+qa_{k-3}+ra_{k-4} & qa_{k-2}+ra_{k-3} & ra_{k-2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{a}\begin{bmatrix} a_{k+1} & qa_k+ra_{k-1} & ra_k \\ a_k & qa_{k-1}+ra_{k-2} & ra_{k-1} \\ a_{k-1} & qa_{k-2}+ra_{k-3} & ra_{k-2} \end{bmatrix}.$$

故由數學歸納法知

$$Q^n = \begin{bmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \frac{1}{a}\begin{bmatrix} a_n & qa_{n-1}+ra_{n-2} & ra_{n-1} \\ a_{n-1} & qa_{n-2}+ra_{n-3} & ra_{n-2} \\ a_{n-2} & qa_{n-3}+ra_{n-4} & ra_{n-3} \end{bmatrix}$$

對所有正整數 皆成立。

實際上, 此定理也適用於負整數。注意到, 對任意正整數 n,

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_{-1} \\ a_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{-1} \\ a_{-2} \\ a_{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} a_{-2} \\ a_{-3} \\ a_{-4} \end{bmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{bmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} a_{-n} \\ a_{-n-1} \\ a_{-n-2} \end{bmatrix}.$$

從而

$$\begin{bmatrix} a_{-n} \\ a_{-n-1} \\ a_{-n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-n}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_{-1} \\ a_{-2} \end{bmatrix},$$

於是我們有

$$\begin{bmatrix} a_{-n} & qa_{-n-1}+ra_{-n-2} & ra_{-n-1} \\ a_{-n-1} & qa_{-n-2}+ra_{-n-3} & ra_{-n-2} \\ a_{-n-2} & qa_{-n-3}+ra_{-n-4} & ra_{-n-3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-n}\begin{bmatrix} a_0 & qa_{-1}+ra_{-2} & ra_{-1} \\ a_{-1} & qa_{-2}+ra_{-3} & ra_{-2} \\ a_{-2} & qa_{-3}+ra_{-4} & ra_{-3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-n} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-n},$$

即

$$\begin{bmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-n} = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} a_{-n} & qa_{-n-1}+ra_{-n-2} & ra_{-n-1} \\ a_{-n-1} & qa_{-n-2}+ra_{-n-3} & ra_{-n-2} \\ a_{-n-2} & qa_{-n-3}+ra_{-n-4} & ra_{-n-3} \end{bmatrix}. \qquad \square$$

利用 (2.1), 我們可以得到一些 $\{a_n\}$ 的恆等式, 如下述的定理 2 及定理 3。令 A 爲一方陣, 我們以 $\det(A)$ 代表方陣 A 的行列式值。

定理 2. 對任意整數 n 有

$$\det \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & a_{n+2} \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} = a^3 r^n.$$

證明:

$$r^n = \det(Q^n) = \frac{1}{a^3} \det \begin{pmatrix} a_n & qa_{n-1}+ra_{n-2} & ra_{n-1} \\ a_{n-1} & qa_{n-2}+ra_{n-3} & ra_{n-2} \\ a_{n-2} & qa_{n-3}+ra_{n-4} & ra_{n-3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^3} \det \begin{pmatrix} a_n & ra_{n-2} & ra_{n-1} \\ a_{n-1} & ra_{n-3} & ra_{n-2} \\ a_{n-2} & ra_{n-4} & ra_{n-3} \end{pmatrix} = \frac{r^2}{a^3} \det \begin{pmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{r^2}{a^3} \det \begin{pmatrix} a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} \end{pmatrix}.$$

因此

$$\det \begin{pmatrix} a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} \end{pmatrix} = a^3 \frac{r^n}{r^2} = a^3 r^{n-2}. \qquad \square$$

定理 3. 對任意整數 m, n, 我們有

$$a_{m+n} = \frac{1}{a}[a_m a_n + qa_{n-1}a_{m-1} + r(a_{n-2}a_{m-1} + a_{n-1}a_{m-2})].$$

證明: 考慮 Q 之 $(m+n)$ 次乘冪, 由 (2.1) 可得

$$Q^{m+n}=\frac{1}{a}\begin{bmatrix} a_{m+n} & qa_{m+n-1}+ra_{m+n-2} & ra_{m+n-1} \\ a_{m+n-1} & qa_{m+n-2}+ra_{m+n-3} & ra_{m+n-2} \\ a_{m+n-2} & qa_{m+n-3}+ra_{m+n-4} & ra_{m+n-3} \end{bmatrix}.$$

上式等號左邊可寫成

$$\begin{aligned} Q^{m+n} &= Q^mQ^n \\ &= \frac{1}{a^2}\begin{bmatrix} a_m & qa_{m-1}+ra_{m-2} & ra_{m-1} \\ a_{m-1} & qa_{m-2}+ra_{m-3} & ra_{m-2} \\ a_{m-2} & qa_{m-3}+ra_{m-4} & ra_{m-3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n & qa_{n-1}+ra_{n-2} & ra_{n-1} \\ a_{n-1} & qa_{n-2}+ra_{n-3} & ra_{n-2} \\ a_{n-2} & qa_{n-3}+ra_{n-4} & ra_{n-3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

比較 Q^{m+n} 中的 (1,1) 元素可得

$$a_{m+n}=\frac{1}{a}[a_ma_n+qa_{n-1}a_{m-1}+r(a_{n-2}a_{m-1}+a_{n-1}a_{m-2})]. \qquad \square$$

以下我們給出一個 $\{a_n\}_{n\in Z}$ 的實際例子:

Barry [1] 證明了一個三階遞迴數列若具有

$$\frac{1}{1-kx-kx^2+x^3}$$

形式的生成函數, 則此三階遞迴數列可以寫成某一個二階遞迴數列連續兩項的乘積, 在文章中他以 Fibonacci 數列 $\{F_n\}_{n\geq 0}$ 連續兩項的乘積 $\{F_nF_{n+1}\}_{n\geq 0}$ 做為整篇文章的楔子。

若令 Fibonacci 數列之初始值爲 $F_0=F_1=1$, 並將 $\{F_nF_{n+1}\}_{n\geq 0}$ 的底標延伸到負數, 令 $H_n=F_nF_{n+1}$, 則 $\{H_n\}_{n\in Z}$ 滿足遞迴式

$$H_{n+3}=2H_{n+2}+2H_{n+1}-H_n, \quad H_{-1}=H_{-2}=0, \quad H_0=1.$$

[**註**]: 事實上, 任意常係數二階遞迴式 $\{c_n\}$ 滿足遞迴關係

$$c_{n+2}=pc_{n+1}+qc_n,$$

其連續兩項相乘所得之數列 $\{c_nc_{n+1}\}$ 皆會滿足一個三階遞迴關係, 如下:

$$c_{n+3}c_{n+4}=(p^2+q)c_{n+2}c_{n+3}+q(p^2+q)c_{n+1}c_{n+2}-q^3c_nc_{n+1}.$$

因爲 $H_{-1}=H_{-2}=0$, $\{H_n\}$ 跟這一節的 $\{a_n\}$ 是同一類的遞迴數列, 於是由 (2.1) 知

$$Q^n=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} H_n & 2H_{n-1}-H_{n-2} & -H_{n-1} \\ H_{n-1} & 2H_{n-2}-H_{n-3} & -H_{n-2} \\ H_{n-2} & 2H_{n-3}-H_{n-4} & -H_{n-3} \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

利用定理2及定理3可分別得到以下恆等式

(i) 對任意整數 n 有

$$\det\begin{pmatrix} H_n & H_{n+1} & H_{n+2} \\ H_{n-1} & H_n & H_{n+1} \\ H_{n-2} & H_{n-1} & H_n \end{pmatrix} = (-1)^n.$$

(ii) 對任意整數 m, n, 我們有

$$H_{m+n} = H_mH_n + 2H_{n-1}H_{m-1} - (H_{n-2}H_{m-1} + H_{n-1}H_{m-2}).$$

除了這些可以直接由定理得到的恆等式, 若遞迴數列的特徵多項式夠好時, 我們也可以利用 Cayley-Hamilton 定理 [6] 及 (2.1) 得到其他恆等式, 如下:

因 Q 的特徵多項式爲 $x^3-2x^2-2x+1=0$, 由 Cayley-Hamilton 定理可得

$$Q^3-2Q^2-2Q+I=(Q+I)(Q^2-3Q+I)=0. \tag{2.3}$$

定理4. 對任意正整數 n 及整數 r, 有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{r+3k}F_{r+3k+1} = 2^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{n+r+k}F_{n+r+k+1}.$$

證明: 由 (2.3) 知 $Q^3+I=2Q^2+2Q=2Q(Q+I)$, 等式兩邊同取 n 次乘冪得

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Q^{3k} = (Q^3+I)^n = 2^nQ^n(Q+I)^n = 2^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Q^{n+k}.$$

兩邊同乘 Q^r 並將 (2.2) 代入, 比較矩陣兩邊 (1,1) 元素可得

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H_{r+3k} = 2^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H_{n+r+k}.$$

將 H_{r+3k}, H_{n+r+k} 換回 $F_{r+3k}F_{r+3k+1}$, $F_{n+r+k}F_{n+r+k+1}$ 可得結果。 □

對定理 4 中等式左邊做逆運算 ([3])

$$f_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g_k \quad (n\ge 0) \Leftrightarrow g_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f_k,$$

將 $2^n\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H_{n+r+k}$ 代入 f_n, $F_{r+3k}F_{r+3k+1}$ 代入 g_k, 我們得到以下推論:

推論5. 對任意正整數 n 及整數 r, 有

$$F_{3n+r}F_{3n+r+1}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{l}2^kF_{k+l+r}F_{k+l+r+1}.$$

上述定理 4 及推論 5 之結果是 Fibonacci 數列新的恆等式。

三、一般三階遞迴數列的性質

有了第二節的性質, 現在我們希望對一般的常係數三階遞迴數列滿足

$$b_{n+3}=pb_{n+2}+qb_{n+1}+rb_n,$$

其初始條件爲 $b_0=a_0=a$, $b_1=b$, $b_2=c$, $\{b_n\}$ 也能類似 (2.1) 表示爲 Q 的乘冪。然而經過多番嘗試, 這似乎是難以辦到的, 所以我們退而求其次, 透過將 b_{n+2}, b_{n+1}, b_n 表示爲 a_n, a_{n-1}, a_{n-2} 的線性組合, 將其以矩陣型式表現出來, 希望透過 $\{b_n\}$ 與 $\{a_n\}$ 間的聯繫來接近我們的目標。

定理6. 對任意正整數 n, 我們有

$$\begin{bmatrix} b_{n+2}\\ b_{n+1}\\ b_n\end{bmatrix}=\frac{1}{a}\begin{bmatrix} c & qb+ra & rb\\ b & c-pb & ra\\ a & b-pa & c-qa-pb\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n\\ a_{n-1}\\ a_{n-2}\end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{bmatrix} c & qb+ra & rb\\ b & c-pb & ra\\ a & b-pa & c-qa-pb\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_2 & b_3-pb_2 & rb_1\\ b_1 & b_2-pb_1 & rb_0\\ b_0 & b_1-pb_0 & rb_{-1}\end{bmatrix}.$$

證明: 我們利用數學歸納法證明。當 $n=0$ 時,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}\begin{bmatrix} c & qb+ra & rb\\ b & c-pb & ra\\ a & b-pa & c-qa-pb\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0\\ a_{-1}\\ a_{-2}\end{bmatrix}&=\frac{1}{a}\begin{bmatrix} c & qb+ra & rb\\ b & c-pb & ra\\ a & b-pa & c-qa-pb\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\\ &=\frac{1}{a}\begin{bmatrix} ca\\ ba\\ a^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c\\ b\\ a\end{bmatrix}\end{aligned}$$

假設對所有 $n\le k$ 原命題皆成立。則 $n=k+1$, 我們有

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} b_{k+3}\\ b_{k+2}\\ b_{k+1}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} pb_{k+2}+qb_{k+1}+rb_k\\ pb_{k+1}+qb_k+rb_{k-1}\\ pb_k+qb_{k-1}+rb_{k-2}\end{bmatrix} = p\begin{bmatrix} b_{k+2}\\ b_{k+1}\\ b_k\end{bmatrix}+q\begin{bmatrix} b_{k+1}\\ b_k\\ b_{k-1}\end{bmatrix}+r\begin{bmatrix} b_k\\ b_{k-1}\\ b_{k-2}\end{bmatrix}\\
&=\frac{1}{a}\begin{bmatrix} c & qb+ra & rb\\ b & c-pb & ra\\ a & b-pa & c-qa-pb\end{bmatrix}\left(p\begin{bmatrix} a_k\\ a_{k-1}\\ a_{k-2}\end{bmatrix}+q\begin{bmatrix} a_{k-1}\\ a_{k-2}\\ a_{k-3}\end{bmatrix}+r\begin{bmatrix} a_{k-2}\\ a_{k-3}\\ a_{k-4}\end{bmatrix}\right)\\
&=\frac{1}{a}\begin{bmatrix} c & qb+ra & rb\\ b & c-pb & ra\\ a & b-pa & c-qa-pb\end{bmatrix}\begin{bmatrix} pa_k+qa_{k-1}+ra_{k-2}\\ pa_{k-1}+qa_{k-2}+ra_{k-3}\\ pa_{k-2}+qa_{k-3}+ra_{k-4}\end{bmatrix}\\
&=\frac{1}{a}\begin{bmatrix} c & qb+ra & rb\\ b & c-pb & ra\\ a & b-pa & c-qa-pb\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{k+1}\\ a_k\\ a_{k-1}\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

當矩陣爲 $[b_{-n}\ b_{-n-1}\ b_{-n-2}]^T$ $(n\ge 0)$, 類似作法對 n 做數學歸納法可證明原命題對負整數亦成立。 $\square$

爲了方便, 以後的討論裡我們一律將 $\begin{bmatrix} b_2 & b_3-pb_2 & rb_1\\ b_1 & b_2-pb_1 & rb_0\\ b_0 & b_1-pb_0 & rb_{-1}\end{bmatrix}$ 記爲 A。

有定理 6 的幫助, 我們就可以將 $\{b_n\}$ 與其 S-矩陣 Q 聯繫再一起。

定理7. 對任意整數 n,

$$\begin{bmatrix} b_{n+2} & qb_{n+1}+rb_n & rb_{n+1}\\ b_{n+1} & qb_n+rb_{n-1} & rb_n\\ b_n & qb_{n-1}+rb_{n-2} & rb_{n-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & qb+ra & rb\\ b & c-pb & ra\\ a & b-pa & c-qa-pb\end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q & r\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^n = AQ^n \tag{3.1}$$

證明: 由定理 6,

$$\begin{bmatrix} b_{n+2} & qb_{n+1}+rb_n & rb_{n+1}\\ b_{n+1} & qb_n+rb_{n-1} & rb_n\\ b_n & qb_{n-1}+rb_{n-2} & rb_{n-1}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{a}\begin{bmatrix} c & qb+ra & rb \\ b & c-pb & ra \\ a & b-pa & c-qa-pb \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n & qa_{n-1}+ra_{n-2} & ra_{n-1} \\ a_{n-1} & qa_{n-2}+ra_{n-3} & ra_{n-2} \\ a_{n-2} & qa_{n-3}+ra_{n-4} & ra_{n-3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{a}\begin{bmatrix} c & qb+ra & rb \\ b & c-pb & ra \\ a & b-pa & c-qa-pb \end{bmatrix}\cdot a\begin{bmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

$$= \begin{bmatrix} c & qb+ra & rb \\ b & c-pb & ra \\ a & b-pa & c-qa-pb \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = AQ^n. \qquad \square$$

[**註**]: 第二節中提到的 $\{a_n\}$ 也適用於定理 7, 因此定理 7 可適用於任何初始值 $b_0 \neq 0$ 的常係數三次遞迴數列 $\{b_n\}$。實際上, 若 $b_0 = 0$, 只要構造一個新的數列 $c_n = b_{n+k}$ 使得 $c_0 = b_k \neq 0$, 則定理 7 就可以適用於 $\{c_n\}$, 之後只要再換回 $\{b_n\}$ 即可。

例: 若數列 $\{h_n\}$ 滿足

$$h_{n+3} = h_{n+2} + h_{n+1} + h_n,\ h_0 = 0,\ h_1 = h_2 = 1,$$

我們可以令 $\hat{h}_n = h_{n-1}$, 則 $\hat{h}_0 = \hat{h}_1 = 1$, $\hat{h}_{-1} = 0$, 定理 7 就可以應用在 $\{\hat{h}_n\}$ 上, 之後在用 $\hat{h}_n = h_{n-1}$ 換回 $\{h_n\}$。

定理 8. 對任意整數 n,

$$\det\begin{pmatrix} b_n & b_{n+1} & b_{n+2} \\ b_{n-1} & b_n & b_{n+1} \\ b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ b_{-1} & b_0 & b_1 \end{pmatrix} r^{n-1}.$$

證明: 對 (3.1) 取行列式可得

$$\det\begin{pmatrix} b_{n+2} & qb_{n+1}+rb_n & rb_{n+1} \\ b_{n+1} & qb_n+rb_{n-1} & rb_n \\ b_n & qb_{n-1}+rb_{n-2} & rb_{n-1} \end{pmatrix} = (\det A)r^n,$$

等式左邊可改寫爲

$$\det\begin{pmatrix} b_{n+2} & qb_{n+1}+rb_n & rb_{n+1} \\ b_{n+1} & qb_n+rb_{n-1} & rb_n \\ b_n & qb_{n-1}+rb_{n-2} & rb_{n-1} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} b_{n+2} & rb_n & rb_{n+1} \\ b_{n+1} & rb_{n-1} & rb_n \\ b_n & rb_{n-2} & rb_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= r^2 \det \begin{pmatrix} b_{n+2} & b_n & b_{n+1} \\ b_{n+1} & b_{n-1} & b_n \\ b_n & rb_{n-2} & b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

第二行與第一行對調, 第三行再與第二行對調可得

$$\det \begin{pmatrix} b_{n+2} & qb_{n+1}+rb_n & rb_{n+1} \\ b_{n+1} & qb_n+rb_{n-1} & rb_n \\ b_n & qb_{n-1}+rb_{n-2} & rb_{n-1} \end{pmatrix} = r^2 \det \begin{pmatrix} b_n & b_{n+1} & b_{n+2} \\ b_{n-1} & b_n & b_{n+1} \\ b_{n-2} & rb_{n-1} & b_n \end{pmatrix}.$$

而等式右邊中

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} b_2 & b_3-pb_2 & rb_1 \\ b_1 & b_2-pb_1 & rb_0 \\ b_0 & b_1-pb_0 & rb_{-1} \end{pmatrix} = r\det \begin{pmatrix} b_2 & b_3-pb_2 & b_1 \\ b_1 & b_2-pb_1 & b_0 \\ b_0 & b_1-pb_0 & b_{-1} \end{pmatrix}$$
$$= r\det \begin{pmatrix} b_2 & b_3 & b_1 \\ b_1 & b_2 & b_0 \\ b_0 & b_1 & b_{-1} \end{pmatrix}$$

第三行與第二行對調, 第二行在再與第一行對調可得

$$\det(A) = r\det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ b_{-1} & b_0 & b_1 \end{pmatrix}。$$

故

$$r^2 \det \begin{pmatrix} b_n & b_{n+1} & b_{n+2} \\ b_{n-1} & b_n & b_{n+1} \\ b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \end{pmatrix} = r\det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ b_{-1} & b_0 & b_1 \end{pmatrix} \cdot r^n,$$

即

$$\det \begin{pmatrix} b_n & b_{n+1} & b_{n+2} \\ b_{n-1} & b_n & b_{n+1} \\ b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ b_{-1} & b_0 & b_1 \end{pmatrix} \cdot r^{n-1}. \qquad \square$$

定理9. 對任意整數 m 及 n,

$$b_{m+n} = \frac{1}{a}[b_m a_n + qb_{m-1}a_{n-1} + r(b_{m-2}a_{n-1} + b_{m-1}a_{n-2})].$$

證明: 由 (3.1) 知

$$AQ^{m+n}=\begin{bmatrix} b_{m+n+2} & qb_{m+n+1}+rb_{m+n} & rb_{m+n+1} \\ b_{m+n+1} & qb_{m+n}+rb_{m+n-1} & rb_{m+n} \\ b_{m+n} & qb_{m+n-1}+rb_{m+n-2} & rb_{m+n-1} \end{bmatrix}.$$

再一次由 (3.1) 及 (2.1), 上式左方可寫成

$$\begin{aligned} AQ^{m+n} &= (AQ^m)Q^n \\ &= \begin{bmatrix} b_{m+2} & qb_{m+1}+rb_m & rb_{m+1} \\ b_{m+1} & qb_m+rb_{m-1} & rb_m \\ b_m & qb_{m-1}+rb_{m-2} & rb_{m-1} \end{bmatrix} \frac{1}{a} \begin{bmatrix} a_n & qa_{n-1}+ra_{n-2} & ra_{n-1} \\ a_{n-1} & qa_{n-2}+ra_{n-3} & ra_{n-2} \\ a_{n-2} & qa_{n-3}+ra_{n-4} & ra_{n-3} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a} \begin{bmatrix} b_{m+2} & qb_{m+1}+rb_m & rb_{m+1} \\ b_{m+1} & qb_m+rb_{m-1} & rb_m \\ b_m & qb_{m-1}+rb_{m-2} & rb_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n & qa_{n-1}+ra_{n-2} & ra_{n-1} \\ a_{n-1} & qa_{n-2}+ra_{n-3} & ra_{n-2} \\ a_{n-2} & qa_{n-3}+ra_{n-4} & ra_{n-3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} b_{m+n+2} & qb_{m+n+1}+rb_{m+n} & rb_{m+n+1} \\ b_{m+n+1} & qb_{m+n}+rb_{m+n-1} & rb_{m+n} \\ b_{m+n} & qb_{m+n-1}+rb_{m+n-2} & rb_{m+n-1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a} \begin{bmatrix} b_{m+2} & qb_{m+1}+rb_m & rb_{m+1} \\ b_{m+1} & qb_m+rb_{m-1} & rb_m \\ b_m & qb_{m-1}+rb_{m-2} & rb_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n & qa_{n-1}+ra_{n-2} & ra_{n-1} \\ a_{n-1} & qa_{n-2}+ra_{n-3} & ra_{n-2} \\ a_{n-2} & qa_{n-3}+ra_{n-4} & ra_{n-3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

比較等式兩邊矩陣 (3,1) 元素可得

$$b_{m+n}=\frac{1}{a}[b_m a_n + qb_{m-1}a_{n-1} + r(b_{m-2}a_{n-1}+b_{m-1}a_{n-2})]. \qquad \square$$

假設 α,β,γ 爲 Q 的特徵值, $V(\alpha,\beta,\gamma)$ 爲 $\alpha,\beta\gamma$ 的 Vandermonde 矩陣

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Chen 和 Louck [2] 給出了以下等式

$$Q^n V(\alpha,\beta,\gamma) = V(\alpha,\beta,\gamma) D(\alpha^n,\beta^n,\gamma^n)$$

其中 $D(\alpha^n,\beta^n,\gamma^n)$ 爲對角矩陣。將上式完整寫出來, 我們可以得到

$$\begin{bmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{n+2} & \beta^{n+2} & \gamma^{n+2} \\ \alpha^{n+1} & \beta^{n+1} & \gamma^{n+1} \\ \alpha^n & \beta^n & \gamma^n \end{bmatrix}.$$

這個等式提供我們一個將具有三個相異特徵值的 3 階遞迴式的一般式用矩陣表示出來的方法。

定理10. 令 $\{a_n\}$ 滿足遞迴式 $a_{n+3}=pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n$,
其初始條件爲 $a_{-2}=a_{-1}=0$, $a_0=a\neq 0$。若 Q 具有三個相異的特徵值, 則

$$a_n=-a\Big[\frac{\alpha^{n+2}(\beta-\gamma)+\beta^{n+2}(\gamma-\alpha)+\gamma^{n+2}(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}\Big].$$

證明: 因爲 α,β,γ 相異, $V(\alpha,\beta,\gamma)$ 爲可逆矩陣, 則 Q^n 可被 $V(\alpha,\beta,\gamma)$ 對角化, 即

$$\begin{bmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

直接計算可知

$$V(\alpha,\beta,\gamma)^{-1}=\frac{-1}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}\begin{bmatrix} \beta-\gamma & \gamma^2-\beta^2 & \beta\gamma(\beta-\gamma) \\ \gamma-\alpha & \alpha^2-\gamma^2 & \gamma\alpha(\gamma-\alpha) \\ \alpha-\beta & \beta^2-\alpha^2 & \alpha\beta(\alpha-\beta) \end{bmatrix}.$$

於是由 (2.1),

$$\begin{bmatrix} a_n & qa_{n-1}+ra_{n-2} & ra_{n-1} \\ a_{n-1} & qa_{n-2}+ra_{n-3} & ra_{n-2} \\ a_{n-2} & qa_{n-3}+ra_{n-4} & ra_{n-3} \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

$$=\frac{-a}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}\begin{bmatrix} \alpha^{n+2} & \beta^{n+2} & \gamma^{n+2} \\ \alpha^{n+1} & \beta^{n+1} & \gamma^{n+1} \\ \alpha^n & \beta^n & \gamma^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta-\gamma & \gamma^2-\beta^2 & \beta\gamma(\beta-\gamma) \\ \gamma-\alpha & \alpha^2-\gamma^2 & \gamma\alpha(\gamma-\alpha) \\ \alpha-\beta & \beta^2-\alpha^2 & \alpha\beta(\alpha-\beta) \end{bmatrix}$$

比較等式兩邊矩陣 (1,1) 的元素可得

$$a_n=-a\Big[\frac{\alpha^{n+2}(\beta-\gamma)+\beta^{n+2}(\gamma-\alpha)+\gamma^{n+2}(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}\Big]. \qquad \square$$

[**註**]: 定理10的結果一般都用 $\{a_n\}$ 的特徵方程式來處理。

藉由將定理10證明中最後得到的矩陣乘上 A, 我們可以將定理 10 的 $\{a_n\}$ 擴展到一般的三階遞迴數列 $\{b_n\}$。

推論 11.

$$\begin{bmatrix} b_{n+2} & qb_{n+1}+rb_n & rb_{n+1} \\ b_{n+1} & qb_n+rb_{n-1} & rb_n \\ b_n & qb_{n-1}+rb_{n-2} & rb_{n-1} \end{bmatrix}$$
$$=\frac{-1}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}A\begin{bmatrix} \alpha^{n+2} & \beta^{n+2} & \gamma^{n+2} \\ \alpha^{n+1} & \beta^{n+1} & \gamma^{n+1} \\ \alpha^n & \beta^n & \gamma^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta-\gamma & \gamma^2-\beta^2 & \beta\gamma(\beta-\gamma) \\ \gamma-\alpha & \alpha^2-\gamma^2 & \gamma\alpha(\gamma-\alpha) \\ \alpha-\beta & \beta^2-\alpha^2 & \alpha\beta(\alpha-\beta) \end{bmatrix}.$$

在第二節曾提過, 前面得到的一些恆等式可與二階遞迴數列的情況做對應, 現在我們將其列出, 茲比較如下:

三階遞迴數列	二階遞迴數列
$\begin{bmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n=\frac{1}{a}\begin{bmatrix} a_n & qa_{n-1}+ra_{n-2} & ra_{n-1} \\ a_{n-1} & qa_{n-2}+ra_{n-3} & ra_{n-2} \\ a_{n-2} & qa_{n-3}+ra_{n-4} & ra_{n-3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\frac{1}{a}\begin{bmatrix} x_n & x_{n+1} \\ x_{n-1} & dx_{n-2} \end{bmatrix}$
$\det\begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & a_{n+2} \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}=a^3r^n$	$\det\begin{pmatrix} x_n & x_{n+1} \\ x_{n-1} & x_n \end{pmatrix}=a^2(-d)^n$
$a_{m+n}=\frac{1}{a}[a_ma_n+qa_{n-1}a_{m-1}$ $+r(a_{n-2}a_{m-1}+a_{n-1}a_{m-2})]$	$x_{m+n}=\frac{1}{a}(x_nx_m+dx_{n-1}x_{m-1})$
$\begin{bmatrix} b_{n+2} \\ b_{n+1} \\ b_n \end{bmatrix}=\frac{1}{a}\begin{bmatrix} c & qb+ra & rb \\ b & c-pb & ra \\ a & b-pa & c-qa-pb \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{bmatrix}=\frac{1}{a}\begin{bmatrix} b & ra \\ a & b-ca \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} b_{n+2} & qb_{n+1}+rb_n & rb_{n+1} \\ b_{n+1} & qb_n+rb_{n-1} & rb_n \\ b_n & qb_{n-1}+rb_{n-2} & rb_{n-1} \end{bmatrix}$ $=\begin{bmatrix} c & qb+ra & rb \\ b & c-pb & ra \\ a & b-pa & c-qa-pb \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n$	$\begin{bmatrix} y_{n+1} & dy_n \\ y_n & dy_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b & ad \\ a & b-ca \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$
$\begin{vmatrix} b_n & b_{n+1} & b_{n+2} \\ b_{n-1} & b_n & b_{n+1} \\ b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ b_{-1} & b_0 & b_1 \end{vmatrix}r^{n-1}$	$\begin{vmatrix} y_n & y_{n+1} \\ y_{n-1} & y_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix}(-d)^{n-1}$

四、Padovan 數列及其他數列

這一節中, 我們將用第二節及第三節中的工具並利用 Cayley-Hamilton 定理來導出一些 Padovan 數列的性質, 這些性質中有些是 [11] 的推廣, 有些是我們新的結果。

[**註**]: 注意到此節中關於 Padovan 數列的討論, 我們得到的所有等式的做法皆可以應用在 Perrin 數 (見 [8]) 上, 因爲 Perrin 數 $\{R_n\}$ 滿足遞迴關係

$$R_{n+3}=R_{n+1}+R_n,\quad R_0=3,\ R_1=0,\ R_2=2,$$

只有初始值與 Padovan 數列不同, 但有相同的遞迴式。

關於 Padovan 數列及 Perrin 數近年已有一些結果: Yilmaz 及 Bozkurt [12], [13] 利用 Hessenbergs 矩陣的 permanent 將 Perrin 數及 Padovan 數列表示出來並做出一些與 Padovan 數列有關的新結果; Leonard 及 Liu [8] 用生成函數求得 Perrin 數的封閉表達式並用基礎的方法得到一個 Perrin 數的數論性質。我們雖然也是用矩陣方法處理 Padovan 數列, 但方向與 Yilmaz 及 Bozkurt 不同, 因此得到的結果也不一樣。

首先, 我們先介紹一些 Padovan 數列已知的結果 [11]:

(a) $P_{n+5}=P_{n+4}+P_n$,

(b) $P_{n+5}-2=\sum\limits_{k=0}^{n}P_k=P_0+P_1+\cdots+P_n$,

(c) $P_{2n+3}-1=\sum\limits_{k=0}^{n}P_{2k}=P_0+P_2+\cdots+P_{2n}$,

(d) $P_{2n+4}-1=\sum\limits_{k=0}^{n}P_{2k+1}=P_1+P_3+\cdots+P_{2n+1}$,

(e) $P_{3n+2}=\sum\limits_{k=0}^{n}P_{3k}=P_0+P_3+\cdots+P_{3n}$,

(f) $P_{3n+3}-1=\sum\limits_{k=0}^{n}P_{3k+1}=P_1+P_4+\cdots+P_{3n+1}$,

(g) $P_{3n+4}-1=\sum\limits_{k=0}^{n}P_{3k+2}=P_2+P_5+\cdots+P_{3n+2}$,

(h) $P_{5n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}P_{5k}$,

Padovan 數列對應的 Q 及 A 爲

$$Q=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&1&0\end{bmatrix},$$

特別地在這一節裡 Padovan 數列的 $A = Q^4$。因 Q 的特徵多項式爲

$$x^3 - x - 1 = 0$$

故由 Cayley-Hamilton 定理有

$$Q^3 = Q + I. \tag{4.1}$$

稍微對 (4.1) 做些調整, 可以得到幾個與 (4.1) 等價的等式

$$I = Q(Q^2 - I) = Q(Q + I)(Q - I), \tag{4.2}$$
$$= Q(Q^3(Q - I)) = Q^4(Q - I)) = Q^4(Q - I) = Q^5 - Q^4. \tag{4.3}$$

由 (4.3) 知 $Q^5 = Q^4 + I$, 等式兩邊同乘上 AQ^n 得

$$AQ^{n+5} = AQ^{n+4} + AQ^n.$$

利用 (3.1), 並比較等式兩邊矩陣 (3,1) 的元素可得

$$P_{n+5} = P_{n+4} + P_n$$

於是我們得到了前面提過的已知結果(a)$-\{P_n\}$ 的另一遞迴關係。

定理 12. 對任意整數 n,

$$P_{n+5} = P_{n+4} + P_n.$$

定理 13. 對任意整數 n,

$$\det \begin{pmatrix} P_n & P_{n+1} & P_{n+2} \\ P_{n-1} & P_n & P_{n+1} \\ P_{n-2} & P_{n-1} & P_n \end{pmatrix} = 1.$$

證明: 因爲 $\det A = 1$, 由定理 8 可得

$$\det \begin{pmatrix} P_n & P_{n+1} & P_{n+2} \\ P_{n-1} & P_n & P_{n+1} \\ P_{n-2} & P_{n-1} & P_n \end{pmatrix} = \det(A) \cdot 1^{n-1} = 1. \qquad \square$$

定理 14. 對任意整數 m 及 n

$$P_{m+n+5} = P_{m+2}P_{n+1} + P_{m+1}P_{n+2} + P_mP_n.$$

證明: 由 (3.1), 對所有整數 k 都有

$$AQ^k=\begin{bmatrix} P_{k+2} & P_{k+1}+P_k & P_{k+1}\\ P_{k+1} & P_k+P_{k-1} & P_k\\ P_k & P_{k-1}+P_{k-2} & P_{k-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_{k+2} & P_{k+3} & P_{k+1}\\ P_{k+1} & P_{k+2} & P_k\\ P_k & P_{k+1} & P_{k-1}\end{bmatrix}$$

則

$$\begin{aligned} AQ^{m+n+4} &= A^2Q^{m+n}=(AQ^m)(AQ^n)\\ &= \begin{bmatrix} P_{m+2} & P_{m+3} & P_{m+1}\\ P_{m+1} & P_{m+2} & P_m\\ P_m & P_{m+1} & P_{m-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{n+2} & P_{n+3} & P_{n+1}\\ P_{n+1} & P_{n+2} & P_n\\ P_n & P_{n+1} & P_{n-1}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

另一方面

$$AQ^{m+n+4}=\begin{bmatrix} P_{m+n+6} & P_{m+n+7} & P_{m+n+5}\\ P_{m+n+5} & P_{m+n+6} & P_{m+n+4}\\ P_{m+n+4} & P_{m+n+5} & P_{m+n+3}\end{bmatrix}.$$

比較矩陣 (2,1) 的元素可得待證等式。 □

定理 15. 對任意正整數 n 及整數 r,

$$P_r=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P_{n+r+2k}.$$

證明: 由 (4.2)

$$I=I^n=Q^n(Q^2-I)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}Q^{n+2k}.$$

等式兩邊同乘 AQ^r 可得

$$AQ^r=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}AQ^{n+r+2k}.$$

利用 (3.1) 改寫上式, 並比較等式兩邊矩陣的 (3,1) 元素可得

$$P_r=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P_{n+r+2k}.$$ □

定理 16. 對任意正整數 n 及整數 r,

$$P_r=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P_{4n+r+k}.$$

證明: 由 (4.3)

$$I = Q^{4n}(Q-I)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}Q^{4n+k}.$$

等式兩邊同乘 AQ^r 可得

$$AQ^r = AQ^{4n+r}(Q-I)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}AQ^{4n+r+k}.$$

利用 (3.1) 改寫上式, 並比較等式兩邊矩陣的 (3,1) 元素可得

$$P_r = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P_{4n+r+k}.$$ □

定理15及定理16中, 分別令 $r=0$, 我們可以得到以下推論:

推論 17.
(a) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P_{n+2k}=1$,
(b) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P_{4n+k}=1$.

定理 18. 對任意正整數 n 及整數 l 和 r,

$$P_{(l+3)n+r} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P_{ln+r+k}.$$

證明: 在 (4.1) 的等式兩邊同乘 Q^l 可得

$$Q^{l+3} = Q^{l+1} + Q^l.$$

兩邊同取 n 次方, 則

$$Q^{(l+3)n} = (Q^{l+1}+Q^l)^n = Q^{ln}(Q+I)^n = Q^{ln}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Q^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Q^{ln+k}.$$

兩邊再同乘 AQ^r 並將 (4.1) 代入, 比較兩邊矩陣的 (3,1) 元素即得證。 □

定理 19. 對任意正整數 n 及整數 l 和 r,

$$P_{(l+5)n+r} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P_{ln+r+4k}.$$

證明: 由 (4.3) 有 $Q^5 = Q^4 + I$, 剩下的步驟與定理 16 類似, 故省略。

定理 20. 對任意正整數 n 及整數 r

$$P_{n+r+5}-P_{r+4}=\sum_{k=0}^{n} P_{r+k}.$$

證明: 考慮 $(Q-I)^{-1}(Q^{n+1}-I)=Q^n+Q^{n+1}-I)=Q^n+Q^{n-1}+\cdots+I$。由 (4.2) 及 (4.1) 可知 $(Q-I)^{-1}=Q(Q+I)=Q^4$, 代入上式得

$$Q^{n+5}-Q^4=Q^n+Q^{n-1}+\cdots+I.$$

兩邊同乘 AQ^r 後將 (3.1) 代入, 比較兩邊矩陣的 (3,1) 元素即得證。 □

定理20中令 $r=0$, 就可以得到 Padovan 數列的性質 (b)。

定理 21. 對任意正整數 n 及整數 r

$$P_{2n+r+3}-P_{r+1}=\sum_{k=0}^{n} P_{r+2k}.$$

證明: 考慮 $(Q^2-I)^{-1}(Q^{2(n+1)}-I)=Q^{2n}+Q^{2(n-1)}+\cdots+Q^2+I$。由 (4.2) 顯然有 $(Q^2-I)^{-1}=Q$, 從而

$$Q^{2n+3}-Q=Q^{2n}+Q^{2(n-1)}+\cdots+I.$$

兩邊同乘 AQ^r 後, 用與定理18同樣的做法及得證。
定理21中, 若令 $r=0$ 及 $r=1$, 分別可以得到 Padovan 數列的性質 (c) 及 (d)。 □

定理 22. 對任意正整數 n 及整數 r

$$P_{3n+r+2}-P_{r-1}=\sum_{k=0}^{n} P_{r+3k}.$$

證明: 考慮 $(Q^3-I)^{-1}(Q^{3(n+1)}-I)=Q^{3n}+Q^{3(n-1)}+\cdots+Q^3+I$。由 (4.1) 顯然有 $(Q^3-I)^{-1}=Q^{-1}$。接下來用與證定理 18 類似的方法即可得證。 □

定理22中, 若令 $r=0$、$r=1$ 及 $r=2$, 分別可以得到 Padovan 數列的性質 (e)、(f) 及 (g)。

定理 23. 對任意正整數 n 及整數 r

$$P_{5n+r+1}-P_{r-4}=\sum_{k=0}^{n} P_{r+5k}.$$

證明: 考慮 $(Q^5-I)^{-1}(Q^{5(n+1)}-I)=Q^{5n}+Q^{5(n-1)}+\cdots+Q^5+I$。由 (4.3) 顯然有 $(Q^5-I)=Q^{-4}$。接下來用與證定理18類似的方法即可得證。 □

定理 23 中, 若令 即可得 Padovan 數列的性質 (h)。

致謝 感謝中研院數學所暑期組合數學與圖論專題提供機會, 讓筆者能在暑假跟隨美國內華達大學數學系薛昭雄教授做暑期研究, 也由衷感謝薛昭雄教授的指導及鼓勵, 因爲薛教授適時的鼓勵及建議本文才能完稿。

參考文獻

1. P. Barry, Symmetric third-order recurring sequences, Chebyshev polynomials, and Riordan array, *J. Integer Sequences* **12**(2009), Article 09.8.6.
2. William Y. C. Chen, J. D. Louck, The combinatorial power of the companion matrix, *Linear Algebra Appl.* **232**(1996), pp.261-278.
3. L. Comtet, *Advanced Combinatorics*, D. Reidel, Dordrecht, 1974.
4. J. Feng, More identities on the Tribonacci numbers, *Ars Combinatoria* **100**(2011), pp.73-78.
5. H. W. Gould, A history of the Fibonacci Q-matrix and a higher-dimensional problem, **The Fibonacci Quarterly 19**(1981), No.3, pp.250-257.
6. K. Hoffman and R. Kunze, *Linear Algebra* (2nd edition), Prentice-Hall, Inc. , Englewood Cliffs, New Jersey, 1961.
7. T. Koshy, Fibonacci matrices, In: *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, John Wiley & Sons, Inc. , New York, 2001, pp.362-386.
8. I. E. Leonard, A. C. F. Liu, A familiar recurrence occurs again, *Amer. Math. Monthly*, **119**(2012), pp.333-336.
9. A. G. Shannon, A.F. Horadam, Some properties of third-order recurrence relations, *The Fibonacci Quarterly* **10**(1972), No.2, pp.135-146.
10. M. E. Waddill, Using matrix techniques to establish properties of a generalized Tribonacci sequence, In: *Application of Fibonnaci Numbers*, Vol 4, G.E. Bergun etal, Eds., Kluwer Acad. Publishers, Holland, 1993, pp.299-308.
11. http://en.wikipedia.org/wiki/Padovan_sequence
12. F. Yilmaz, D. Bozkurt, Hessenberg matrices and the Pell and Perrin numbers, *J. Number Theory*, **131** (2011), pp.1390-1396.
13. F. Yilmaz, D. Bozkurt, Some properties of Padovan sequence by matrix method, *Ars Combinatoria*, **104** (2012), pp.149-160.
14. 林鈺傑, Fibonacci Q-Matrix 在遞迴數列上的延伸和其應用, 數學傳播 36 卷第二期 (2012), pp.52-63.

—本文作者爲交通大學應用數學系學生—