

組合恆等式 $\sum_k \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = 4^n$ 的兩個證明

林延輯

摘要: 從生成函數的考慮, 我們得到組合公式 $\sum_k \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = 4^n$ 。因此我們尋找該式的組合證明, 將兩邊看成是路徑數目問題, 並將 Sved 文章 [4, 5] 中所提之對應清楚寫出。

一、前言

在組合數學中, 我們考慮下列生成函數:

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} z^n, \quad (1)$$

其各項係數為中央二項式係數 $a_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ 。由於

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{2n(2n-1)}{n^2} a_{n-1} = \frac{4n-2}{n} a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

所以得到遞迴關係: $na_n = (4n-2)a_{n-1}$ 。比較 z^{n-1} 的係數, 可以得到

$$\begin{aligned} F'(z) &= 4(zF(z))' - 2F(z) = 4zF'(z) + 2F(z) \\ (\ln F(z))' &= \frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{2}{1-4z} = -\frac{1}{2}(\ln(1-4z))' \end{aligned}$$

加上初始條件 $F(0) = \binom{0}{0} = 1$, 我們得到生成函數 $F(z)$ 的形式:

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} z^n = \frac{1}{\sqrt{1-4z}}. \quad (2)$$

現在利用無窮級數的卷積 (convolution product) 公式, 寫出下面的等式:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} 4^n z^n &= \frac{1}{1-4z} = (F(z))^2 \\ &= \left(\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} z^n \right)^2 = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} \right) z^n. \end{aligned} \quad (3)$$

比較 (3) 式中 z^n 的係數, 就可得到以下的組合恆等式:

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = 4^n, \quad n \geq 0. \quad (4)$$

在組合數學中, 我們往往會尋求恆等式的組合證明, 亦即將等式兩邊分別看成兩種不同的計數方式, 並建構這兩種計數方式之間的一對一對應關係。在 Stanley 的書 [2] 的第一章習題中就列了這道題目。P. Erdős 指出這道恆等式的組合證明問題在 1930 年代就由匈牙利數學家 P. Veress 所提出, 而 G. Hoyas 提供了解法。De Angelis 在 [1] 中也提出了一個較新的證明。

我們所考慮的物件, 會是平面上的捷徑問題: 從原點 $O = (0, 0)$ 出發, 每次前進的向量為 $U = (1, 1)$ 或是 $D = (1, -1)$ 。如圖 1 就是這樣的一條路徑, 我們把它記為 UDDUUUDUDDUU。

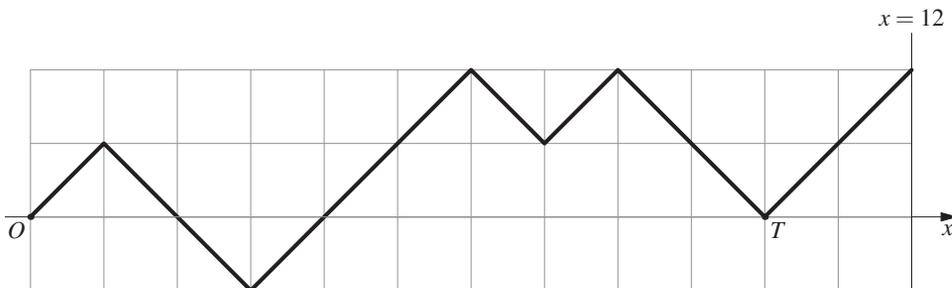


圖 1: 路徑的例子:UDDUUUDUDDUU

首先我們觀察 (4) 式的右邊, $4^n = 2^{2n}$ 可以看成是由 $(0, 0)$ 出發, 到達 $x = 2n$ 的路徑總數。如果我們把每一條到達 $x = 2n$ 的路徑以它最後接觸 x 軸的地方作切割, 如圖 1 上的 T 點, 由此路徑被分成前後兩段: 前一段是由 $(0, 0)$ 走到 $(2k, 0)$ 的路徑, 因為剛好有 k 個 U 和 k 個 D 作不盡相異物的排列, 其方法數為 $\frac{(2k)!}{k!k!} = \binom{2k}{k}$; 而後一段是從 $(2k, 0)$ 走到直線 $x = 2n$ 、除了出發點外全程不碰觸 x 軸的路徑。於是由組合的基本乘法與加法原理, 並且與 (4) 式比較, 再透過坐標軸的平移, 我們將目標轉化為:

定理 1. 由 $(0, 0)$ 走到直線 $x = 2n$ 、除了出發點外全程不碰觸 x 軸的路徑數為 $\binom{2n}{n}$ 。

當此定理得證，原來的組合公式 (4) 也就跟著得證了。本文的以下各小節，將給出定理 1 兩種不同的證明。由其中我們可以看出組合數學各種不同的風貌。

二、遞迴關係式之證明

在本節中我們考慮定理 1 的一個遞迴關係式的證明。我們知道這些由 $(0, 0)$ 出發走到直線 $x = 2n$ 、除了出發點外全程不碰觸 x 軸的路徑，其第一步是 U 或 D，即決定了該路徑完全在 x 軸的上方或是完全在 x 軸的下方；而對 x 軸鏡射可知這兩類路徑的個數一樣多；令 a_n 為其中一類的路徑總數。

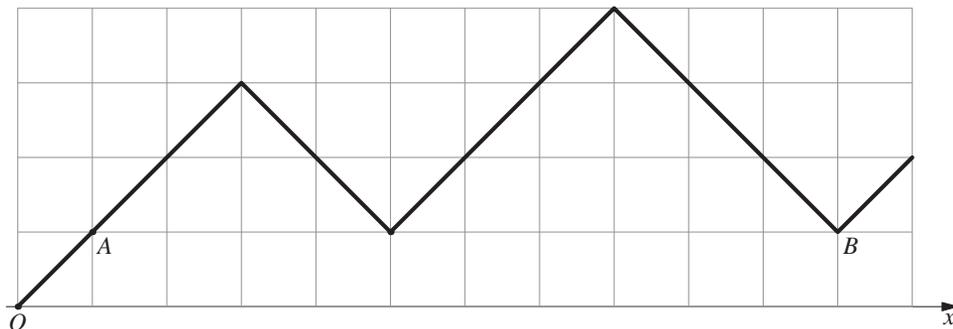


圖 2: 不碰觸 x 軸的路徑

固定看第一步為 U 的路徑，如圖 2。這樣的路徑，第一步必定到達點 $A(1, 1)$ 。從遞迴的角度來考慮，如果路徑已經走到了直線 $x = 2n$ ，在大部分狀況下其後兩步都可以是 UU, UD, DU, DD 四種之一（共有 $4a_n$ 種方法），但必須扣除原來到達 $y = 2$ 的水平線後連走 DD 的走法；此處相當於是從 A 到 B 後不能接 D（也就是一定得接 U）。由 A 走到 B 的路徑即為 Dyck 路徑，也就是從 $A(1, 1)$ 出發走到點 $B(2n + 1, 1)$ ，每步都是 U 或 D，但不落到水平線 $y = 1$ 下方的路徑；其方法數即為著名的 Catalan 數 $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ （有關 Catalan 數的組合意義，請參考 Stanley 的著作 [3]，其中的習題 6.19 中列出了 66 種情形）。所以我們可以寫出以下的遞迴關係式：

$$a_{n+1} = 4a_n - C_n, \quad n \in \mathbb{N}; \quad a_1 = 1. \quad (5)$$

於是我們想要證明的是： a_n 的一般項公式為 $a_n = \frac{1}{2} \binom{2n}{n}$ 。

令 $b_n = \left[\frac{1}{2} \binom{2n}{n} \right]^{-1} \cdot a_n$ 。其初始值為 $b_1 = 1$ ，而由 (5) 式可得 b_n 需滿足的遞迴式：

$$\frac{2n+1}{n+1} b_{n+1} = 2b_n - \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad b_1 = \frac{a_1}{\frac{1}{2} \binom{2}{1}} = 1. \quad (6)$$

就是前後兩段的接點。如此轉換之後的路徑有以下兩個特徵：第一是第一步與最後一步必定往下 (D)；第二是整條路徑必定不會到 x 軸的上方。我們將具有這兩個特徵的路徑稱為第三種路徑。

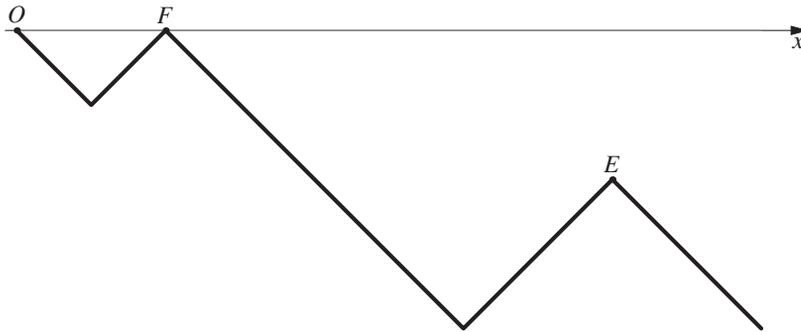


圖 4：轉換成第三種路徑：DUDDDDUUDD

上述轉換的反變換可以由下述方式獲得：將路徑一步一步由最後往前處理，把向上的一步 (U) 換成向下 (D)，並把向下的一步換成向上，直到整條路徑向上與向下的步數相同為止；該停止處即為分割點：將分割點之後的路徑上下互換並且由後往前走，再將原路徑的前一段接著走完。容易驗證此方式的確給出了原轉換的反變換，由此建立了此兩類路徑的對射，並且得知此兩類路徑的數目相同。

如此獲得的第三種路徑，如果除了出發點外不碰觸 x 軸的話，它就是第二種路徑。不然的話，我們還需要再作一次轉換。以圖 4 的路徑為例， F 點是路徑上非原點的最後一個在 x 軸的點。將此路徑自 F 點割開，然後將前一段直接接到後一段的尾巴，成為一條新的路徑，如圖 5 所示。

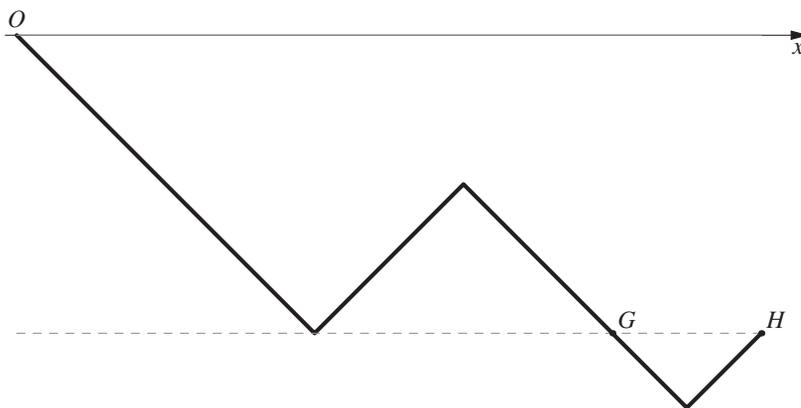


圖 5：再轉換成第二種路徑：DDDDUDDDU

如此經過第二次轉換後，必定得到第二種路徑，並且其第一步必為 D、最後一步必為 U。

此轉換的反變換可敘述如下：考慮第二種路徑中最後一步是 U 的路徑；過其終點作一條水平線（如圖 5 中的虛線），把路徑中由後往前、完全不超過此水平線的最大部分（如圖 5 中的 G 點到 H 點）直接搬到路徑的開頭，即得一條第三種的路徑，並且易知此變換的確是第三種路徑到第二種路徑的反變換。綜上所述，我們就建立了第一種與第二種路徑之間的對射，而定理 1 的組合式證明也就成立了。

誌謝

本文作者想在此謝謝薛昭雄教授在本文寫作形成期間所給予作者許多的鼓勵與提攜。另外作者也感謝審查者所指出的各項修正意見，使本文更加通順流暢。

參考資料

1. Valerio De Angelis, *Pairings and signed permutations*, Amer. Math. Monthly **113** (2006), no. 7, 642–644. MR2252934
2. Richard P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Vol. 1*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, With a foreword by Gian-Carlo Rota, Corrected reprint of the 1986 original. MR1442260 (98a:05001)
3. Richard P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 62, Cambridge University Press, Cambridge, 1999, With a foreword by Gian-Carlo Rota and appendix 1 by Sergey Fomin. MR1676282 (2000k:05026)
4. Marta Sved, *Counting and recounting*, Math. Intelligencer **5** (1983), no. 4, 21–26. MR746893 (85g:05013)
5. Marta Sved, *Counting and recounting: the aftermath*, Math. Intelligencer **6** (1984), no. 4, 44–45. MR762059 (86f:05016)

—本文作者任教國立台灣師範大學數學系—

International Conference on Nonlinear Analysis: Boundary Phenomena for Evolutionary PDE

日期：2014 年 12 月 20 日 (星期六) ~ 2014 年 12 月 24 日 (星期三)

地點：台北市大安區羅斯福路四段 1 號 天文數學館

詳見中研院數學所網頁 <http://www.math.sinica.edu.tw>