數學傳播 37卷4期, pp. 94-96

各邊相等的球內接多邊形的兩個性質

吳 波

文 [1]證明了正三角形和正五邊形的兩個性質。因兩者形式一致, 下面我們只敘述正五邊形的性質:

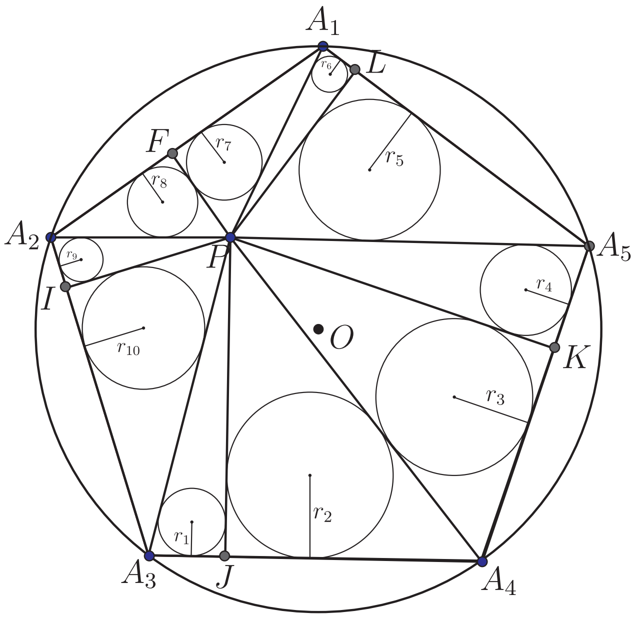

圖 1

如圖1所示, 點 P 爲正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 內一點且由點 P 向各邊作垂線得到的垂足都在各邊內, 設點 P 在五邊上的垂足分別爲 F、I、J、K、L, 連結 PA_1、PA_2、PA_3、PA_4、PA_5, 則正五邊形被分成 10 個直角三角形。設這些直角三角形的內切圓半徑分別爲 r_1、r_2、...、r_{10}, 則有如下兩個結論:

(1) $A_1F+A_2I+A_3J+A_4K+A_5L=FA_2+IA_3+JA_4+KA_5+LA_1$;

(2) $r_1+r_3+r_5+r_7+r_9=r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}$。

本文擬將這兩個結論推廣到一般情形。

上面 (1) 式中的“$A_1F+A_2I+A_3J+A_4K+A_5L$” 實質上是向量 $\overrightarrow{A_1P}$、$\overrightarrow{A_2P}$、$\overrightarrow{A_3P}$、$\overrightarrow{A_4P}$、$\overrightarrow{A_5P}$ 分別在 $\overrightarrow{A_1A_2}$、$\overrightarrow{A_2A_3}$、$\overrightarrow{A_3A_4}$、$\overrightarrow{A_4A_5}$、$\overrightarrow{A_5A_1}$、上的射影之和。注意到這一點, 我們就能將其推廣爲:

性質 1: 球 O 的內接 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各邊相等, P 爲空間中任一點。則向量 $\overrightarrow{A_1P}$、$\overrightarrow{A_2P}$、$\cdots$、$\overrightarrow{A_{n-1}P}$、$\overrightarrow{A_nP}$ 分別在 $\overrightarrow{A_1A_2}$、$\overrightarrow{A_2A_3}$、$\cdots$、$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$、$\overrightarrow{A_nA_1}$ 上的射影之和等於 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的半周長。

證明: 不妨設各邊相等的球 O 的內接 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的邊長爲 1, 則 $\overrightarrow{A_1A_2}$、$\overrightarrow{A_2A_3}$、$\cdots$、$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$、$\overrightarrow{A_nA_1}$ 均爲單位向量。

注意到 $\triangle OA_1A_2$ 中有 $OA_1=OA_2$, 所以向量 $\overrightarrow{A_1O}$ 在 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 上的射影爲邊長 A_1A_2 的一半, 即 $\overrightarrow{A_1O}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}=\dfrac{1}{2}$。同理有 $\overrightarrow{A_2O}\cdot\overrightarrow{A_2A_3}=\dfrac{1}{2}$, $\overrightarrow{A_3O}\cdot\overrightarrow{A_3A_4}=\dfrac{1}{2}$, $\cdots$, $\overrightarrow{A_nO}\cdot\overrightarrow{A_nA_1}=\dfrac{1}{2}$。

因此有 $\overrightarrow{A_1O}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2O}\cdot\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_nO}\cdot\overrightarrow{A_nA_1}=\dfrac{n}{2}$。

又, $\overrightarrow{OP}$ 在 $\overrightarrow{A_1A_2}$、$\overrightarrow{A_2A_3}$、$\cdots$、$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$、$\overrightarrow{A_nA_1}$ 上的射影之和爲 $\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_nA_1})=\overrightarrow{OP}\cdot\vec{0}=0$。

所以
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2P}\cdot\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_nP}\cdot\overrightarrow{A_nA_1}\\&=(\overrightarrow{A_1O}+\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{A_1A_2}+(\overrightarrow{A_2O}+\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+(\overrightarrow{A_nO}+\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{A_nA_1}\\&=\overrightarrow{A_1O}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2O}\cdot\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_nO}\cdot\overrightarrow{A_nA_1}+\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_nA_1})=\frac{n}{2}.\end{aligned}$$

即: 向量 $\overrightarrow{A_1P}$、$\overrightarrow{A_2P}$、$\cdots$、$\overrightarrow{A_nP}$ 分別在 $\overrightarrow{A_1A_2}$、$\overrightarrow{A_2A_3}$、$\cdots$、$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$、$\overrightarrow{A_nA_1}$ 上的射影之和等於 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的半周長。 □

同理可證: 向量 $\overrightarrow{A_1P}$、$\overrightarrow{A_2P}$、$\cdots$、$\overrightarrow{A_{n-1}P}$、$\overrightarrow{A_nP}$ 分別在 $\overrightarrow{A_1A_n}$、$\overrightarrow{A_2A_1}$、$\cdots$、$\overrightarrow{A_{n-1}A_{n-2}}$、$\overrightarrow{A_nA_{n-1}}$ 上的射影之和也等於 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的半周長。

由此即可得:

推論: 球 O 的內接 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 各邊相等, P 爲空間中任一點。則向量 $\overrightarrow{A_1P}$、$\overrightarrow{A_2P}$、$\cdots$、$\overrightarrow{A_{n-1}P}$、$\overrightarrow{A_nP}$ 分別在 $\overrightarrow{A_1A_2}$、$\overrightarrow{A_2A_3}$、$\cdots$、$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$、$\overrightarrow{A_nA_1}$ 上的射影之和等於它們分別在 $\overrightarrow{A_1A_n}$、$\overrightarrow{A_2A_1}$、$\cdots$、$\overrightarrow{A_{n-1}A_{n-2}}$、$\overrightarrow{A_nA_{n-1}}$ 上的射影之和。

這樣, 我們就將 (1) 式推廣到了一般情形。

結合上述推論我們就可推得:

性質 2 : 球 O 的內接 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各邊相等, P 爲空間中一點且點 P 在 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各邊所在直線上的射影都落在各邊之內。設點 P 在此 n 邊形各邊上的射影依次

爲 P_1、P_2、$\cdots$、P_n。連結 PA_1、PA_2、$\cdots$、PA_n 和 PP_1、PP_2、$\cdots$、PP_n, 則這 $2n$ 條線段和 n 邊形的 n 條邊可以圍成 $2n$ 個直角三角形。設這 $2n$ 個直角三角形的內切圓半徑依次爲 r_1、r_2、$\cdots$、r_{2n}, 則有: $r_1+r_3+r_5+\cdots+r_{2n-1}=r_2+r_4+r_6+\cdots+r_{2n}$。

性質 2 的證明與文 [1] 對 (2) 式的證明完全類似, 因此本文略去。

滿足性質2 "在 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各邊所在直線上的射影都落在各邊之內" 這個條件的點 P 是一定存在的。事實上, 過 A_i、A_{i+1}分別作直線 A_iA_{i+1} 的垂面 α_i、β_i, 則滿足條件的點 P 必在平行平面 α_i、β_i 之間 ($i=1,2,3,\ldots,n$, 這裡約定 $A_{n+1}=A_1$)。又, 平行平面 α_i、β_i 之間的距離即是 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的邊長, 則球心 O 到它們的距離都爲邊長之半。所以這 n 對平行平面所圍成的區域存在一個以點 O 爲球心以 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的邊長之半爲半徑的內切球。這表明這個區域是非空的, 因此點 P必定存在。

参考資料

1. 劉步松, 正三角形和正五邊形的兩個性質, 數學傳播, 第36卷1期 (2012), pp.93-96。

—本文作者任教重慶市長壽龍溪中學—