數學傳播 37卷4期, pp. 84-93

圓內接奇數邊多邊形的正弦定律

李輝濱

I. 前言

三角形的正弦定律是三角函數、幾何學及測量學領域中必備的基本數學知識。此定律成立的主要原因之一是任意一個三角形必內接於一圓。根據此特徵來探討圓內接多邊形是否也具有相同類似的正弦關係式? 經分析研究後, 發現所有圓內接奇數邊多邊形的幾何結構都具有這種完美、簡明比例的正弦定律公式! 然而圓內接偶數邊多邊形的情形則尚未被發掘出有相同類型的比例式。奇數邊形與偶數邊形在幾何與數學性質的內涵及形式上確實有許多差異。

本研究內容是將凸多邊形的內角分配成偶數標內角集合及奇數標內角集合兩部分, 再以設定一個角度修正參數作爲媒介來聯繫這兩集合, 據此推證出平面凸多邊形的正弦、餘弦關係式。更有甚之, 進而發現圓內接奇數邊多邊形的完美比例型正弦定律一般化公式!全篇內文中詳盡的觀察對照、歸納分析及推理演繹的探索脈絡, 在以下正文敍述中將完整的呈現出來, 請仔細參閱。

II. 本文

A. 平面凸多邊形的向量性質

任給一個平面凸 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$, 令 $\overline{A_1A_2}=V_1$, $\overline{A_2A_3}=V_2$, $\overline{A_3A_4}=V_3$, $\ldots$, $\overline{A_{n-1}A_n}=V_{n-1}$, $\overline{A_nA_1}=V_n$。由幾何的向量運算觀點, 此平面凸 n 邊形即爲 $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{V_3}$, $\ldots$, $\overrightarrow{V_n}$ 等 n 個向量按序箭頭接箭尾相加而成的封閉凸 n 邊形。依向量加法性質知;

$$\sum_{m=1}^{n}\overrightarrow{V_m}=0=\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)\vec{i}+\sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)\vec{j}$$

θ_m 爲 V_m 在直角座標平面上的方位角。再由平面正交座標系性質知;

$$\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)=0 \qquad 且 \qquad \sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)=0$$

引理 1. 任給一個平面凸 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$, 令 $\overline{A_1A_2}=V_1$, $\overline{A_2A_3}=V_2$, $\overline{A_3A_4}=V_3$, $\ldots$, $\overline{A_{n-1}A_n}=V_{n-1}$, $\overline{A_nA_a}=V_n$。將頂點 A_1 置於直角座標平面上的原點 O 處, 使 $\overline{A_1A_2}$ 邊完全重疊並貼置於 X 軸, 以使此 n 邊形落在第 1 及第 2 象限區域內 (含 X 軸), 如下圖 1,

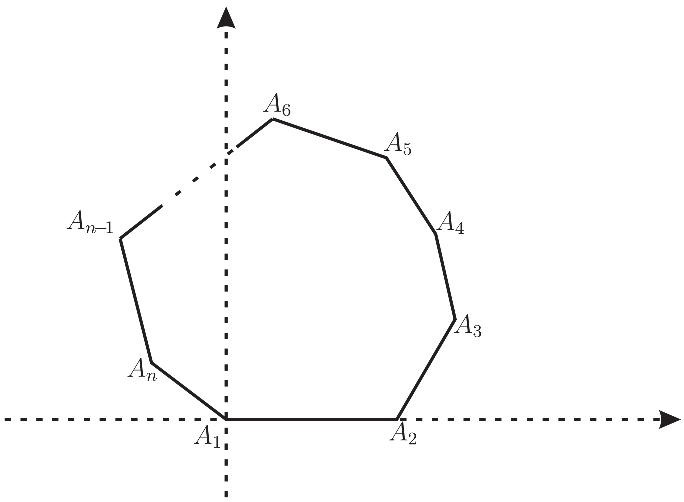

圖 1: 凸 n 邊形

則下列由此凸 n 邊形各邊長及各內角所形成的兩關係式恆成立:

$$V_1=\sum_{m=2}^{n}(-1)^m V_m\cos\Big(\sum_{j=2}^{m}A_j\Big) \tag{1}$$

且

$$\sum_{m=2}^{n}(-1)^m V_m\sin\Big(\sum_{j=2}^{m}A_j\Big)=0 \tag{2}$$

證明: 由圖 1 知凸 n 邊形的內角依次爲 A_1, A_2, $A_3,\cdots,A_n$, 故 V_1 的方位角 θ_1 爲零, V_2 的方位角 θ_2 爲 $\pi-A_2$, V_3 的方位角 θ_3 爲 $\pi-A_2+\pi-A_3,\ldots,V_n$ 的方位角 θ_n 爲 $(n-1)\pi-(A_2+A_3+A_4+\cdots+A_n)$。將這 n 個方位角全部代入以下方程式中;

$$\sum_{m=1}^{n}(V_m\cos\theta_m)=0 \qquad \text{且} \qquad \sum_{m=1}^{n}(V_m\sin\theta_m)=0$$

再經運算、化簡後即得 (1) 式、(2) 式。

引理 2. 平面凸 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$, 其所有內角的總和恰爲 $(n-2)\pi$。

證明: 略。

引理 3. 半徑 R 的圓周上任一弦長 V, $V<2R$, 與此弦長 V 所相關聯對應的圓周角爲 θ, 則

下述關係式必恆成立; $V=2R\sin\theta$。

證明: 略 。

引理 4. 圓內接偶數邊 ($2n+2$ 邊) 多邊形, 其 $2n+2$ 個內角中, 下式恆成立

$$\sum_{k=1}^{n+1} A_{2k}=\sum_{k=1}^{n+1} A_{2k-1}=n\pi. \tag{3}$$

證明: 由下圖 2、圖 3 知

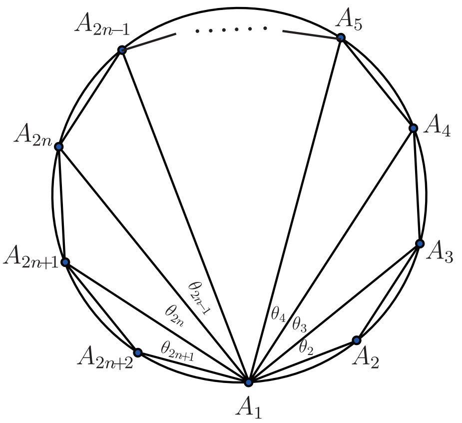

圖 2

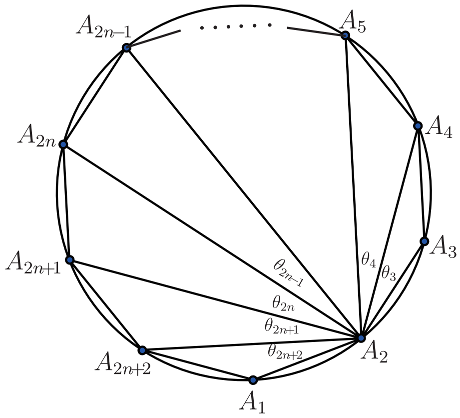

圖 3

$$\begin{aligned}
A_1&=\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_{2n+1}=\pi-\theta_{2n+2}-\theta_1\\
A_2&=\theta_3+\theta_4+\cdots+\theta_{2n+2}=\pi-\theta_1-\theta_2\\
A_3&=\theta_4+\theta_5+\cdots+\theta_1=\pi-\theta_2-\theta_3\\
A_4&=\theta_5+\theta_6+\cdots+\theta_2=\pi-\theta_3-\theta_4\\
&\vdots\\
A_{2n+1}&=\theta_{2n+2}+\theta_1+\cdots+\theta_{2n-1}=\pi-\theta_{2n}-\theta_{2n+1}\\
A_{2n+2}&=\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{2n}=\pi-\theta_{2n+1}-\theta_{2n+2}
\end{aligned}$$

詳細觀察上述所有的內角內容結構, 很容易得證出

$$\sum_{k=1}^{n+1} A_{2k}=\sum_{k=1}^{n+1} A_{2k-1}=n\pi.$$

現在要利用這四個引理來推導圓內接奇數邊多邊形的正弦定律一般化公式。

B. 平面凸四邊形的正弦、餘弦方程式 與 圓內接四邊形的正弦、餘弦方程式

(B-1). 首先, 以 $n=4$ 代入引理 1 中的方程式 (1)、(2), 即得平面凸四邊形的下列兩式;

$$V_2 \sin A_2 - V_3 \sin(A_2+A_3) + V_4 \sin(A_2+A_3+A_4) = 0 \tag{1'}$$

$$V_1 = V_2 \cos A_2 - V_3 \cos(A_2+A_3) + V_4 \cos(A_2+A_3+A_4) \tag{2'}$$

其次, 由引理 2 將此兩式化簡成下式;

$$V_2 \sin A_2 - V_3 \sin(A_2+A_3) - V_4 \sin A_1 = 0 \tag{4-1}$$

$$V_1 = V_2 \cos A_2 - V_3 \cos(A_2+A_3) + V_4 \cos A_1 \tag{4-2}$$

(B-2). 將平面凸四邊形的四個內角分配成偶數標內角集合及奇數標內角集合兩部分, 再選取 ϕ 爲輔助角度修正參數, 並令

$$A_1 + A_3 = \pi + \phi \tag{4-3}$$

$$A_2 + A_4 = \pi - \phi \tag{4-4}$$

將 (4-3) 式、(4-4) 式代入 (4-1) 式, 經化簡運算得下式;

$$V_2 \sin(\phi + A_4) - V_3 \sin(\phi + A_4 - A_3) + V_4 \sin(\phi - A_3) = 0$$

將此式展開後提出 sin、cos 如下

$$\begin{aligned}&\sin\phi[V_2\cos A_4 - V_3\cos(A_4-A_3) + V_4\cos A_3]\\&\quad + \cos\phi[V_2\sin A_4 - V_3\sin(A_4-A_3) - V_4\sin A_3] = 0\end{aligned} \tag{4-5}$$

又將 (4-3) 式、(4-4) 式代入 (4-2) 式, 經化簡運算得下式;

$$\begin{aligned}V_1 &= -V_2\cos(\phi+A_4) + V_3\cos(\phi+A_4-A_3) - V_4\cos(\phi-A_3)\\&= \sin\phi[V_2\sin A_4 - V_3\sin(A_4-A_3) - V_4\sin A_3]\\&\quad + \cos\phi[-V_2\cos A_4 + V_3\cos(A_4-A_3) - V_4\cos A_3]\end{aligned} \tag{4-6}$$

聯立解出方程式 (4-5) 式與 (4-6) 式, 得下述結果;

$$V_1 \sin\phi = V_2 \sin A_4 - V_3 \sin(A_4 - A_3) - V_4 \sin A_3 \tag{4-7}$$

$$V_1 \cos\phi = -V_2 \cos A_4 + V_3 \cos(A_4 - A_3) - V_4 \cos A_3 \tag{4-8}$$

(B-3). 再由 (4-4) 式 $A_2 + A_4 = \pi - \phi$, 經三角運算可得下列結果;

$$\sin\phi = \sin(A_2 + A_4) \qquad \text{及} \qquad \cos\phi = -\cos(A_2 + A_4),$$

以此兩者代入(4-7)、(4-8), 得

$$V_1\sin(A_2+A_4)=V_2\sin A_4-V_3\sin(A_4-A_3)-V_4\sin A_3 \tag{4-9}$$

$$V_1\cos(A_2+A_4)=V_2\cos A_4-V_3\cos(A_4-A_3)+V_4\cos A_3 \tag{4-10}$$

以上 (4-9) 式與 (4-10) 式爲 平面凸四邊形的正弦方程式及餘弦方程式。

(B-4). 圓內接四邊形的正弦、餘弦方程式

當一個四邊形內接於一圓, 其 $A_2+A_4=\pi$, 則 (4-9) 式與 (4-10) 式變成下式;

$$V_2\sin A_4-V_3\sin(A_4-A_3)-V_4\sin A_3=0 \tag{4-11}$$

$$V_1+V_2\cos A_4-V_3\cos(A_4-A_3)+V_4\cos A_3=0 \tag{4-12}$$

以上 (4-11) 式與 (4-12) 式爲圓內接四邊形的正弦方程式及餘弦方程式。

C. 平面凸五邊形的正弦、餘弦方程式 與 圓內接五邊形的正弦、餘弦方程式

(C-1). 仿效前述 (B-1) 的演算過程, 取 $n=5$ 代入引理 1 中的方程式 (1)、(2), 即得平面凸五邊形的下列兩式;

$$V_2\sin A_2-V_3\sin(A_2+A_3)+V_4\sin(A_5+A_1)-V_5\sin A_1=0 \tag{5-1}$$

$$V_1=V_2\cos A_2-V_3\cos(A_2+A_3)-V_4\cos(A_5+A_1)+V_5\cos A_1 \tag{5-2}$$

(C-2). 仿效 (B-2) 並令

$$A_1+A_3+A_5=\frac{3}{2}\pi+\phi \tag{5-3}$$

$$A_2+A_4=\frac{3}{2}\pi-\phi \tag{5-4}$$

將 (5-3) 式、(5-4) 式代入 (5-1) 式, 經化簡, 運算後得下式;

$$\begin{aligned}&\cos\phi[-V_2\cos A_4+V_3\cos(A_4-A_3)-V_4\cos A_3+V_5\cos(A_3+A_5)]\\&\quad+\sin\phi[V_2\sin A_4-V_3\sin(A_4-A_3)-V_4\sin A_3+V_5\sin(A_3+A_5)]=0\end{aligned} \tag{5-5}$$

同理, 又將 (5-3) 式、(5-4) 式代入 (5-2) 式, 經化簡, 運算後得下式;

$$\begin{aligned}V_1=&\sin\phi[-V_2\cos A_4+V_3\cos(A_4-A_3)-V_4\cos A_3+V_5\cos(A_3+A_5)]\\&-\cos\phi[V_2\sin A_4-V_3\sin(A_4-A_3)-V_4\sin A_3+V_5\sin(A_3+A_5)]\end{aligned} \tag{5-6}$$

聯立解方程式 (5-5) 式與 (5-6) 式, 得到下述結果;

$$V_1\sin\phi=-V_2\cos A_4+V_3\cos(A_4-A_3)-V_4\cos A_3+V_5\cos(A_3+A_5) \tag{5-7}$$

$$V_1\cos\phi=-[V_2\sin A_4-V_3\sin(A_4-A_3)-V_4\sin A_3+V_5\sin(A_3+A_5)] \tag{5-8}$$

(C-3). 再由 (5-4) 式, 經三角運算可得下列結果;

$$\cos\phi = -\sin(A_2 + A_4) \quad \text{及} \quad \sin\phi = -\cos(A_2 + A_4),$$

以此兩者代入(5-7)、(5-8), 得

$$V_1\sin(A_2+A_4)-V_2\sin A_4+V_3\sin(A_4-A_3)+V_4\sin A_3-V_5\sin(A_3+A_5)=0 \qquad (5\text{-}9)$$

$$V_1\cos(A_2+A_4)-V_2\cos A_4+V_3\cos(A_4-A_3)-V_4\cos A_3+V_5\cos(A_3+A_5)=0 \qquad (5\text{-}10)$$

以上 (5-9) 式與 (5-10) 式為平面凸五邊形的正弦方程式及餘弦方程式。

(C-4). 圓內接五邊形的正弦、餘弦方程式

因圓內接五邊形的第 2 內角與第 4 內角和以及第 3 內角與第 5 內角和均沒有特殊定値關係, 故方程式 (5-9) 式與 (5-10) 式亦為圓內接五邊形的正弦方程式及餘弦方程式。

D. 圓內接五邊形的正弦定律

定理 1. 任給一個圓內接五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$, 其半徑為 R, $\overline{A_1A_2} = V_1$, $\overline{A_2A_3} = V_2$, $\overline{A_3A_4} = V_3$, $\overline{A_4A_5} = V_4$, $\overline{A_5A_1} = V_5$, 則下列連續等式必恆成立;

$$\begin{aligned} -2R = (-1)^{\frac{5+1}{2}}2R &= \frac{V_1}{\sin(A_3+A_5)} = \frac{V_2}{\sin(A_4+A_1)} = \frac{V_3}{\sin(A_5+A_2)} \\ &= \frac{V_4}{\sin(A_1+A_3)} = \frac{V_5}{\sin(A_2+A_4)} \end{aligned} \qquad (13)$$

此方程式 (13) 式即為圓內接五邊形的正弦定律。

證明:

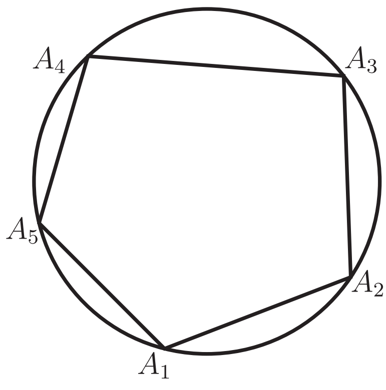

圖 4

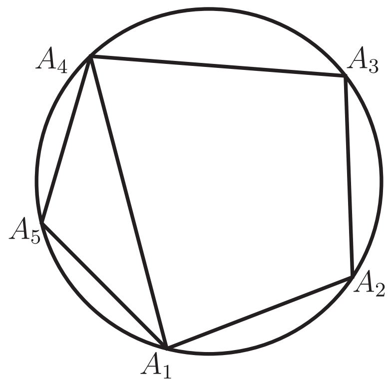

圖 5

(1). 觀察圖 4、圖 5 的圓內接五邊形。今先考慮由 $A_1A_2A_3A_4$ 所形成的圓內接四邊形 (圖 5); 令 $\angle A_1A_4A_5 = \theta$, 則此四邊形的第四邊長 $V_4 = \overline{A_4A_1}$, 而頂點 A_4 位置的四邊形內角應為

$A_4-\theta$, 故 (4-11) 式應修正成

$$V_2\sin(A_4-\theta)-V_3\sin(A_4-\theta-A_3)-\overline{A_4A_1}\sin A_3=0$$

展開上式並提出 sin , cos 整理成下式;

$$\cos\theta[V_2\sin A_4-V_3\sin(A_4-A_3)]+\sin\theta[-V_2\cos A_4+V_3\cos(A_4-A_3)]-\overline{A_4A_1}\sin A_3=0$$

再將此新獲得的方程式各項同乘以 $\overline{A_4A_1}$ 而得到下式;

$$\overline{A_4A_1}\cos\theta[V_2\sin A_4-V_3\sin(A_4-A_3)]+\overline{A_4A_1}\sin\theta[-V_2\cos A_4+V_3\cos(A_4-A_3)] -\overline{A_4A_1}^2\sin A_3=0 \tag{14}$$

(2). 再觀察圖 5, 並比對邊長 A_4A_1 與角度 θ 之關係, 得下列結果 ;

$$\overline{A_4A_1}\cos\theta=V_4-V_5\cos A_5 \tag{15}$$

$$\overline{A_4A_1}\sin\theta=V_5\sin A_5 \tag{16}$$

$$\overline{A_4A_1}^2=V_4^2+V_5^2-2V_4V_5\cos A_5 \tag{17}$$

將此 (15) 式、(16) 式、(17) 式三者同時代入 (14) 式, 再經詳盡的計算、化簡, 最後整理成下列關係式;

$$V_4\sin(A_2+A_4)=V_5\sin(A_2+A_4+A_5)$$

將此式寫成比例型關係式如下;

$$\frac{V_4}{\sin(A_2+A_4+A_5)}=\frac{V_4}{\sin(A_1+A_3)}=\frac{V_5}{\sin(A_2+A_4)} \tag{18}$$

觀察對照 (18) 式與圖 4 中各邊長與相關內角位置的對應關係, 即得正比例型關係式如下;

$$\frac{V_1}{\sin(A_3+A_5)}=\frac{V_2}{\sin(A_4+A_1)}=\frac{V_3}{\sin(A_5+A_2)}=\frac{V_4}{\sin(A_1+A_3)}=\frac{V_5}{\sin(A_2+A_4)} \tag{19}$$

(3). 再利用引理 4 的證明過程, 可得 $A_3+A_5=\pi+\theta_1$ 因而 $\sin(A_3+A_5)=-\sin\theta_1$, 同理, 再得 $\sin(A_4+A_1)=-\sin\theta_2$, $\sin(A_5+A_2)=-\sin\theta_3$, $\sin(A_1+A_3)=-\sin\theta_4$, $\sin(A_2+A_4)=-\sin\theta_5$ 將這五個結果代入 (19) 式並再應用引理 3 的性質, 即得到下式;

$$\frac{V_1}{\sin(A_3+A_5)}=\frac{V_2}{\sin(A_4+A_1)}=\frac{V_3}{\sin(A_5+A_2)}=\frac{V_4}{\sin(A_1+A_3)}=\frac{V_5}{\sin(A_2+A_4)}=-2R. \tag{20}$$

(4). 注意看這方程式 (20) 式, 其比例常數爲 $-2R$; 而衆所知悉的三角形正弦定律比例常數卻爲 $2R$, 是個正值。接下來經繼續演算, 發現圓內接七邊形的正弦定律比例常數爲 $2R$, 圓內

接九邊形的正弦定律比例常數爲 $-2R$; $\cdots$ 持續運算下來, 此比例常數的結果完全呈現出正負變換規律性; 即第 1 類型: 三角形、圓內接七邊形、圓內接十一邊形、圓內接十五邊形、$\cdots$ 等等圓內接奇數邊 n 邊形 $(n = 4k - 1)$ 的情形時, 其比例常數值爲 $2R$。第 2 類型: 圓內接五邊形、圓內接九邊形、圓內接十三邊形、圓內接十七邊形、$\cdots$ 等等圓內接奇數邊 n 邊形 $(n = 4k + 1)$ 的情形時, 其比例常數值爲 $-2R$。因此將 (20) 式改寫成下式;

$$\begin{aligned}-2R = (-1)^{\frac{5+1}{2}}2R &= \frac{V_1}{\sin(A_3+A_5)} = \frac{V_2}{\sin(A_4+A_1)} = \frac{V_3}{\sin(A_5+A_2)}\\ &= \frac{V_4}{\sin(A_1+A_3)} = \frac{V_5}{\sin(A_2+A_4)} \qquad (13)\end{aligned}$$

此方程式 (13) 式即爲圓內接五邊形的正弦定律。定理 1. 證明完成。

(5). 另外觀察圖 4 的圓內接五邊形; 若考慮由 $A_2A_3A_4A_5$ 所形成的圓內接四邊形, 此處的第 1 邊長爲 $V_1 = \overline{A_5A_2}$, 則 (4-11) 式不需修正, 維持原狀並將其代入 (5-9) 式, 化簡後即得下式; $V_1\sin(A_2 + A_4) = V_5\sin(A_3 + A_5)$, 將此式仿效前述 (3) (4) 的運算過程即得出 (13) 式。

E. 圓內接奇數邊多邊形的正弦定律

同理, 倣效圓內接五邊形正弦定律的演算推導過程, 得證出圓內接奇數邊多邊形的正弦定律, 演繹進行時計算過程相當複雜, 省略所有這部分的數學運算流程, 僅就定律的結果呈述如下;

定理 2. 考慮一個圓內接奇數邊多邊形, 其邊數爲 n, $n = 2k + 1$, R 爲此圓的半徑; 則對任何自然數 k, 由此 n 邊形的各邊長與各內角所組成下述的一般化公式 (21) 式必恆成立;

$$\frac{V_t}{\sin\Big(\sum_{j=1}^{\frac14[2(n-t)-1-(-1)^t]} A_{t+2j} + \sum_{j=1}^{\frac14[2t-1+(-1)^t]} A_{2j-\frac{1+(-1)^t}{2}}\Big)} = \Big(-1\Big)^{\frac{n+1}{2}}2R. \qquad (21)$$

此處, $1 \le t \le n$, t 與 j 均爲自然數, V_t 爲此多邊形的第 t 邊邊長, 且規定

$$\sum_{j=1}^{0} A_{t+2j} = 0 \quad , \quad \sum_{j=1}^{0} A_{2j} = 0 \quad , \quad \sum_{j=1}^{0} A_{2j-1} = 0$$

上述方程式 (21) 式即稱爲圓內接奇數邊多邊形的正弦定律一般化公式。

證明: 略。同理, 只要倣效前述圓內接五邊形正弦定律的演算推導過程, 就能得證出圓內接奇數邊多邊形的正弦定律, 建議讀者可親自嚐試挑戰這段演算旅程。

(E-1). 再仔細觀察, 定理 2 的逆命題敍述也是成立的; 只要利用反證法即歸謬法就能證明 (略)。

(E-2). 上述方程式 (21) 式的美妙之處是; (a) 它涵納了三角形正弦定律; 即當 $n=3$ 代入 (21) 式中, 得到三角形正弦定律如下;

$$\frac{V_1}{\sin A_3}=\frac{V_2}{\sin A_1}=\frac{V_3}{\sin A_2}=2R$$

(b) 當 $n=5$ 代入 (21) 式中, 得到圓內接五邊形正弦定律如下;

$$\frac{V_1}{\sin(A_3+A_5)}=\frac{V_2}{\sin(A_4+A_1)}=\frac{V_3}{\sin(A_5+A_2)}=\frac{V_4}{\sin(A_1+A_3)}=\frac{V_5}{\sin(A_2+A_4)}=-2R$$

(c) 當 $n=7$ 代入 (21) 式中, 得到圓內接七邊形正弦定律如下;

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{\sin(A_3+A_5+A_7)}&=\frac{V_2}{\sin(A_4+A_6+A_1)}=\frac{V_3}{\sin(A_5+A_7+A_2)}=\frac{V_4}{\sin(A_6+A_1+A_3)}\\&=\frac{V_5}{\sin(A_7+A_2+A_4)}=\frac{V_6}{\sin(A_1+A_3+A_5)}=\frac{V_7}{\sin(A_2+A_4+A_6)}=2R\end{aligned}$$

(d) 當 n 爲任意奇數邊數的圓內接多邊形, 其正弦定律的正比例型數學方程式都可完整地被敍述出來。而且對任意圓內接奇數邊數多邊形言, 其面積的公式表示式亦都與此正弦定律相關。

以上爲本文整體推理演繹過程, 因爲一般化凸多邊形的結構表示式非常複雜, 必須憑藉毅力, 專注耐心地逐一運算檢驗, 才能完整歸納出所有正確結果。

III. 結論

平面凸 n 邊形的所有內角總和爲 $(n-2)\pi$, 將其所有內角適度地選取內角數目, 組合成兩集合; 當 n 爲偶數, 每一集合的內角總數目取相等。當 n 爲奇數, 每一集合的內角總數目則取相差一個內角。而此時, 每一集合的內角總和值皆可設定爲此 n 邊形的所有內角總和的一半, 再加減一個角度修正參數 ϕ, 而此 ϕ 恰扮演了聯繫本文所有分析、運算流程的關鍵角色! 也因爲它的存在, 才得以推導出一般型平面凸 n 邊形的正弦、餘弦方程式。

在推證圓內接五邊形正弦定律時, 必須以圓內接四邊形的相關方程式來配合證得出比例常數爲負值。而另外在推證圓內接七邊形正弦定律時, 須以圓內接六邊形的相關方程式來配合證得出比例常數爲正值。因此, 在推證一般化圓內接奇數邊 n 邊形 $(n=4k-1)$ 的正弦定律情形時, 必須以圓內接 n 邊形 $(n=4k-2)$ 的相關方程式來配合證得出其比例常數值爲 $2R$。相對地, 在推證圓內接奇數邊 n 邊形 $(n=4k+1)$ 的正弦定律情形時, 必須以圓內接 n 邊形 $(n=4k)$ 的相關方程式來配合證得出其比例常數值爲 $-2R$。最後再由兩類型相關聯的特徵, 統整成推廣的一般化正弦定律方程式 (21) 式。

經多方面實際計算, 發覺將多邊形的所有內角分配成兩部分的組合, 並不侷限於全部偶數標內角及奇數標內角兩情況。可以任意選取所需的組合, 像分別由偶數標內角及奇數標內角混

合成的兩不同組合, 因而得到的相關方程式如 (4-9)、(4-10)、(4-11)、(4-12)、(5-9)、(5-10) 等亦不相同, 這種某些特定選取組合方式對於多邊形分割後的思考運算很有助益。

在平面凸多邊形相關的數學領域中, 應該還有許多有趣的性質存在, 有待大家共同來探索、解析、研究, 以發掘出新主題, 並開創出豐盛佳績。

參考資料

1. 李輝濱, 平面凸五邊形及凸六邊形面積的研究, 數學傳播季刊, 2012 年 3 月, 第 141 期。
2. 蔡聰明, 數學拾貝—星空燦爛的數學, 三民書局。
3. 林聰源, 數學史—古典篇,1995, 凡異出版社。
4. 黃武雄, 中西數學簡史, 1980, 人間文化事業公司。
5. 項武義, 基礎幾何學,2010, 五南圖書出版公司。
6. 項武義, 基礎分析學,2010, 五南圖書出版公司。
7. E. W. Hobson, *A Treatise on Plane and Advanced Trigonometry*, Dover, 1957 .

—本文作者任教嘉義縣同濟中學—