

## 有朋自遠方來——專訪

### Stuart Geman 教授



策劃：劉太平

訪問：劉太平、黃啓瑞

時間：民國 100 年 12 月 8 日

地點：中央研究院數學研究所

整理：陳麗伍、萬萑韻

Stuart Geman 教授, 1949年出生, 1973年 Dartmouth College 生理學碩士, 1977年麻省理工學院博士, 1977年受聘於 Brown University 任教迄今, 2011年獲選美國國家科學院院士。他的研究對電腦視覺、統計、機率論、機械學習和神經科學都有重要貢獻。

劉太平 (以下簡稱「劉」): 首先, 謝謝你來。這趟我們安排的行程讓你辛苦了。

Stuart Geman (以下簡稱「G」): 的確, 但是每一場交流都非常愉快。

劉: 可以稱你為應用數學家?

G: 我自認是科學家, 雖然我的工會卡上清楚的寫著我是數學家, 專長在應用數學。

劉: 所以你主要的目標是想瞭解科學的現象等等。

G: 是, 那一直是我的雄心壯志。

劉: 是什麼讓你選擇數學作為工具?

G: 我覺得需要一個工具, 一個最好的工具來解決當時我奮力想做的事。事實上, 念數學研究所的同時我也是醫學院的學生, 研究大腦和生理學。我有很多想法, 後來證實大部分是無稽的。儘管如此, 要證實無稽還是需要一個強有力的工具——數學。甚且, 在讀生理學以及我覺得與其有關的電腦視覺的文獻時, 感到必須攀過高山才能理解某些切入的方法。要憑著部分的

了解做判斷令我不安，比如說：有些部分非常數學，而且會用到我不熟悉的工具，開始時我的本能反應是忽略它，找個理由說它不重要。我不喜歡這樣，同時覺得必須學會足夠的數學才有辦法追根究柢，確實瞭解做了哪些假設以及假設的意涵。

劉：做科學研究當然還有其它工具可用，不過你選擇了數學，是因為你擅長數學？

G：也許。我無從知曉，何者為因，何者為果。因為擅長所以喜歡；還是因為喜歡所以擅長。我的確選擇了數學，就很多方面來說我愛上了它。

劉：你念小學或是中學的時候數學就很好？其它學科也不錯吧。

G：是，我數學和科學都學得好。

劉：如果沒有做數學，而是成為醫生，那對你也可以嗎？

G：不，我想不行。即使念醫學院<sup>1</sup>，我都沒有想到要當醫生。我一向很愛物理，大學時主修物理也相當投入，可是不知道自己想做什麼，非常掙扎。我學了一些生物，覺得也不錯，又不確定到底要做什麼，念醫學院可以讓我保留最多的選擇，最少的限制。抱著這樣的想法，我上了醫學院。

念醫學院是很美好的經驗，不能說是虛擲光陰。至少它在基礎科學方面的訓練正是我想要的。我沒有一定要成為神經外科醫生或家醫科醫生之類的想法，我想要的是多看、多學科學。那是個與現在非常不同的年代，60年代後期到70年代初期的美國是一塊機會之地，沒有人因為未來而惴惴不安。那時候的美國比起現在的任何地方，包括美國在內都有更多的機會，所以我有天時之利。

劉：我想你有很強的心志。你說只是想多看看，我也這樣做；但是我不會說念醫學院是隨興看看，因為這不是開玩笑的，學醫要投注很多的心力。

G：我同意學醫要花心力。我不確定自己是否真的要這麼投入，應該是對事物好奇的態度以及覺得有花時間探索這些事物的餘裕。我踢到了鐵板。醫學院跟我所做過的任何事都不同。我以為學醫就像是學物理或是數學一樣，凝神靜氣，把每一行公式或理論都弄懂——這是學習的處方。也許會多花些時間，不過很單純，只要把每個步驟都弄懂就好。但是念醫學沒辦法這樣。

當你翻開《格雷氏解剖學》<sup>2</sup>，整整超過一千頁密密麻麻多到嚇人的知識和數據，就是加足馬力也無法讀完。我花了些時間才體會到這點。反而應該要採取比較被動的學習。找間像現今星巴克的咖啡店或是有些活動的地方，既不無聊也不孤單，然後就一頁一頁往下讀，不要劃重點或是記筆記，最起碼對我來說是如此。早也念，晚也念，睡前也念，把解剖學、生理學等

<sup>1</sup>在美國就讀醫學院前通常要先取得學士的學位。

<sup>2</sup>Henry Gray's Anatomy of the Human Body, 作者 Henry Gray, 1858 年出版，是一部英語人體解剖學教科書，解剖學的經典著作之一。

書一頁頁翻過，對我而言整個人浸淫其中比較能吸收。如果想作重點整理，會有劃不完的重點，大概整本書都是，這樣行不通。

劉：是不是可以說你因為這樣的經驗，在某些意義下變得比較客觀，願意接受事件的本身。不像做數學有時候比較主觀。

G：倒不是，不過你的觀察很有趣，實際上我覺得反過來才對。當你從一個領域換到另一個領域，是另一種調整。我認為也許醫學在下述的意義之下是一個極端：你沒辦法從一個肯定的敘述中分辨它所依據的科學有多確實；至少就我所知，這兩件事沒有關聯。醫學文化中的某些東西，起碼在醫學的教育中讓每件事都是確定的。所教的每件事都是確論，我們對它已經了解了。無從察知哪些是可能有絲毫含混的，哪些並不確定，哪些是可能或不可能在其後的實驗中被推翻的。醫學教科書都是以事情就是這樣存在的口吻書寫，而不是以這是我們目前對此事所知來陳述。我花了些時間才養成適度存疑的習慣。

通常看到一個數學裡的定理，它就是一個定理，不會因為時間而改變。我想到許多神經生理學與神經化學的敘述，學的時候我放到腦中，後來又需要拿出來，因為那是錯的！神經生理學的教條一個接著一個被推翻，就連生理學、生物化學、當然基因學也都是如此。我念醫學院時，這些都不複雜，大部分的基因也許被轉譯成蛋白質，蛋白質摺疊形成一個結構而有其功能，清楚明瞭。只有四種核苷酸 (nucleotides) 與 20 來種胺基酸 (amino acids)，蠻簡單的。但事實上完全不是這樣。研究越深，發現越多。這是另一種調整，但也是科學讓人興奮的地方，特別是現在的腦科學。

劉：你的話很讓人鼓舞。你是指生物學中還有些可能的研究方向不僅沒被確認，甚至連想都沒想到。

G：我深信不疑，某方面來說，現在比起從前更是如此。當然我們累積了知識，而且大部分的知識都是真實且不會因為時間而改變，但同時面對的問題似乎也越來越深奧，越來越根本。基因學的基本性質，先天遺傳 (inherent) 與胚胎 (epigenetic)，始終是未解的根本謎團。雖然我大部分神經生理學的同事不會同意，我還是認為我們沒有把握住神經建築 (neuro-architecture) 最基本的宗旨。我們教的和我們看待大腦的方式並沒有抓到重點，我認為那裡面發生的是美的讓人瞠目結舌的事，只有用數學才能最適切地描述它。

劉：我很佩服你清晰、一貫的思維。

G：謝謝，過獎了。

劉：我們可否談談你目前積極參與的活動，你的研究是？

G：回到剛剛的話題，面對科學問題與疑問，在苦苦思索之後，問題最終常以數學描述，起碼這提供了我一種思考的方式，這有時會引進一個數學問題，讓我沉迷其中，而不只是和原先的科學問題有關。當然，你可以想見，我現在的主要研究興趣還是在大腦和神經傳導 (neuro-

circuitry) 的作用。電腦視覺 (computer vision) 是與其相關的問題, 這方面雖然有許多矚目的應用與成果, 但我覺得還沒有真正起飛; 儘管有強大的計算能力, 以及像 Google 等的實例, 但在生物視覺比較沒有進展, 我們的電腦與真正的生物視覺系統相比遠遠不如, 這缺口令人著迷。

這兩個相關的領域把我迷住。同時過去這幾年因為啓瑞引誘我做金融模型, 我得老實承認, 啓瑞給我看的一些資料有顯著的穩定度, 並且顯示出某種量尺性質 (scaling property), 讓我沒辦法不去想。這讓我開始思索什麼是基本的模型 (fundamental models) 和它們的正確性。我們檢視數據, 不只是邊際數據 (marginal data), 而是真正的時間序列數據 (temporal data), 這些模型與數據真的一致? 這也是我眼前的興趣之一。此外, 基因學神祕刺激又有強大的工具, 我忍不住注意它並且和基因領域的人討論。就像 60 年代我們說的, 現在研究基因是大開眼界的經驗。

劉: 視覺很重要, 是因為它是一種要緊的溝通方式? 我真是個門外漢。

G: 有幾個不同的理由讓我覺得它很重要。第一, 它有很明顯的商業上的應用: 從工業自動化到搜尋引擎到各式各樣的保全, 這些已經融入我們的生活, 所以重要。另外, 我覺得現有的大腦和它如何運作的模型有其不足, 視覺正是照見這個不足的一道光, 不容忽視。畢竟大腦是個極佳的視覺系統, 有個說法: 百分之五十、六十、七十的腦部都與視覺相關, 這樣說可要小心, 盲人也用大腦!不過我倒不認為這有不一致的地方。視覺大部分與我們看到的事物的呈現, 以及針對這些呈現的處理有關。但同時, 在感覺皮層中主視覺皮層 (primary visual cortex) 佔了很大的比例, 而視覺的基本路徑是生物系統的一個主要部分。我認為研究視覺是理解神經表示 (neuro-representation) 與神經計算 (neuro-computation) 原理的一扇窗, 所以重要。

劉: 這是大腦與我們溝通的方式?

G: 這對大腦如何傳遞信息給我們極為重要。

劉: 這就像瞭解黑洞或是超新星時要透過電波。

G: 沒錯。

劉: 所以瞭解大腦, 需要先瞭解視覺傳導等。

G: 我相信如此, 由於技術上對電腦視覺的興趣, 比起三、四十年前, 我們更知道視覺問題的困難度, 更清楚瞭解我們對大腦還有什麼不知道的, 你必須知道該問什麼問題。我們如此熟練地運用視覺, 運用語言, 熟練地與人溝通, 我們擅長於發展運動技能 (motor skill) 等等, 卻很難回望自身甚至於很難體認到我們習以為常的事有什麼困難。但是在歷經五十年努力, 嘗試建立一個讓人驚艷的電腦視覺系統, 雖然徹底失敗 (我個人認為), 至少也該讓人們對這個問題為什麼那麼困難有點感覺。

60年代中，當我們對電腦視覺懷抱極其強烈的企圖心，在中心地麻省理工學院的人工智能實驗室 (Artificial Intelligence lab)，卻發生許多意想不到的事。60年代中期，這個人工智能實驗室提出了名為“夏日視覺計畫 (The Summer Vision Project)”的備忘錄。現在是回顧這個計劃的好時機，因為它可以為我們提供對未來的展望。那時候的研究者基本上認為他們已經瞭解智能 (intelligence) 的根本原理，所需要的只是展現智能理論威力的實際演練，因此提出了夏日視覺計畫。他們動員了一隊可以在暑假幫忙的研究生，小心翼翼地透過計畫周延的進度進行為期三個月的研究活動，以建構一個視覺系統。前三分之一的里程碑、中間三分之一、最後三分之一的里程碑都一一規畫好了。不用說，連第一個三分之一都沒有完成，因為沒有人有任何頭緒為什麼這個問題這麼困難，也不知道什麼是計畫中不可或缺的部分。我想也許現在我們知道了，就像前面說的這是照在生物系統與神經系統上的一道更有意思、更令人好奇的光。

劉：所以很困難？我想這問題問得不好。

G：不，不，問的好，我可以就很多層面回答。讓我由最高一層開始，也許對我們而言這是最恰當的地方。就是兩個詞：表現 (representation, 或譯作相) 和計算 (computation)。表現有很豐富的內涵，足以涵蓋架構以及可重複利用的單件的組合。我們從小就學會基本的單元，組合這些單元，口語組成字母，字母組成單字，單字組成句子等。我們的知識也是如此組織而成，同樣地在視覺裏到處都有重複使用的成分，例如：L-交叉和邊界、T-交叉和筆劃以及曲面等等。圓錐狀的物體可以組成椅子的腳、人的腳、桌子的腳。有些圖式或主題也是不停地重複出現。但是最主要的挑戰在於能有一個有效的，在數學上一致的方法來掌握這些表現，能夠掌握不同組合之間的相似性，又能夠衡量因為巧合而成的組成，與真正的組合之間的差異，而真正的組合可以用來針對不同理論上的假設做比較。很困難但我覺得這是關鍵。

我們很容易輕忽影像在局部上可以多麼模糊含混。為了讓兒子信服，我用蘋果電腦從網路上抓了一張客廳的圖，放大許多許多倍，讓他看其中的一小部分，允許他上下左右移動「告訴我你看到了什麼？」他毫無頭緒，無法起步，無法辨認其中任何部分。確實，局部的事物竟然可以如此含混。這說明要認出特定事物我們需要知道其脈絡，沒有脈絡，就看不出其意義，這也是組合架構 (hierarchy of compositions) 切入的地方。

我將一個表現在各層次的脈絡做為一個組件 (component)，另一種組件對數學家就比較容易瞭解。我們來看相關的逆問題，你提供一張圖，要推導出它代表什麼，它的架構，標示它的場景，它是由什麼組成的，例如：房子由窗與磚塊組成；窗子由它的零件組成；磚塊又由不同的原料燒成等，林林總總。要實際計算或解析這個圖像，也就是推演出它的架構，如果正式寫下來，是一個 NP-難題<sup>3</sup> (non-deterministic polynomial-time hard, 不能用多項式時間算出來的難題)。

<sup>3</sup>延伸閱讀可參考本期《數學傳播》文章「談談概率論與其它學科的若干交叉」。

基本上這就是類固醇覆蓋問題 (covering problem on steroids, 覆蓋問題是著名的典型 NP 完全問題之一)。而這個問題說來更糟, 不是這個問題不好, 而是它很難纏, 很難纏。用另一個方式來說, 就是計算必須考慮脈絡, 不能只看局部。所以我們有表現和計算, 而在表現裡又有處理脈絡的問題 (problem of context)。既要完整地呈現, 同時又要能計算, 我們面臨了我哥哥常說的脈絡 — 計算兩難; 一方面人的視覺顯然受脈絡影響, 另一方面, 脈絡顯然是計算的一大挑戰。那麼大腦是怎麼做到的?

劉: 我開始瞭解為什麼你說數學是個強大的工具。我想到一位近親, 一次意外造成他單眼失明。剛開始時, 他連闔上筆蓋都做不到, 但一陣子之後就可以做到。我想這是一個學習的歷程, 他必須整合協調他的動作。所以我們現在談的是一個複雜的問題。

G: 令人讚嘆。他能做到, 這也可以提供我們做研究的一個線索。因為他失去了立體感, 失去了慣用計算距離的能力。但是距離的計算有許多許多線索, 我想他能成功是因為他對世界的基本表現以及其拓樸在這之前都已經有了認知。他有了一個幾乎是實實在在的表現在他的心眼裡, 可以將這個表現對應到筆, 將筆蓋闔上, 所以相對來說是可以做到的。我不會說容易, 因為我確定他有過一番拚搏, 但是是可以做到的, 正是因為依據的基本表現不變。

黃啓瑞 (以下簡稱「黃」): 你選擇麻省理工學院是因為那邊研究人工智能的學者?

G: 沒錯, MIT 對我就像是糖果屋。那裏有這麼多科學, 在我求學時那裏真是個奇妙美好的地方, 有很好的應用數學家 and 幾位出色的純數學家, 除此之外, 還有持續到現在的 HST 學程<sup>4</sup>。HST 學程是麻省理工學院與哈佛醫學院的共同學程, 我喜歡他們教醫學的方式, 所以在哈佛選修了心臟生理學 (cardiac physiology)。我聽過在基礎神經科學領域的 Snyder<sup>5</sup> 講關於大腦嗎啡感受體 (morphine receptors), 那時才剛有點啡 (endorphins, 中文又稱腦內啡) - 內生嗎啡 (endogenous morphine) 的線索, 他後來得到諾貝爾生理醫學獎。我也聽過 Dirac<sup>6</sup> 講宇宙常數 (cosmological constants)。我遇到 Chomsky<sup>7</sup>, 和他有過一段相當長時間的談話。也遇到以人工智慧成名的 Marvin Minsky<sup>8</sup>。對那段時期的我而言, 那是最完美的地方。神經科學家 Jerome Lettvin<sup>9</sup>, 他有絕對卓越的思維。我遇到他, 和他談論, 很榮幸可以跟他互動。所以我覺得自己做了非常好的選擇。

<sup>4</sup>Harvard-MIT Division of Health Sciences and Technology (HST) 是 1970 年開始, 哈佛大學與麻省理工學院一起合作的跨領域教育學程。

<sup>5</sup>Solomon H. Snyder (1938~), 美國神經科學家最有名工作是發現一氧化氮作為一種神經遞質的作用, 以及多巴胺假說來解釋精神分裂症的原因 (與艾倫·霍恩 1971 年提出)

<sup>6</sup>Paul Adrien Maurice Dirac (1902~1984), 英國理論物理學家, 1933 年獲頒諾貝爾物理學獎, 對量子電動力學早期的發展作出重要貢獻。

<sup>7</sup>Avram Noam Chomsky (1928~), 美國語言學家, 被稱為“現在語言學之父”, 他的生成語法被認為是 20 世紀理論語言學研究上的重要貢獻, 他的研究影響領域包含電腦科學、數學和心理學。

<sup>8</sup>Marvin Lee Minsky (1927~), 美國人工智慧領域的認知科學家, 1969 年獲頒圖靈獎, 麻省理工學院人工智慧實驗室的創始人之一。

<sup>9</sup>Jerome Ysroael Lettvin (1920~2011), 美國認知科學家, 以他 1959 年的論文 “What the frog's eye tells the frog's brain” 而為人所知, 這篇文章是美國科學引文索引中被引用最多的文章之一。

黃：你去的時候有沒有什麼目標？有想做的論文題目了嗎？

G：我的確有一個目標，回想起來是有點和別人不一樣。

黃：Herman<sup>10</sup> 說他只是幫你在論文中簽個名，你已經有自己的題目在做。

G：我和他都喜歡回憶我們那一段不尋常但有趣的關係。那時我一直在做神經生理學，實際上在醫學院的時候已經修完神經生理學 (neurophysiology) 的碩士。到麻省理工學院是爲了學足夠的數學，讓我可以徹底瞭解正在探索的模型 — 神經傳導 (neuro-circuitry) 模型，我在數學研究所的同學中因而有些特別。對我來說，學更多數學工具來研究神經生理學，是自然不過的事。我會和教授們討論，記得我和 Dick Dudley<sup>11</sup> 談我在研究中遇到的一些事，他是一位很了不起、功力深厚的機率學家，我也從 Sigurdur Helgason<sup>12</sup> 有意思的分析課中受益良多。但是我從來沒想到要傳統式的找一位指導教授，那根本就不在我的雷達上。

我一直做著自己的神經傳導問題，很滿意能徹底瞭解，得到的結果大致可以寫成一篇論文。這下子得有位指導教授才能拿到博士學位，我只好去敲最自然，可能成爲指導教授的人的門。我的問題與隨機微分方程有關，所以必須是某位做機率或統計的教授，Herman Chernoff 看來是最佳人選；不過也不完全是，他對這個領域沒有特別的興趣，可是我用了某些與他名字相關的工具，他有這方面的知識，看來似乎適合。於是我敲了他的門：「可不可以請您當我的指導教授？」「你是誰？」「我是 Stuart Geman，我寫了篇論文。」然後我把 200 頁的論文放在他桌上，他看了看，再看看我，要我明天再來。他大致看了之後，完全沒有概念，要我講給他聽，我們訂好時間，每次兩小時。那年剛好 Michael Woodroffe<sup>13</sup> 從密西根來訪問，他和 Chernoff 就是我的聽衆。Herman 聽演講時打瞌睡，醒來後問精采問題的本領很出名，我見識了很多次。可是講的時候，一共只有三個人，他打瞌睡，實在很尷尬，我必須不時叫他「Chernoff 教授，Chernoff 教授」，在他醒來之後繼續往下講，如是這般，終於在許多回合之後，他在我的論文中簽名，而且幫我寫了有力的介紹信，讓我在人浮於事的年代得到工作機會。

劉：那是哪一年？

G：1977年。這份情我難以回報。現在我有了完全不同的看法。我沒辦法想像他怎麼可以如此大方。我們每個人或多或少以各種形式完全包裹在自我之中，神經生理學不是他的領域，也沒有在科學層面上真正的瞭解，對我所用的數學也不特別感興趣，而他竟然爲我投入了這麼多的時間，這真是個恩賜。

<sup>10</sup>Herman Chernoff (1923~)，美國應用數學家、統計學家和物理學家，主要研究領域包含大樣本理論，實驗最佳化設計，序列分析，實驗序列設計等。

<sup>11</sup>Richard Mansfield Dudley，美國數學家，以他的研究結果 Dudley entropy integral 而爲人所知。

<sup>12</sup>Sigurdur Helgason (1927~)，冰島裔美國數學家，專長積分幾何和對稱空間一般化。

<sup>13</sup>Michael Woodroffe，統計學家，研究領域爲機率。

黃: Herman 非常慷慨而且謙虛。

G: 謙虛、慷慨, 全方位的不可思議。我謝過他許多許多次, 但是永遠不夠。

劉: 這個故事真美。

黃: 我想問 Chomsky, 語言學中 Chomsky 提出孩童以模組 (modules) 學習語言的理論等, 他的想法對你的思考方式是不是有所影響? 你談到描述大腦時有關如何使用無脈絡 (context free) 或是脈絡敏感 (context sensitive) 的語言等等。

G: 說來我曾經和 Chomsky 有過非常奇特的互動。也就是我敲他的門, 進入他的研究室, 兩人長談了數小時之久。早就風聞了不少他有多難相處的傳言, 但他真是頂尖, 傑出有創見。我多次聽說他是二十世紀被引用最多的學者, 我也如此確信。那個午後的邂逅有許多奇特的地方。

之所以去敲他的門是因為剛好看到他 1960 年代早期的幾篇論文, 列出所謂的 Chomsky 架構 (hierarchy), 這個文法的架構, 下一個包含前一個, 越來越廣, 直到普遍語法 (universal grammar), 這樣的架構讓我驚艷, 好似來自天界的概念, 是我前所未見的, 而且我很訝異它與計算與表現理論可以如此相關。在同時, 我對學習兩種不同領域的方式已有些看法, 例如: 在學醫學時的思考方式和學數學的思考方式並沒什麼差異。雖然表面上看來不同, 但是我還是難以相信, 大腦針對所有不同的挑戰, 能夠有完全分離的解決方案, 我是以這樣的想法去和 Chomsky 見面。我們似乎都同意, 不論我們構築的是什麼樣的表現, 用的是什麼樣的方式計算, 它們必定會跨過認知的邊界; 下棋和做數學或寫作或診斷疾病不可能完全不同, 我到現在都強烈相信這個想法, 我認為這是大腦以它的均質性 (homogeneity) 嘗試教我們的課題。我們愛說大腦的不同區域有多麼不同, 但是在更大程度上, 它們實質上是一模一樣的。大腦的各個部位非常相似, 這是個有力的線索。而 Chomsky 似乎也同意, 看來頗有共鳴。直到今天我仍無法領會他在那天談話中堅持的特別語言單位 (special language module)。顯然, 他的看法有些幽微隱晦的地方, 是我當時還不能理解的。

黃: 你是否認為那些單位在某種意義下是可重複使用的部分?

G: 確實, 我認為架構和重複使用性, 是大自然展現其複雜性的原則 (principles of complexity): 從原子物理到宇宙論, 從原子到分子到複雜的聚合物和蛋白質, 從單核酸到基因以及它們的組合和其組合準則, 這都是重複使用性和架構。我深信不疑, 看不出來怎麼可能不是這樣。

黃: 我記得 90 年代你談到組成 (compositonality) 是自下而上, 而不是像分子原子是自上而下。你是用零件自下而上組成事物。

G: 你是指相較於基本粒子的尋找?



黃：你是由下往上做，從基礎開始建立。

G：應該這樣說，每當有一群足夠多的基本粒子，我們運用它們自下而上建立起系統。我們不停地認識到還有更多的基本粒子，也許終有窮盡的一天，也許現在已經是這樣了，不過我們是有尋找愈來愈多的基本粒子的歷史。各種組成原則 (composition principle) 之間類似，如果衍申一下，把認知和物理放在同一廣度來看，我認為組成的原則很類似。舉例來說目前在視覺上，談到組成的模型，我們必須從相對粗糙的‘基本粒子’開始，它們是已經相當複雜，小小的次場景 (sub-scenes)。粗糙的原因在於計算，我們沒有成千上億像大腦般的非線性計算單元 (computing units)，我們沒有一個系統具有像神經系統般驚人的連結能力。在這個系統裡，每一個處理器可以連結到一萬甚至五萬個其它的處理器，每個連結都可以改變，而且是非線性的。我們做不到。

我們有強大的計算能力，但不是用相同的方式組織而成，因此能做的就受到某些限制。我們從某一層開始，逐漸往上做，建立一個組成的架構。這是通常思考問題時會做的，甚至有時候，實際地嘗試建立一個系統。我絕不會認為，自己一下子就進入恰當的一層。如果去看視網膜，或視網膜之後 (視覺傳導) 的第一站 — 側膝核 (lateral geniculate nucleus)，或是其後在大腦皮層中的主視覺皮層，生理學家在這裡找到了什麼？他們找到了比我們在實驗裡當做基本粒子用的影像斑更基本的‘基本粒子’，基本上他們找到的是小波 (wavelets — 我們通常稱之為 Gabor 濾波器，實際上應該是相同的東西)，代表小波的神經元以及小波的組合。從這層開始才正確，這是比較局部，更為基本的東西。但我們還沒有準備好。

劉：目前大學的數學課程，主修數學的學生要修微積分、線性代數、複分析等等。以你非常不同的生涯路徑，如果重新設計大學的數學課程，你有什麼想法？

G：我一直認為要謹慎，每個人都要謹慎，提到教育，我們很容易落入某種完全由自身利益出發的思維。我們必須置身事外。我從科學、物理、生物獲益匪淺，這些學科形塑了我的思維，同時大學時，我也是頗為認真的數學學生，可以看到數學的美，甚至養成了散步時深思問題的習慣。我覺得上面這些都讓我受益，要做出貢獻，要成就卓越，有許多方法，我不會說主修純數學的學生學了太多數學而少了其它科學，我不會這樣說的原因是我認為無論什麼情形我們都可以從中獲益。

擔任數學系學生導師的時候，我會提醒他們去修一門物理課，或是一門生物化學課，一些實際的、機械的，或甚至計算機迴路的課，讓他們對事物的運作有些概念。我認為很有可能即便是最純的數學也能從中得到啟發。我腦海中的理想人選是 David Mumford<sup>14</sup>，雖然他不再是只限於純數學領域的數學家，他一直對神經生理學以及其應用很感興趣。我認為即使在做純數學的時候，他對事物運作方式的認知以及世界在心中的呈現，對他都有極大的影響。

<sup>14</sup>David Bryant Mumford (1937~)，美國數學家，1974 年菲爾茲獎，2006 年邵逸夫獎，2008 年沃爾夫獎得主，原為哈佛大學教授，1980 年代起將興趣轉移到思維模式、視覺等，1995 年起執教 Brown 大學應用數學系。

他一直是科學的學生，這對他幫助很大。當然也有許多非常有能力，出色的數學家不用物理，甚至對物理毫無感覺，也做得好。

我沒有很強烈的意見。我會給大學生的建議 (我想我給過了)，是 張大眼睛，至少知道自己正在做選擇，在決定將來如何思考，自我的品味以及如何解決問題。我們能做的就是這樣。倒是對於中學教育有些意見，對科學教育或數學教育也許有個太強的意見。我認為對於絕大多數學生，甚至許多將來可能成為數學大師的學生，我們太早教了太多的數學。我想用有趣的、只需要思考但不需要太多知識就可以想的題材，取代第二、第三學期的微積分；甚至以益智遊戲取代第一學期的微積分。有很多思考的、動手的益智遊戲以及各種棋賽等，很適合中學生，這些可以非常難。有許多‘基本的’東西非常具有挑戰性。對於大部分 18、19 歲以下的年輕人，把時間花在這上面更好。

我會這麼說的原因是，至少就我在 Brown 的經驗，大一新生進來的成績讓人印象深刻，學了許多數學，時常是大學程度的，SAT 和 AP 成績很高，但是他們對微積分的瞭解年年下滑。這是一個非常顯著真實的現象，甚至可以量化。他們沒讀懂微積分，也許他們時候還不到，再就是積習難改，不然也不會那麼糟，當你已經習慣於某種學習方式，改變它是個大工程。原因在於錯誤的觀念和錯誤的呈現；一般人為了理解微積分或其它會建構一些自己的架構；面積的觀念或是旋轉曲線得到一個曲面，基本定理和思考時認為是怎麼運作的畫面，如果開始時沒有弄對，接下來會很困難。一、二年之後再學似乎就比較容易，那時候他們比較可以接受。

我不是說微積分簡單。我同意你有天晚上提到的：教微積分是很好的，而且會提醒自己它有多難，尤其是第二和第三學期的微積分。不過我認為 學生如果準備好了，可以學得更好。因為他們已經可以接受，學起來更有效率。這是我對於教育僅有的強烈意見。我認為教育的各種論戰都有許多面，例如：我們是否應該在大學或中學多教一些實務的科目；我們是否應該增加並且強調實務數學。舉例來說，生活中處處可以遇到的複利，基本統計，對於大多數的人，學習這些更重要。他們可以瞭解醫囑，甚至對醫生而言也可以幫助他們解讀數據，這都需要基本統計。

黃：這是在辦公室放益智遊戲 (puzzles) 的原因嗎？

G：哦，這是我說的危險與自私自利。沒錯，我熱愛益智遊戲，不知道是不是與生俱來的。這讓人想到要理解先天與後天培養之間的差異，用二分法也許是錯誤的。我從很小就開始玩益智遊戲。我才看到叔叔拍的我小時候的影片，影片中我在玩魔塔 (Tower of Babel)<sup>15</sup>，那時可能還不到二歲。所以很小我就對益智遊戲情有獨鍾。

---

<sup>15</sup>魔塔有6個塔層可轉動，可將其中的一個珠子隱藏挪出空來移動其他珠子，借此產生獨特的玩法，是益智玩具的經典代表之一。

黃：你辦公室裡有二十種以上的益智遊戲。洛賓<sup>16</sup> (Geman 的學生) 告訴我你有一個解不出來，但他全部都解出來了。

G：他全解開了！

黃：你一定很生氣。

G：他是第一個把它們全部解開的人。

劉：就像你之前指出的，教育跟大腦息息相關。我們對大腦運作知道得很少，確實有教育改革是由最聰明的人主導，但那是很危險的。

G：我也這麼認為。就如我說的，我認為我們所處的階段，能為學生做的就是在他們面前呈現各種議題，竭盡所能的告訴他們各種議題的前景，讓他們自己選擇。

劉：學生應該要 了解他們的未來必須自己掌握。

G：這樣對他們可能更好。

劉：他們要自己處理這些事情。這讓我想起馬克·吐溫曾經說過「我從來不讓學校干擾我的學習。」

黃：舉例來說，即使大家都同意我們應該在大學教統計，可是如何教？我提到這個是因為你很有名，吸引了上百位學生來修統計計算。我指的是教最基礎的課程取決於怎麼教。

G：是這樣。但是說有名可能誇張了點，幾年前我教大學課程時確實吸引了一批學生來修課，近來我比較低調，想教最基礎的統計課，以前沒有開過，是比你訪問 Brown 時更初階的課。確實有大批學生註冊，大概超過兩百人。這個就更難了。

黃：愈是基礎的愈難。

G：對我來說是這樣。我一直在掙扎，一部份的我想要好好做，一部份的我想要逃跑，這是個艱鉅的任務。

黃：我提到這個是因為要教好基礎課程，即便是微積分或統計，都必須認真看待。Geman 教授即使基礎課都教得很好，在 Brown 訪問的時候，你會提到你的一位學生，他叫？

G：Matt Harrison<sup>17</sup>，他的教學可出色了，現在是我們的招牌。先前引進的許多課程，例如：計算機率，現在都由他接手了，好像他開的課還不夠多似的。他真行。

黃：基礎課即使是教學的方式也很重要，不是上課去教書就好，要有準備。

G：我同意。我想我們曾經聊過這個。把書教好這件事的重要性常常被低估，想到有些同事是很好的老師，而另一些卻是很糟的老師，這件事始終讓我難以釋懷。就我所知，糟糕的老師相

---

<sup>16</sup>Lo-Bin Chang 張洛賓，台灣數學家，研究電腦視覺和機率。

<sup>17</sup>Matthew Thomas Harrison，美國數學家，研究興趣包含如言推理 (conditional inference)，神經科統計方法，隨機圖與圖表等等。

對花了較少的心力。這又是一個需要拿捏輕重緩急的地方。在我看來規劃課程有相同的原則，有課綱不錯，重複一個概念很多次也很好。這樣就算學生沒跟上，至少他們還可以重新熟悉，知道現在在上什麼。這是很簡單而有用的原則。即使是讓學生可以看懂你的板書，這樣的小事也很有幫助。

我在麻省理工學院有一段不太好的經驗。我教了六週微分方程，非常重視它，努力備課也相當自信課程進行得很好，自己感覺很好。結果在評鑑中有三分之二，也許四分之三或更多的評語是：看不懂我在黑板上寫什麼。我很震驚，為什麼不說呢？總之教書有許多簡單而可行的地方可以著力，只是需要時間，審慎組織教書的材料尤其耗時。想想什麼是最重要的，時時 記著學生們什麼懂、什麼不懂，這不是件容易的事情。對教材愈來愈得心應手，就會忘記他們的困難之處在哪。這就是要下功夫的地方。

劉：沒有一樣東西是簡單的。

G：沒錯，尤其是牽涉到人以及人與人之間的互動。

劉：溝通尤其不簡單。第一步就從在黑板上整齊地寫出一行完整的句子開始吧。

G：這是好的開始，卻經常忽略。

劉：記得我有一場很重要的面試，1973年快要畢業時我到四月都還沒有找到工作。在那時候面試要給一個演講，當時還是用黑板（不是用電腦）。我有一位非數學領域的朋友幫我準備那場生死攸關的面試，最重要的建議是，擦黑板的時候，要從上往下擦才會乾淨。這是很有用的建議。

G：是很有用，和許多其它使用黑板的訣竅一樣有用。我現在還是只用黑板上課，如果一間教室裡有好幾塊黑板效果更好。用黑板教數學是最好的，哪些要留，哪些不留，用黑板上起課來很有效率。即使如此，如果事先沒有想好還是可能弄糟；我在自己的教材上圈出整節課都要留在黑板上的，只有半節課用到的，把它們寫在黑板的一角。不過要這樣準備教材很花時間。

劉：我們通常第一個問題都會先問：你是什麼時候對數學產生興趣的。現在問有點晚了，還可以問嗎？

G：什麼時候對數學產生興趣？就像我講過的一樣，很難知道是因為樂在其中而擅長，還是因擅長而樂在其中，我也不知道要怎麼把它們分開，甚至不知道把兩者拆解開來有什麼意義。我高中一開始並不順利，當許多好朋友都已經進入快速軌道，上進階數學，我因為程度不夠，必須加緊用功。我有家教，是我的一位老師，得跟著他學數學。想要回到常軌的數學課程，迫使我專注學習，才發現自己很喜歡而且其實是擅長數學的，所以我真的不知道要怎麼把喜歡與擅長分開。

高中的最後一年，上微積分，我非常喜歡。我得力於有個剛上數學研究所，住在家裡的哥哥。

我的微積分老師完全沒辦法從  $\epsilon$  得到  $\delta$ ，把兩者在定義裡的順序弄清楚。我哥哥可以，所以我不但弄懂了，還可以在課堂上幫忙，老師讓我解釋連續性， $\delta$ ,  $\epsilon$  等等。就這點來說，那位老師很了不起。當然也可以學到一些其它的東西，你學到沒有比教學更好的學習方式，除非真的瞭解，不然不可能在一群人面前講得出來。僅僅只是思考如何解釋，也會察覺自己不懂的地方。從此我就上鉤了，雖然我說過我的最愛還是物理。

黃：是因為你的哥哥 Don<sup>18</sup> 在數學界，所以起先你不學數學？

G：這很不好說。我從 Don 那邊逃跑然後再追上他？還是他為了離我遠一點在純數學待了比他希望的還長的時間（根據他本人的說法）然後在應用領域追趕我？我真的不知道。我認為自己的興趣很早就顯現了。我是那種躲在地下室拆收音機，支解東西的小孩。我很小的時候就是「修理先生」，有一陣子我們社區很流行彈珠台 (Pin ball machine)，我就幫人修理彈珠台；大部分家裡的東西我都會拆開來，看看其中的繼電器，自己組個小電腦等等。電子產品和電路讓我著迷，我認為我對物理有天生的興趣。但我哥哥沒有，一點都沒有。他應該比較適合學數學，雖然他一樣也轉換了領域，曾經上過文學創作研究所。他的興趣非常廣。

劉：我們談到教學，有一些東西確實需要關注改善。有時候艱困的成長環境而產生的態度會左右學習。比方語言學習，為了競爭，就只做到剛好足夠生存，而不是將學習語言當成是一種文化學習甚至是一種樂趣。只學所謂的商業英文或某某書上的某某英文。

G：這跟我們之前講的也有關。這個世界變的很多，也小了很多，變得競爭非常激烈，這絕不是誇張，就算這只是一種看法。現在與從前不一樣，人們在上大學的第一天就已經覺得好忙，他們憂心、計畫、煩惱。我同事常說他們關心的就只有成績跟找工作。講這種話很容易，他們成長時有餘裕廣泛思考，是個不同的年代。你說他們沒有時間，我完全同意。他們看不出學習語言的功用；不在於字彙，在於思考的方式。我們很幸運。

劉：這趟你已經做了很多工作，也許等你下次來時再開始第二部份的訪談。

G：好啊。

劉：下一次我們就不會這樣辛苦你了。

黃：因為我們只問了很少問題。

G：應該是我的回答太長。

劉：剛才這一小時是很愉快的經驗，非常感謝。

G：謝謝，期待下一次的訪談。

—本文訪問者劉太平任、黃啓瑞任職中央研究院數學研究所，整理者陳麗伍、萬菴韻為中央研究院數學研究所助理—

<sup>18</sup>Donald Geman (1943~), 美國應用數學家，是機器學習和樣式辨認領域的先驅。