數學傳播 37卷3期, pp. 84-94

基本不等式的研究性學習

方　康

基本不等式 (basic inequality) 即 $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ $(a>0, b>0)$, 其結構簡單, 均勻對稱, 兩個正數通過加法, 乘法, 除法和開方四種運算, 產生了它們的算術平均數 (arithmetic mean) 和幾何平均數 (geometric mean) 的內在規律, 實現了概念原理 (基本不等式)、符號語言 ($\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$)、圖形語言 (幾何圖形, 圖5) 與自然語言 (直角三角形斜邊上的高不大於斜邊之半) 的有機結合和高度統一, 數學之美, 數學之奇, 數學之簡, 數學之趣盡在其中, 蘊含了豐富的數學文化特徵和多樣的數學智慧因素。2002 年北京市召開的第 24 屆國際數學大會會標 (圖1), 奇妙"趙爽弦圖"的幾何模型背後就就蘊含了基本不等式的代數背景 (圖7)。筆者嘗試以選用基本不等式作爲"數學探究"的素材, 通過觀察, 探索, 歸納和驗證, 適當進行擴充或引伸, 可以從中獲得新的思想, 新的方法, 新的結果, 體驗數學發現和創造的歷程, 對於激發數學熱情, 擴大數學視野, 領悟數學神韻, 啓迪數學心智, 理解數學本質, 認識數學的科學價值、應用價值和文化價值, 優化認知結構, 崇尚科學的理性精神, 體會數學的美感都具有十分重要的意義。

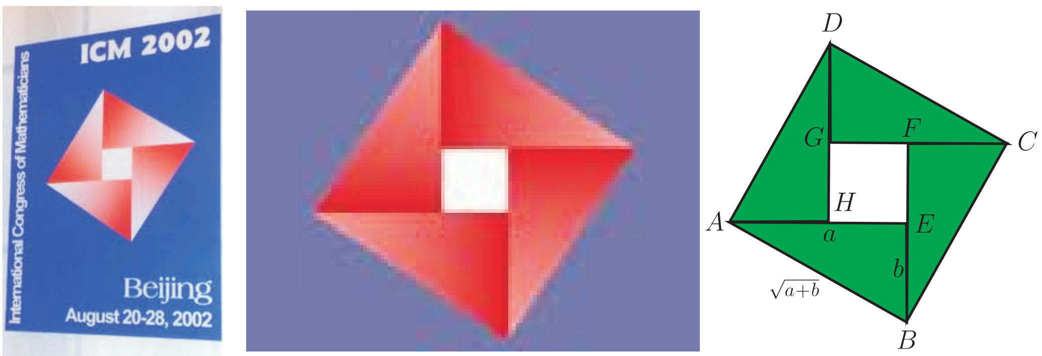

圖 1

爲深入挖掘基本不等式的教學價值, 筆者從基本不等式的認識視角, 引申拓展和組合延伸等三個方面設計了一個研究性學習的案例, 現介紹如下, 供大家學習參考。

1. 認識視角

對基本不等式的證明, 我們撇開常見的比較法、分析法、綜合法以及幾何模型, 還可以從下列各方面獲得新的認識。

1.1. 代數視角

1.1.1. 平均值換元法

令 $a=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}$, $b=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}$, (其中 $a,b>0$), 則 $ab=\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)\times\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ $\therefore\ \sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$。

1.1.2. 增量換元法

不妨設 $b\geq a$ 令 $t=b-a$, 則 $t\geq 0$ $\therefore$ $b=a+t$, 其中 $a>0$, $b>0$ 則 $ab=a(a+t)=a^2+at=(a+\frac{t}{2})^2-\frac{t^2}{4}\leq(a+\frac{t}{2})^2$, 得 $\sqrt{ab}\leq a+\frac{t}{2}=\frac{a+b}{2}$。

1.2. 方程視角

構造以 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ 爲根的一元二次方程 $(x-\sqrt{a})(x-\sqrt{b})=0$, 即 $x^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})x+\sqrt{ab}=0$ $(a>0,\ b>0)$, 此方程有兩個實根, 故其判別式 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4\sqrt{ab}\geq 0$, 即 $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$。

1.3. 函數視角

1.3.1. 構造函數 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ $(x>0)$

顯然, $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$, $\therefore$ $0<x<1$ 時, $f'(x)<0$, $f(x)$ 單調遞減; $x\geq 1$ 時, $f'(x)\geq 0$, $f(x)$ 單調遞增。故 $x=1$ 時, $f(x)$ 取得最小值 $f(x)=2$, 即 $x>0$ 時, $f(x)=x+\frac{1}{x}\geq 2$。

$$\therefore\ f\Big(\sqrt{\frac{b}{a}}\Big)=\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}\geq 2\Leftrightarrow\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\geq 2\Leftrightarrow\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}。$$

1.3.2. 構造函數 $f(x)=x+\frac{a^{x+1}+b^{x+1}}{a^x+b^x}$ $(a>0,b>0,a\neq b)$

不妨令 $a>b$, 則 $f(x)=\frac{a\left(\frac{a}{b}\right)^x+b}{\left(\frac{a}{b}\right)^x+1}=a+\frac{b-a}{\left(\frac{a}{b}\right)^x+1}$。$\because\ \frac{a}{b}>1$, $\therefore$ $\left(\frac{a}{b}\right)^x+1$ 爲增函數,

$\dfrac{b-a}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^x+1}$ 也爲增函數, 故 $f(x)$ 在 R 上爲增函數。

$$\therefore\ f\Big(-\frac{1}{2}\Big)<f(0)\Leftrightarrow \frac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}<\frac{a+b}{2},\quad \therefore\ \sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}。$$

1.3.3. **構造函數** $f(x)=(\sqrt{a}x+\sqrt{b})^2+(\sqrt{b}x+\sqrt{a})^2$

$\because\ f(x)=(\sqrt{a}x+\sqrt{b})^2+(\sqrt{b}x+\sqrt{a})^2=(a+b)x^2+4\sqrt{ab}x+(a+b)\ge 0$ 對 $x\in R$ 恒成立。$\therefore\ \Delta=(4\sqrt{ab})^2-4(a+b)^2\le 0\Leftrightarrow\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$。

1.3.4. **構造凹凸函數**

我們知道, 如果函數 $f(x)$ 是下凸函數, 則有 $f(x)+f(y)\ge 2f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big)$ 成立。

若構造函數 $f(x)=e^x$, $\because\ f(x)$ 是下凸函數, $\therefore\ e^x+e^y\ge 2e^{\frac{x+y}{2}}$, 由 $a>0$, $b>0$, 可令 $a=e^x$, $b=e^y$, $a+b\ge 2\sqrt{ab}$。

若構造函數 $f(x)=\lg x$, 易知 $f(x)$ 是下凹函數, 則 $f(x)+f(y)\le 2f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big)$, 類似可得 $\lg a+\lg b\le 2\lg\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)\Leftrightarrow\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$。

1.4. 統計視角

1.4.1. **構造方差**

如果 $\bar{x}$ 爲一組數據 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的平均數, s^2 爲這組資料的方差, 易知

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\Big)$$

今視 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ 爲一組資料, 由方差公式

$$\begin{aligned}s^2&=\frac{1}{2}\Big[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\Big(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\Big)^2\Big]\\&=\frac{1}{2}\Big(a+b-\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{2}\Big)=\frac{1}{2}\Big(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\Big)\ge 0\qquad\therefore\ \sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}。\end{aligned}$$

1.4.2. **構造分佈列**

視 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ 爲一組隨機變數, 其分佈列爲

ξ	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

則 $E\xi=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$, $E\xi^2=\dfrac{a+b}{2}$

由 $E\xi^2\geq(E\xi)^2$ 得 $\dfrac{a+b}{2}\geq\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2\Leftrightarrow\sqrt{ab}\leq\dfrac{a+b}{2}$。

1.5. 向量視角

構造向量 $\vec{\alpha}=(\sqrt{a},\sqrt{b})$, $\vec{\beta}=(\sqrt{b},\sqrt{a})$, 則由 $|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\geq|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|$ 知

$$\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a+b}\geq 2\sqrt{ab}\Leftrightarrow\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}。$$

1.6. 複數視角

記 $z_1=\sqrt{a}+\sqrt{b}i$, $b=\sqrt{b}-\sqrt{a}i$ $(a>0,b>0)$, 則 $z_1\cdot z_2=2\sqrt{ab}+(b-a)i$, $\because$ $|z_1|\cdot|z_2|=|z_1z_2|\geq R_e(z_1,z_2)$, $\therefore$ $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, 即 $\sqrt{ab}\leq\dfrac{a+b}{2}$。

1.7. 解幾視角

1.7.1. 借助點到直線的距離

$\because$ 直線 $\sqrt{a}x+\sqrt{b}y=0$ 過原點 $(a>0,\ b>0)$,

$\therefore$ 點 $(\sqrt{b},\sqrt{a})$ 到直線 $\sqrt{a}x+\sqrt{b}y=0$ 的距離一定小於或等於該點到原點的距離,

$$\therefore\quad\frac{|\sqrt{ab}+\sqrt{ab}|}{\sqrt{a+b}}\leq\sqrt{a+b}\Leftrightarrow\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}。$$

1.7.2. 借助面積

在直角坐標中, 構造關於 x 軸對稱兩點 $A(\sqrt{a},\sqrt{b})$, $B(\sqrt{a},-\sqrt{b})$ (如圖2), 則 $|AB|=2\sqrt{b}$, $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}|AB||x_A|=\sqrt{ab}$, 又

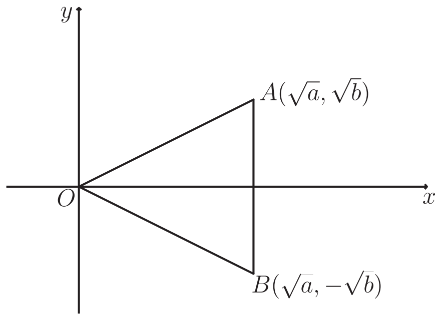

圖 2

$$\begin{aligned}S_{\triangle AOB}&=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\sin\angle AOB\\&=\frac{1}{2}\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a+b}\cdot\sin\angle AOB\leq\frac{a+b}{2},\end{aligned}$$

$$\therefore\quad\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}。$$

1.7.3. 借助曲線

當 $x>0$, $y>0$ 時, 考慮直角坐標系中固定直線 $l: x+y=2m$ 及雙曲線族 $C: xy=c (c>0)$ (如圖3)。令直線 $y=x$ 交雙曲線於點 $P(x_P, y_P)$, 交直線 l 與點 $Q(x_Q, y_Q)$。

設直線 l 與雙曲線 C 相交, 交點爲 $M(a,b)$, 則 $ab=x_Py_P=c$, 又 $x_P=y_P$, $\therefore\ \sqrt{ab}=\sqrt{x_Py_P}=x_P$, 由 $x_Q=m=\dfrac{a+b}{2}$, $x_P\le x_Q$ 可得 $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$。

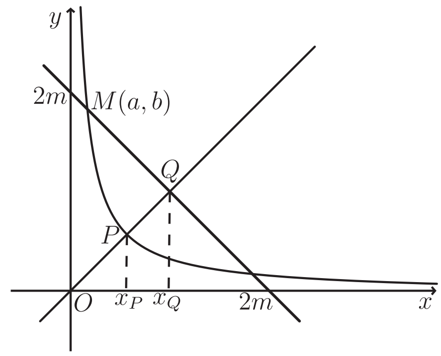

圖 3

1.8. 三角視角

1.8.1. 借助三角函數定義

構造兩點 $A(\sqrt{a},\sqrt{b})$, $B(\sqrt{b},\sqrt{a})$ (如圖4), 設 $\angle xOA=\alpha$, $\angle xOB=\beta$ $(\alpha,\beta\in(0,\dfrac{\pi}{2}))$, 由三角函數的定義知:

$$\begin{cases}\sqrt{a}=\sqrt{a+b}\cos\alpha,\\ \sqrt{b}=\sqrt{a+b}\sin\alpha,\end{cases}\qquad \begin{cases}\sqrt{b}=\sqrt{a+b}\cos\beta,\\ \sqrt{a}=\sqrt{a+b}\sin\beta,\end{cases}$$

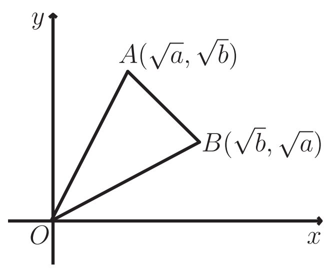

圖 4

則

$$\begin{aligned}2\sqrt{ab}&=\sqrt{a+b}\cos\alpha\cdot\sqrt{a+b}\cos\beta+\sqrt{a+b}\sin\alpha+\sqrt{a+b}\sin\beta\\ &=(a+b)\cos(\alpha-\beta)\le a+b\end{aligned}$$

$\therefore\ \sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$。

1.8.2. 借助餘弦定理

在直角坐標系中, 構造兩點 $A(\sqrt{a},\sqrt{b})$, $B(\sqrt{b},\sqrt{a})$ (如圖4), 則 $|OA|=|OB|=\sqrt{a+b}$, $|AB|=\sqrt{2(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\sqrt{2}|\sqrt{a}-\sqrt{b}|$。

$\triangle AOB$ 中, 由餘弦定理, 有

$$\cos\angle AOB=\frac{|OA|^2+|OB|^2-|AB|^2}{2|OA||OB|}=\frac{2(a+b)-2(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2(a+b)}=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b},$$

$\because\ \angle AOB\in[0,\dfrac{\pi}{2})$ $\therefore\ \angle AOB\le 1$, 即 $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$。

1.9. 平幾視角

1.9.1. 直角三角形斜邊上的高不小於中線模型

如圖 5, $DA = a\ DB = b$, $OC = \dfrac{a+b}{2}$, $CD = \sqrt{ab}$, $OC \geq CD \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$。

1.9.2. 切割線定理模型

如圖 6, $AB = a\ AC = b$, $AE = \dfrac{a+b}{2}$, $AD = \sqrt{ab}$, $AD < AE \Leftrightarrow \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$。

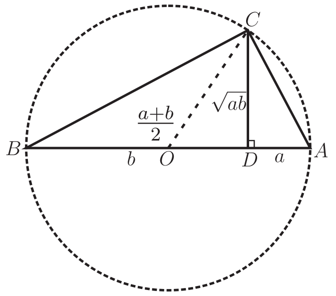

圖 5

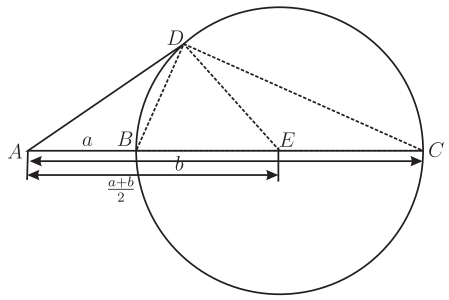

圖 6

1.9.3.「趙爽弦圖」模型

如圖 7, $AE = BF = CG = DH = \sqrt{a}$,

$AH = BE = CF = DG = \sqrt{b}(a > b)$,

$EF = FG = GH = HE = \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

$S_{\triangle ABE} + S_{\triangle BCF} + S_{\triangle CDG} + S_{\triangle DAH} < S_{\square ABCD}$

$4 \cdot \dfrac{1}{2}\sqrt{ab} < (\sqrt{a+b})^2 \Leftarrow \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$。

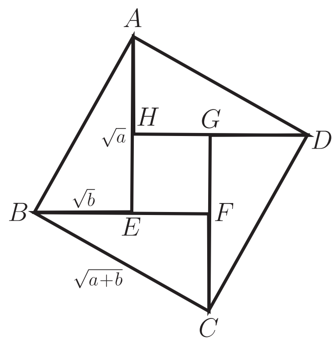

圖 7

1.9.4. 正方形正交切割模型

如圖 8, $AB = BC = CD = DA = \sqrt{a}$,

$AG = GI = \sqrt{b}$, $HI = IF = \sqrt{a} - \sqrt{b}$,

$S_{\square ABFE} + S_{\square ADHG} - S_{\square AGIE} < S_{\square ABCD}$

$2\sqrt{ab} - b < a \Leftrightarrow \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$。

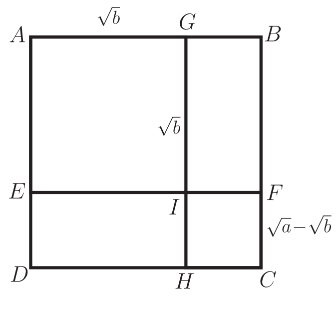

圖 8

1.9.5. 正方形單向切割模型

如圖 9, $AD = DC = \sqrt{a}$,

$AE = EG = \sqrt{b}(a > b)$,

由 $S_{\triangle ADC} + S_{\triangle AEG} > S_{\square AEFD}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2} > \sqrt{ab}$。

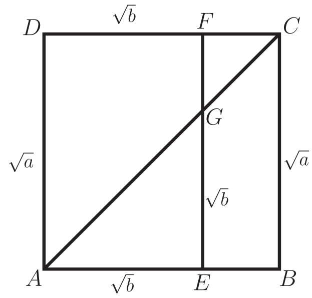

圖 9

1.9.6. 直角三角形直角邊小於斜邊模型

如圖 10, $BC < AB \Leftrightarrow \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$。

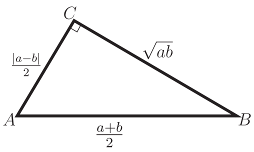

圖 10

1.9.7. 自相似直角三角形翻折模型

如圖 11, $Rt\triangle ADC \cong Rt\triangle AEC$,

$Rt\triangle BDC \cong Rt\triangle BFC$,

$AD = a$, $DB = b$,

$CD = CE = CF = \sqrt{ab}$,

$EF < AB \Leftrightarrow \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$。

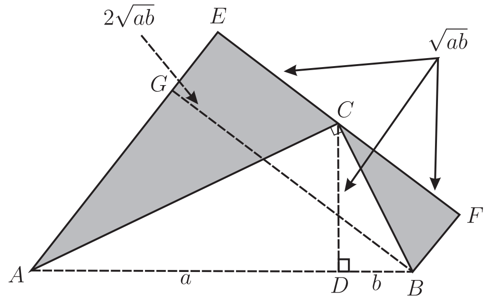

圖 11

1.9.8. 梯形模型

如圖 12, $BC = a$, $AD = b$, $AE = EB$, $DF = FC$,

$EF = \dfrac{a+b}{2}$, 設梯形 $AGHD \sim$ 梯形 $GBCH$,

則 $\dfrac{AD}{GH} = \dfrac{GH}{BC} \Rightarrow GH = \sqrt{ab}$

又 $\dfrac{AG}{GB} = \dfrac{DH}{HC} = \dfrac{AD}{GH} < 1 = \dfrac{AE}{EB} = \dfrac{DF}{FC}$

$\therefore GH$ 在 EF 上方, $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$。

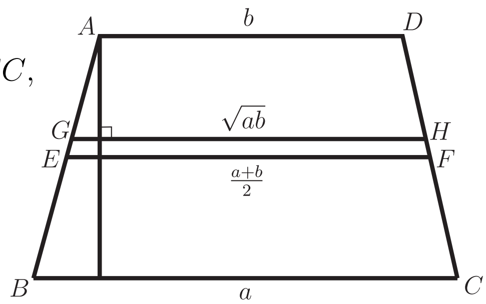

圖 12

1.9.9. 矩形單向切割模型

如圖 13, $AE = DF = \sqrt{b}$, $AD = EB = \sqrt{a} - \sqrt{b}$,

$S_{\square ABCD} > S_{\square AEFD}$

$\Leftrightarrow \sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) > \sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b})$

$\Leftrightarrow a + b > 2\sqrt{ab}$.

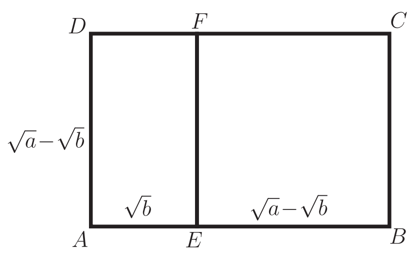

圖 13

2. 引申拓展

在中學階段, 基本不等式可以引申和拓展如下:

已知 a, b 都是正數, 求證

$$\frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \tag{1}$$

當且僅當 $a=b$ 時等式成立。

不等式鏈 (1) 即爲高等數學中 n 個正實數的四種平均值大小關係: H_n(調和平均值)$\le$ G_n(幾何平均值)$\le$ A_n (算術平均值)$\le$ Q_n (方冪平均值) 二元特例, 它蘊含了數學的統一簡潔之美, 倍受數學教師和數學愛好者的青睞, 人們對尋求它的幾何證明更感興趣, 下面介紹幾種它的「無字證明」方法。

2.1. 不等式鏈 $\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 的無字證明

2.1.1. 直角模型

$AC = BD = \dfrac{a-b}{2}$, $AB = \dfrac{a+b}{2}$,

則 $BC = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} AD = \sqrt{ab}$,

由 $\triangle ADE \sim \triangle BAD \Rightarrow DE = \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ (圖14)。

$$ED < DA < AB < BC$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

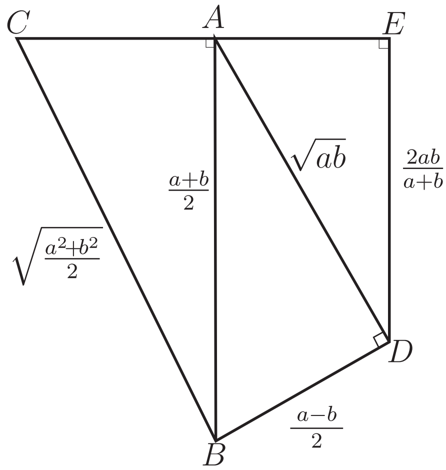

圖 14

2.1.2. 切割線模型

$PM = a$, $QM = b$, $a > b > 0$,

$AR = \dfrac{a-b}{2}$, $AM = \dfrac{a+b}{2}$, (圖15)。

$MG^2 = MQ \cdot MP \Rightarrow MG = \sqrt{ab}$,

$HM = \dfrac{GM^2}{MA} = \dfrac{2ab}{a+b}$,

$RM = \sqrt{AM^2 + AR^2} = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

$$HM < MG < AM < RM \Leftrightarrow \frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

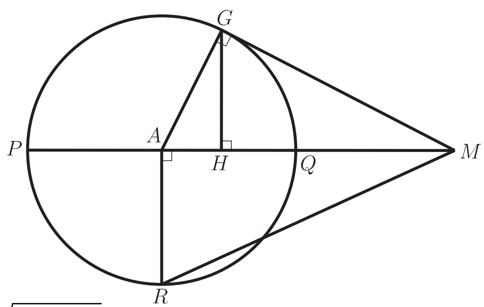

圖 15

2.1.3. 半圓模型

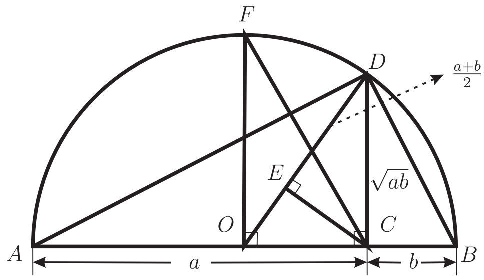

圖 16

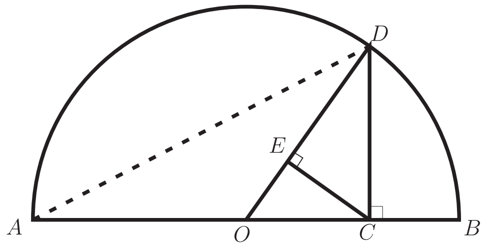

圖 17

$$AC=a,\ CB=b,$$

$$OF=\frac{a+b}{2},\ CD=\sqrt{ab},\ OC=\frac{a-b}{2},$$

$$FC=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

$$DE=\frac{DC^2}{OD}=\frac{ab}{\frac{a+b}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\ (\text{圖}16),$$

$$ED<DC<DO=OF<FC$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

注: 2010年湖北省高考理科數學第15題即取材於此模型。

第15題: 設 $a>b>0$, 則 $\frac{2ab}{a+b}$ 爲 a,b 的調和平均數。如圖17, C 爲線段 AB 上的點, $AC=a$, $CB=b$, O 爲 AB 的中點, 以 AB 爲直徑作圓。過點 C 作 AB 的垂線交半圓於 D, 連接 OD, AD, BD, 過點 C 作 OD 的垂線, 垂足爲 E。則圖中線段 OD 的長度爲 a,b 的算術平均數, 線段 ________ 的長度是 a,b 的幾何平均數, 線段 ________ 的長度是 a,b 的調和平均數。

2.2. 不等式鏈 $\frac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 的其他證法

2.2.1. 三角模型

設 $a+b=r$, 可令 $a=r\cos^2\theta$, $b=r\sin^2\theta$, $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$,

於是 $\sqrt{ab}=r\sin\theta\cos\theta=\frac{r}{2}\sin 2\theta$, $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=\frac{r}{2}\sqrt{1+\cos^2 2\theta}$, $\frac{2ab}{a+b}=\frac{r}{2}\sin^2 2\theta$.

$\because \sin^2\theta\le\sin 2\theta\le 1\le\sqrt{1+\cos^2 2\theta}$,

$\therefore \frac{r}{2}\sin^2 2\theta\le\frac{r}{2}\sin 2\theta\le\frac{r}{2}\le\frac{r}{2}\sqrt{1+\cos^2 2\theta}$,

即 $\frac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$。

2.2.2. 函數模型

構造函數 $f(x)=\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}}{a^x+b^x}$(不妨設 $a>b>0$), 則 $f(x)=\dfrac{b+a\left(\frac{a}{b}\right)^x}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^x}=a+\dfrac{b-a}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^x}$

$\because \dfrac{a}{b}>1, \therefore \left(\dfrac{a}{b}\right)^x+1$ 為增函數, $\dfrac{b-a}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^x}$ 也為增函數, 故 $f(x)$ 在 R 上為增函數。

$\therefore f(1)>f(0)>f(-\frac{1}{2})>f(-1)$, 故有 $\sqrt{f(1)\cdot f(0)}>f(0)>f(-\frac{1}{2})>f(-1)$,

此即 $\dfrac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}\leq\dfrac{a+b}{2}\leq\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$。

2.2.3. 梯形模型

以 a 為下底, b 為上底, 作一個梯形 $ABCD$,

再作 4 條均平行於兩底的直線,

分別交兩腰於 A_i, B_i, $(i=1,2,3,4)$ (圖 18)

其中 A_1B_1 平分梯形面積, 有 $A_1B_1=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$;

A_2B_2 為中位線, 有 $A_2B_2=\dfrac{a+b}{2}$;

A_3B_3 分梯形為兩個相似的梯形, 有 $A_3B_3=\sqrt{ab}$;

A_4B_4 過兩對角線的交點, 有 $A_4B_4=\dfrac{2ab}{a+b}$;

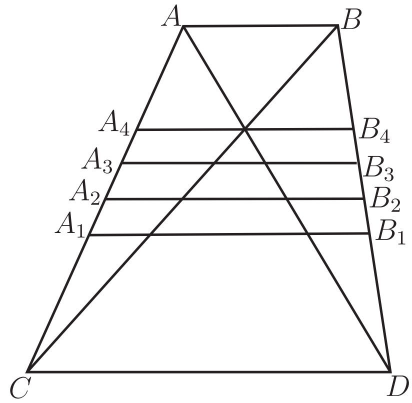

圖 18

由 $AB<A_4B_4<A_3B_3<A_2B_2<A_1B_1<CD$, 有 $\dfrac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}\leq\dfrac{a+b}{2}\leq\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$。

3. 組合延伸

《數學通報》(北京師範大學月刊)2010 年 8 月號問題 1866

已知 $a>1$, $b>1$ 證明:$\dfrac{1}{\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{2ab}{a+b}}+\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{2ab}{a+b}\geq 2\sqrt{ab}+\dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$

易知函數 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上單調遞增,

由 $a>1$, $b>1$ 及 $\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{2ab}{a+b}>1$, $2\sqrt{ab}>1$,

令 $x=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{2ab}{a+b}$, 則 $x\ge 2\sqrt{\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{2ab}{a+b}}=2\sqrt{ab}$,

故 $\dfrac{1}{\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{2ab}{a+b}}+\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{2ab}{a+b}\ge 2\sqrt{ab}+\dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$。

4. 感悟反思

數學知識不是孤立離散的單點, 數學方法不是各自無關的一招一式, 它們血肉相連組成一條一條的知識鏈或方法鏈。基本不等式是數形結合的典範, 是眞善美的高度統一體: 基本不等式之眞, 在於它的精准深刻; 基本不等式之善, 在於它的豐富實用; 基本不等式之美, 在於它的簡潔和諧。數學教學要欣賞數學文化和數學思維的眞, 善, 美, 而教科書中許多內容的陳述往往是美麗而冰冷的, 火熱的思考被淹沒在演繹的海洋裏, 數學的眞, 善, 美, 點燃和激起人們火熱的思考, 需要大力挖掘, 用心體察發現, 感受, 體驗和欣賞數學的眞, 善, 美, 是數學學習中的一項基本任務。

數學學習過程決定人們怎樣看待數學學習以及對數學本質的認識, 注重學習過程, 使學生理解知識的來龍去脈, 尋求知識相互間的內在聯繫, 建構完善的知識結構, 那麼我們就會逐漸認識到數學知識是有著內在聯繫的整體, 有著自身發展規律, 而這些又可以通過自己努力去探究獲得, 這樣的觀念將會鼓勵我們消除數學知識的神秘感, 激發我們勇於探索的勇氣, 感受數學知識誘人的魅力, 引導我們尋找數學知識與現實世界的聯繫, 這正是一個數學愛好者所追求的理想的學習境界。

—本文作者就讀廣東省廣州市中山大學數學與計算科學學院2010級信息與計算科學 A 班—