數學傳播 37卷3期, pp. 76-83

妙用『糖水不等式』巧解題

張國治

摘要：對於一個從生活中提煉出來的『糖水不等式』, 筆者發現此不等式無論對教材的處理還是各種競賽和高考題的解決有事半功倍之效。作爲教師無論在教學還是在教師的科研中, 都應該謹慎處理每一個數學問題, "追問"數學, 做好做足數學反思, 而數學反思更是數學教師專業化成長最有效的途徑之一, 通過反思教學提高課堂教學效率和教科研水準。

關鍵字：糖水不等式, 解題反思, 教材的處理, 挖掘, 教師專業化成長。

我們熟知, 若 a kg 白糖製出 b kg 糖溶液, 則糖的品質分數爲 $\dfrac{a}{b}$。若在上述不飽和溶液中再添加 m kg 白糖, 此時糖的品質分數增加到 $\dfrac{a+m}{b+m}$, 糖水變甜了。將這個事實抽象爲數學問題, 即: 若 $a,b,m\in R^+$, 且 $a<b$, 則 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+m}{b+m}$。(詳見人教社《選修 4-5 不等式選講》, p.21)。我們不妨稱之爲『糖水不等式』。事實上, 若能恰當的利用此不等式可巧妙地證明一些較複雜的不等式, 下面舉例說明此不等式的應用。

應用一、證絕對值不等式

例1: 已知 a,b 是實數, 求證 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$。(詳見人教社《選修 4-5 不等式選講》, p.28)。

分析: 教科書中是採用 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}=1-\dfrac{1}{1+|a+b|}\le 1-\dfrac{1}{1+|a|+|b|}=\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$ 來證明的, 技巧性較強。事實上, 利用教材中已證的『糖水不等式』便有如下簡潔的證法。

證明: $\because 0\le|a+b|\le|a|+|b|$, $\therefore m=|a|+|b|-|a+b|\ge 0$, 由『糖水不等式』得

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|}&\le\frac{|a+b|+m}{1+|a+b|+m}=\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\\&\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.\end{aligned}$$

按此證明方法不難做如下推廣。

推廣 1: 已知 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是實數,

$$求證 \quad \frac{|x_1+x_2+\cdots+x_n|}{1+|x_1+x_2+\cdots+x_n|} \le \frac{|x_1|}{1+|x_1|}+\frac{|x_2|}{1+|x_2|}+\cdots+\frac{|x_n|}{1+|x_n|}.$$

推廣 2: 已知 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是實數且 $c>0$

$$求證 \quad \frac{|x_1+x_2+\cdots+x_n|}{c+|x_1+x_2+\cdots+x_n|} \le \frac{|x_1|}{c+|x_1|}+\frac{|x_2|}{c+|x_2|}+\cdots+\frac{|x_n|}{c+|x_n|}.$$

應用二、證分式不等式

例 2: (2008年全國高中數學聯賽山東省預賽題第17題) 若 $x>0$, $y>0$, $z>0$ 且 $xyz=1$,

$$求證 \quad 1<\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}<2.$$

解析: 依題意可設 $x=\dfrac{b}{a}$, $y=\dfrac{c}{b}$, $z=\dfrac{a}{c}$, (a、b、$c \in R^+$), 則

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}>\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+a+b}=1,$$

另一方面, 由『糖水不等式』可知

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{b+a}{b+c+a}+\frac{c+b}{c+a+b}=2,$$

所以原不等式成立。

評注: 對於條件 $xyz=1$ 常作代換 $x=\dfrac{b}{a}$, $y=\dfrac{c}{b}$, $z=\dfrac{a}{c}$, 可使非齊次不等式變爲齊次不等式。按此證明方法不難做如下推廣。

推廣 1: 若 $a_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ $n\in N^*$, $n>2$ 則

$$1<\frac{a_1}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}+\frac{a_2}{a_2+a_3+\cdots+a_n}+\cdots+\frac{a_n}{a_n+a_1+\cdots+a_{n-2}}<2.$$

推廣 2: 若 $a_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ $n\in N^*$, $n>2$ 且 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n=1$。

$$求證 \quad 1<\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}<n-1.$$

應用三、證排列組合數不等式

例3: (2001年全國高考題理科第20題) 已知 i, m, n 是正整數, 且 $1 < i \le m < n$。
證明 (1) $n^i A_m^i < m^i A_n^i$; (2) $(1+m)^n > (1+n)^m$。

解析: (1) 對於 $1 < i \le m < n$ 有

$$A_m^i = m(m-1)\cdots(m-i+1), \qquad \frac{A_m^i}{m^i} = \frac{m}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\cdots\frac{m-i+1}{m},$$

同理 $\dfrac{A_n^i}{n^i} = \dfrac{n}{n}\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdots\dfrac{n-i+1}{n}$

由於 $m < n$, 對於整數 $k = 1, 2, \ldots, i-1$, 由『糖水不等式』得 $\dfrac{m-k}{n-k} < \dfrac{m-k+k}{n-k+k} = \dfrac{m}{n}$
即 $\dfrac{n-k}{n} > \dfrac{m-k}{m}$, 所以 $\dfrac{A_n^i}{n^i} > \dfrac{A_m^i}{m^i}$ 即 $n^i A_m^i < m^i A_n^i$。
(2) 由二項式定理有 $(1+m)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} m^i C_n^i$, $(1+n)^m = \sum\limits_{i=0}^{m} n^i C_m^i$,
由 (1) 知 $n^i A_m^i < m^i A_n^i$ $(1 < i \le m < n)$ 而 $C_m^i = \dfrac{A_m^i}{i!}$, $C_n^i = \dfrac{A_n^i}{i!}$, 所以 $m^i C_n^i > n^i C_m^i$。
因此, $\sum\limits_{i=2}^{m} m^i C_n^i > \sum\limits_{i=2}^{m} n^i C_m^i$, 又 $m^0 C_n^0 = n^0 C_m^0 = 1$, $mC_n^1 = nC_m^1 = mn$,

$$\therefore \quad \sum_{i=0}^{m} m^i C_n^i > \sum_{i=0}^{m} n^i C_m^i, \quad \text{即} \quad (1+m)^n > (1+n)^m.$$

應用四、證數列型不等式

例4: (1995年全國高考題文科第25題) 設 $\{a_n\}$ 是由正數組成的等比數列, S_n 是其前 n 項和。

$$\text{證明} \quad \frac{\log_{0.5} S_n + \log_{0.5} S_{n+2}}{2} > \log_{0.5} S_{n+1}.$$

分析: 原高考標準解答是討論公比 $q = 1$ 與 $q \ne 1$ 兩種情況, 利用作差比較法證明, 略顯繁瑣。若考慮到題設結構和等比數列的性質巧妙利用『糖水不等式』便有如下簡潔的證法。

證明: 原不等式等價於 $S_n S_{n+2} < S_{n+1}^2 \Leftrightarrow \dfrac{S_n}{S_{n+1}} < \dfrac{S_{n+1}}{S_{n+2}}$。設 $\{a_n\}$ 的公比爲 q 首項爲 a_1, 則

$$\frac{S_{n+1}}{S_{n+2}} = \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n+2}} = \frac{a_1+q(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{a_1+q(a_1+a_2+\cdots+a_{n+1})} = \frac{a_1+qS_n}{a_1+qS_{n+1}},$$

由『糖水不等式』得 $\dfrac{S_n}{S_{n+1}} = \dfrac{qS_n}{qS_{n+1}} < \dfrac{a_1+qS_n}{a_1+qS_{n+1}} = \dfrac{S_{n+1}}{S_{n+2}}$, 故原不等式成立。

例 5: 已知數列 $\{a_n\}$ 的前n項和爲 S_n, 已知對任意的 $n\in N^+$, a_n總是n與 S_n 的等差中項。

$$\text{求證}\quad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2.$$

解析: 由題意可知 $2a_n=n+S_n$, 故 $2a_{n-1}=n-1+S_{n-1}$, 兩式相減得, $2a_n-2a_{n-1}=1+S_n-S_{n-1}$, 即 $a_n=2a_{n-1}+1$, $(n\ge 2)$, $\therefore a_n+1=2(a_{n-1}+1)$, $(n\ge 2)$, 故數列 $\{a_n+1\}$ 是以 2 爲公比 a_1+1 爲首項的等比數列, 易知 $a_n=2^n-1$, $\therefore \dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2^n-1}$, 由『糖水不等式』可知

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_n}&=\frac{1}{2^n-1}<\frac{1+1}{2^n-1+1}=\frac{2}{2^n}=\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\qquad (n\ge 2),\\
\therefore\quad \frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}&<\Big(\frac{1}{2}\Big)^{1}+\Big(\frac{1}{2}\Big)^{2}+\cdots+\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\\
&=\frac{\frac{1}{2}\Big[1-\big(\frac{1}{2}\big)^{n-1}\Big]}{1-\frac{1}{2}}=1-\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}<1,\\
\therefore\quad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}&<1+\frac{1}{a_1}=2.
\end{aligned}$$

例 6: (2007年四川高考題理科第22題第3小題)

$$\text{求證}\quad T_n=\frac{4}{3^{2^0}-1}+\frac{4}{3^{2^1}-1}+\frac{4}{3^{2^2}-1}+\cdots+\frac{4}{3^{2^{n-1}}-1}<3.$$

分析: 此題直接放縮較難, 若考慮到題設待證不等式的結構利用『糖水不等式』便有如下簡解。

解析: 設 $a_n=\dfrac{4}{3^{2^{n-1}}-1}$, 當 $n=1$ 時, $T_1=a_1=\dfrac{4}{3^{2^0}-1}=2<3$ 成立;
當 $n\ge 2$ 時, $3^{2^{n-1}}-1>4$, 由『糖水不等式』可知

$$a_n=\frac{4}{3^{2^{n-1}}-1}<\frac{4+1}{3^{2^{n-1}}-1+1}=\frac{5}{3^{2^{n-1}}}\le\frac{5}{3^n}.$$

故 $a_2<\dfrac{5}{3^2}$, $a_3<\dfrac{5}{3^3},\ldots,a_n<\dfrac{5}{3^n}$, 所以

$$a_2+a_3+\cdots+a_n<\frac{5}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\cdots+\frac{5}{3^n}=5\cdot\frac{\frac{1}{9}\Big(1-\frac{1}{3^{n-1}}\Big)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{5}{6}\Big(1-\frac{1}{3^{n-1}}\Big)<\frac{5}{6}.$$

所以 $T_n=a_1+a_2+\cdots+a_n<a_1+\dfrac{5}{6}=2+\dfrac{5}{6}=\dfrac{17}{6}<\dfrac{18}{6}=3$, 而 $n=1$ 時, 上式也成立。
故對任意的 $n\in N^+$ 都有 $T_n=\dfrac{4}{3^{2^0}-1}+\dfrac{4}{3^{2^1}-1}+\dfrac{4}{3^{2^2}-1}+\cdots+\dfrac{4}{3^{2^{n-1}}-1}<3$ 成立。

例7: (2009年山東高考題理科第20題) 等比數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和爲 S_n, 已知對任意的 $n \in N^+$ 點 (n, S_n) 均在函數 $y = b^x + r$ ($b > 0$ 且 $b \neq 1$, b, r 均爲常數) 的圖像上。
(I) 求 r 的值。(II) 當 $b = 2$ 時, 記 $b_n = 2(\log_2 a_n + 1)$ ($n \in N^+$)。
證明對任意的 $n \in N^+$ 不等式成立 $\dfrac{b_1+1}{b_1} \cdot \dfrac{b_2+1}{b_2} \cdots \dfrac{b_n+1}{b_n} > \sqrt{n+1}$ 成立。

分析: 原標準解答是利用數學歸納法證明, 略顯繁瑣, 注意到通項公式的特點可利用『糖水不等式』有如下簡解。

解析: (I) 略。

(II) 由 (I) 知 $a_n = (b-1)b^{n-1}$ 當 $b = 2$ 時, 易知 $b_n = 2n$, 故要證的不等式爲

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{2n+1}{2n} > \sqrt{n+1},$$

設 $A = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{5}{4} \cdots \dfrac{2n+1}{2n}$, 由『糖水不等式』得

$$\frac{2n}{2n+1} < \frac{2n+1}{2n+1+1} = \frac{2n+1}{2n+2}, \quad 即 \quad \frac{2n+1}{2n} > \frac{2n+2}{2n+1},$$

也即 $A > B = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{6}{5} \cdots \dfrac{2n+2}{2n+1}$, 故 $A^2 > AB = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{6}{5} \cdots \dfrac{2n+1}{2n} \cdot \dfrac{2n+2}{2n+1} = n+1$,
故 $A = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{5}{4} \cdots \dfrac{2n+1}{2n} > \sqrt{n+1}$。

例8: (1998年全國高考題理科第25題) 已知數列 $\{b_n\}$ 是等差數列, $b_1 = 1$, $b_1 + b_2 + \cdots + b_{10} = 145$

(I) 求數列 $\{b_n\}$ 的通項 b_n;

(II) 設數列 $\{a_n\}$ 的通項 $a_n = \log_a(1 + \dfrac{1}{b_n})$ (其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$), 記 S_n 是數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項的和。試比較 S_n 與 $\dfrac{1}{3}\log_a b_{n+1}$ 的大小, 並證明你的結論。

分析: (II) 原標準解答是利用數學歸納法證明, 略顯繁瑣, 注意到通項公式的特點可利用『糖水不等式』有如下簡解。

解析: (I) 設數列 $\{b_n\}$ 的公差爲 d, 由題意得

$$\begin{cases} b_1 = 1, \\ 10b_1 + \dfrac{10(10-1)}{2}d = 145, \end{cases} \quad 解得 \quad \begin{cases} b_1 = 1, \\ d = 3, \end{cases} \quad 所以, \quad b_n = 3n-2.$$

(II) 由 $b_n = 3n-2$, 知

$$\begin{aligned} S_n &= \log_a(1+1) + \log_a\left(1+\frac{1}{4}\right) + \cdots + \log_a\left(1+\frac{1}{3n-2}\right) \\ &= \log_a\left[(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)\right], \end{aligned}$$

而 $\frac{1}{3}\log_a b_{n+1} = \log_a \sqrt[3]{3n+1}$, 因此要比較 S_n 與 $\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$ 的大小, 可先比較

$$(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right) \quad 與 \quad \sqrt[3]{3n+1} \quad 的大小。$$

取 $n=1$ 有 $(1+1) > \sqrt[3]{3\cdot 1+1}$,

取 $n=2$ 有 $(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right) > \sqrt[3]{3\cdot 2+1}$,

$$\vdots$$

由此猜想

$$(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right) > \sqrt[3]{3n+1} \tag{$*$}$$

$$即 \quad 2\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{3n-1}{3n-2} > \sqrt[3]{3n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{3n-2}{3n-1} < \sqrt[3]{\frac{1}{3n+1}}$$

設 $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{3n-2}{3n-1}$, 由『糖水不等式』得

$$\frac{3n-2}{3n-1} < \frac{3n-2+1}{3n-1+1} = \frac{3n-1}{3n} < \frac{3n-1+1}{3n+1} = \frac{3n}{3n+1},$$

故 $A < B = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{3n-1}{3n}$, 同理 $A < C = \frac{3}{4}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{3n}{3n+1}$, 故

$$A^3 < ABC = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{3n-2}{3n-1}\cdot\frac{3n-1}{3n}\cdot\frac{3n}{3n+1} = \frac{1}{3n+1},$$

即 $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{3n-2}{3n-1} < \sqrt[3]{\frac{1}{3n+1}}$ 即不等式 $(*)$ 成立, 則由對數函數單調性易知

$$當\ a>1\ 時,\ S_n > \frac{1}{3}\log_a b_{n+1};\ 當\ 0<a<1\ 時,\ S_n < \frac{1}{3}\log_a b_{n+1}。$$

例9: 證明對任意的 $n \in N^+$, 不等式 $\frac{1^2+1+1}{1^2+1}\cdot\frac{2^2+2+1}{2^2+2}\cdot\frac{3^2+3+1}{3^2+3}\cdots\frac{n^2+n+1}{n^2+n} < e$ 成立。

分析: 此題直接論證很難, 用數學歸納法也很難證明, 若構造函數不等式 $\ln(1+x) < x$, 則思維量大且不易想到, 若注意到題設待證不等式的結構可考慮利用『糖水不等式』證明。

證明: 原不等式等價於

$$\frac{1^2+1}{1^2+1+1}\cdot\frac{2^2+2}{2^2+2+1}\cdot\frac{3^2+3}{3^2+3+1}\cdots\frac{n^2+n}{n^2+n+1}>\frac{1}{e},$$

當 $n=1$ 時, $\dfrac{1^2+1}{1^2+1+1}=\dfrac{2}{3}>\dfrac{2}{2e}=\dfrac{1}{e}$ 成立;

當 $n=2$ 時, $\dfrac{1^2+1}{1^2+1+1}\cdot\dfrac{2^2+2}{2^2+2+1}=\dfrac{12}{21}>\dfrac{12}{12e}=\dfrac{1}{e}$ 成立;

當 $n\geq 3$ 時, 由『糖水不等式』可知 $\dfrac{n^2-1}{n^2}<\dfrac{n^2-1+n+1}{n^2+n+1}=\dfrac{n^2+n}{n^2+n+1}$

即 $\dfrac{n^2+n}{n^2+n+1}>\dfrac{n^2-1}{n^2}=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n+1}{n}$, 故當 $n\geq 3$ 時,

$$\begin{aligned}\frac{3^2+3}{3^2+3+1}\cdot\frac{4^2+4}{4^2+4+1}\cdots\frac{n^2+n}{n^2+n+1}&>\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\\&=\frac{2}{3}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{2}{3}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)>\frac{2}{3}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&\frac{1^2+1}{1^2+1+1}\cdot\frac{2^2+2}{2^2+2+1}\cdot\frac{3^2+3}{3^2+3+1}\cdot\frac{4^2+4}{4^2+4+1}\cdots\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\\&\quad>\frac{1^2+1}{1^2+1+1}\cdot\frac{2^2+2}{2^2+2+1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{21}>\frac{8}{8e}=\frac{1}{e}.\end{aligned}$$

綜上, 對任意的 $n\in N^+$,

$$\frac{1^2+1}{1^2+1+1}\cdot\frac{2^2+2}{2^2+2+1}\cdot\frac{3^2+3}{3^2+3+1}\cdots\frac{n^2+n}{n^2+n+1}>\frac{1}{e}$$

成立, 即原不等式成立。

可見, 適當挖掘某些不等式的潛在功能無論是對解題還是對教材的處理都大有裨益, 有事半功倍之效。

練習:

1. 已知 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三邊, 求證 $\dfrac{a}{a+m}+\dfrac{b}{b+m}>\dfrac{c}{c+m}$。
2. 已知 A,B,C 是 $\triangle ABC$ 的三內角,

   求證　$1<\dfrac{\sin A}{\sin B+\sin C}+\dfrac{\sin B}{\sin C+\sin A}+\dfrac{\sin C}{\sin A+\sin B}<2.$

3. (1995年全國高考題理科第25題) 設 $\{a_n\}$ 是由正數組成的等比數列, S_n是其前 n 項和。
   (1) 證明 $\dfrac{\log S_n+\log S_{n+2}}{2}<\log S_{n+1}$;
   (2) 是否存在常數 $c>0$, 使得 $\dfrac{\log(S_n-c)+\log(S_{n+2}-c)}{2}=\log(S_{n+1}-c)$成立? 並證明你的結論。
4. 對任意大於 1 的正整數 n, 求證 $\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)>\dfrac{\sqrt{2n+1}}{2}$。
5. (1998全國高考題文科25題) 已知數列 $\{b_n\}$ 是等差數列, $b_1=1$, $b_1+b_2+\cdots+b_{10}=100$。
   (I) 求數列 $\{b_n\}$ 的通項 b_n;
   (II) 設數列 $\{a_n\}$ 的通項 $a_n=\log\left(1+\dfrac{1}{b_n}\right)$, 記 S_n 是數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項的和, 試比較 S_n 與 $\dfrac{1}{2}\log b_{n+1}$ 的大小, 並證明你的結論。
6. (2009年全國數學聯賽河北省預賽題第17題) 已知函數 $f(x)=x^2-2$, 設曲線 $y=f(x)$ 在點 $A(x_n,f(x_n)),n\in N^*$ 處的切線與 x 軸交於點 $B(x_{n+1},0),n\in N^*$ 且 $x_1=3$。
   (1) 求證 $x_n>\sqrt{2}$, $n\in N^*$;
   (2) 設 $b_n=x_n-\sqrt{2}$, 數列 $\{b_n\}$ 的前項和爲 T_n, 證明 $T_n<2(3-\sqrt{2})$。

參考資料

1. 張國治, 反思出巧解 [J], 中國數學教育, 2012 (4), 35-36.
2. 張國治, 一道流行錯題的正本清源及反思 [J], 中國數學教育, 2012 (6), 41-42.

—本文作者任教中國新疆生產建設兵團第二中學—