數學傳播　37卷3期, pp. 71-75

涉及三個三角形的兩個不等式

吳裕東

謹以此文獻給我的奶奶楊菊香女士(1930～1997)

摘要: 本文利用算術–幾何平均不等式與凸函數的工具建立了兩個涉及三個三角形的幾何不等式。作爲其中一個不等式的應用, 解決了冷崗松教授的一個猜想的二維情形。同時還得到了幾個有趣的推論, 最後提出了幾個進一步的問題。

關鍵詞: 三角形、幾何不等式、Oppenheim 不等式、算術–幾何平均不等式、凸函數。

1. 引言和主要結果

在本文中約定: $\triangle A_iB_iC_i$ $(i=1,2)$ 的邊長, 面積, 內切圓半徑, 外接圓半徑分別爲 a_i、b_i、c_i, $\triangle_i$, r_i, R_i; $\triangle ABC$ 的邊長分別爲 $a=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$、$b=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$、$c=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$, 面積爲 $\triangle$, 外接圓半徑爲 R; 以 a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2 爲三邊的三角形爲 $\triangle A'B'C'$ $(a'=a_1+a_2, b'=b_1+b_2, c'=c_1+c_2)$, 其三內角分別爲 A', B', C', 內切圓半徑爲 r', 外接圓半徑爲 R', 面積爲 $\triangle'$。

涉及三個三角形的不等式最早或許要追溯到二十世紀六七十年代。A. Oppenheim 在文 [4, 6] 曾建立了如下的結果:

$$\triangle \geq \triangle_1+\triangle_2, \tag{1}$$

$$R^2 \leq R_1^2+R_2^2. \tag{2}$$

不等式 (1) 和 (2) 就是所謂的 Oppenheim 不等式。A. Oppenheim 在文 [6] 又將不等式 (1) 推廣到圓內接凸 n 邊形。稍後, 楊路和張景中 [11, 12] 將不等式 (1) 和 (2) 推廣到 n 維空間的單形。

近期 Pablo A. Parrilo 和 Ronen Peretz 在處理一個 Circle Packing 問題時用配平方和的最新成果證明瞭如下涉及三個三角形的一個有趣的幾何不等式 [7]:

$$A_1\cdot(b_1+c_1-a_1)+A_2\cdot(b_2+c_2-a_2)\leq A'\cdot(b'+c'-a'). \tag{3}$$

其中 A_1, A_2 分別爲 $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ 之內角。

筆者受不等式 (1)–(3) 的啓發, 循文 [7] 的思路, 經過一番探究, 建立了 $\triangle A_iB_iC_i$ $(i=1,2)$ 與 $\triangle A'B'C'$ 之間的如下兩個新的幾何不等式:

$$\sqrt{\triangle_1}+\sqrt{\triangle_2}\le\sqrt{\triangle'}, \tag{4}$$

$$r_1+r_2\le r'. \tag{5}$$

下面第 2 節至第 3 節分別給出不等式 (4) 和 (5) 的證明, 第 4 節給出冷崗松教授的一個猜想的二維情形的證明及其推廣, 第 5 節提出幾個進一步的問題。

2. 不等式 (4) 的證明

$$\text{令}\begin{cases} x_i=\dfrac{1}{2}(b_i+c_i-a_i)>0, \\ y_i=\dfrac{1}{2}(c_i+a_i-b_i)>0, \quad (i=1,2), \\ z_i=\dfrac{1}{2}(a_i+b_i-c_i)>0, \end{cases} \tag{6}$$

則 $a_i=y_i+z_i$, $b_i=z_i+x_i$, $c_i=x_i+y_i$ $(i=1,2)$。從而由三角形面積的秦九韶–海倫公式可知不等式 (4) 等價於

$$\begin{aligned} &\sqrt[4]{x_1y_1z_1(x_1+y_1+z_1)}+\sqrt[4]{x_2y_2z_2(x_2+y_2+z_2)} \\ &\quad\le\sqrt[4]{(x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2)(x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2)}. \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\sqrt[4]{\frac{x_1y_1z_1(x_1+y_1+z_1)}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2)(x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2)}} \\ &\quad+\sqrt[4]{\frac{x_2y_2z_2(x_2+y_2+z_2)}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2)(x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2)}}\le 1. \end{aligned} \tag{8}$$

由算術–幾何平均不等式可得

$$\begin{aligned} &\sqrt[4]{\frac{x_1y_1z_1(x_1+y_1+z_1)}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2)(x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2)}} \\ &\quad\le\frac{1}{4}\Big(\frac{x_1}{x_1+x_2}+\frac{y_1}{y_1+y_2}+\frac{z_1}{z_1+z_2}+\frac{x_1+y_1+z_1}{x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2}\Big) \end{aligned} \tag{9}$$

及

$$\begin{aligned} &\sqrt[4]{\frac{x_2y_2z_2(x_2+y_2+z_2)}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2)(x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2)}} \\ &\quad\le\frac{1}{4}\Big(\frac{x_2}{x_1+x_2}+\frac{y_2}{y_1+y_2}+\frac{z_2}{z_1+z_2}+\frac{x_2+y_2+z_2}{x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2}\Big). \end{aligned} \tag{10}$$

由不等式 (9) 和 (10) 即得不等式 (8), 故不等式 (7) 成立, 進而不等式 (4) 得證。由不等式 (4) 易得如下的推論:

推論1: 設 $\triangle A_jB_jC_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$ 的面積分別爲 $\triangle_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$, 又設以 $a''=\sum\limits_{j=1}^{n}a_j$, $b''=\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$, $c^n=\sum\limits_{j=1}^{n}c_j$ 爲三邊的 $\triangle A''B''C''$ 的面積爲 $\triangle''$, 則

$$\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\triangle_j}\le\sqrt{\triangle''}.$$

注1: 本文成文後, 作者發現不等式 (4) 爲已知結果 (參見 [2], [5]), 但文 [5] 是用 Minkowski 不等式的另一種形式來證明的。

3. 不等式(5) 的證明

爲了證明不等式 (5), 我們需要如下的引理。

引理1: (見 [8, p.27] 或 [10, pp.22-23]) 設 f 爲一在開凸集 $D\subseteq R^n$ 上有連續的二階偏導數的實值函數, 則 f 是凸函數當且僅當對任意 $x\in D$, 其海賽 (Hessian) 矩陣

$$Q_x=(q_{ij}(x))_{n\times n},\qquad q_{ij}(x)=\frac{\partial^2 f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_i\partial x_j}$$

是正定或半正定的。

作代換 (6), 則由三角形內切圓半徑公式可知不等式 (5) 等價於

$$\sqrt{\frac{x_1y_1z_1}{x_1+y_1+z_1}}+\sqrt{\frac{x_2y_2z_2}{x_2+y_2+z_2}}\le\sqrt{\frac{(x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2)}{x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2}}.\tag{11}$$

構造函數 $f(x,y,z)=-\sqrt{\dfrac{xyz}{x+y+z}}$, $(x,y,z)\in R_+^3$, 其中 $R_+=(0,+\infty)$。則其海賽矩陣爲

$$H_f=\begin{bmatrix}\dfrac{(4x+y+z)(y+z)y^2z^2}{4\left(\frac{xyz}{x+y+z}\right)^{\frac32}(x+y+z)^4} & \dfrac{-(3xy+yz+zx+z^2)xyz^2}{4\left(\frac{xyz}{x+y+z}\right)^{\frac32}(x+y+z)^4} & \dfrac{-(xy+yz+3zx+y^2)xy^2z}{4\left(\frac{xyz}{x+y+z}\right)^{\frac32}(x+y+z)^4}\\ \dfrac{-(3xy+yz+zx+z^2)xyz^2}{4\left(\frac{xyz}{x+y+z}\right)^{\frac32}(x+y+z)^4} & \dfrac{(x+4y+z)(z+x)z^2x^2}{4\left(\frac{xyz}{x+y+z}\right)^{\frac32}(x+y+z)^4} & \dfrac{-(xy+3yz+zx+x^2)x^2yz}{4\left(\frac{xyz}{x+y+z}\right)^{\frac32}(x+y+z)^4}\\ \dfrac{-(xy+yz+3zx+y^2)xy^2z}{4\left(\frac{xyz}{x+y+z}\right)^{\frac32}(x+y+z)^4} & \dfrac{-(xy+3yz+zx+x^2)x^2yz}{4\left(\frac{xyz}{x+y+z}\right)^{\frac32}(x+y+z)^4} & \dfrac{(x+y+4z)(y+z)x^2y^2}{4\left(\frac{xyz}{x+y+z}\right)^{\frac32}(x+y+z)^4}\end{bmatrix}.$$

易見 H_f 的所有一階主子式均大於 0; 二階主子式分別爲

$$\frac{(xy+yz+zx)z}{4(x+y+z)^3xy}>0;\quad \frac{(xy+yz+zx)y}{4(x+y+z)^3zx}>0;\quad \frac{(xy+yz+zx)x}{4(x+y+z)^3yz}>0.$$

而其三階主子式爲 0, 故由文 [13, p.257] 定理 8.5 知 H_f 爲一半正定矩陣, 因而由引理1 知 $f(x,y,z)$ 爲開凸集 R^3_+ 上的凸函數。所以

$$\frac{1}{2}[f(x_1,y_1,z_1)+f(x_2,y_2,z_2)]\ge f\Big(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\Big),$$

即

$$\frac{1}{2}\Big(\sqrt{\frac{x_1y_1z_1}{x_1+y_1+z_1}}+\sqrt{\frac{x_2y_2z_2}{x_2+y_2+z_2}}\Big)\le\sqrt{\frac{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{y_1+y_2}{2}\cdot\frac{z_1+z_2}{2}}{\frac{x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2}{2}}}. \tag{12}$$

不等式 (12) 即爲不等式 (11), 故不等式 (5) 成立。

4. 不等式 (5) 的應用

在 $\triangle A'B'C'$ 中, 由著名的 Walker 不等式 [3, p.173] 可得

$$\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c'^2}\le\frac{1}{4r'^2}\Leftrightarrow\frac{1}{(a_1+a_2)^2}+\frac{1}{(b_1+b_2)^2}+\frac{1}{(c_1+c_2)^2}\le\frac{1}{4r'^2}. \tag{13}$$

由不等式 (5) 可得

$$\frac{1}{r'^2}\le\frac{1}{(r_1+r_2)^2}. \tag{14}$$

由不等式 (13) 與 (14) 即可得

$$\frac{1}{(a_1+a_2)^2}+\frac{1}{(b_1+b_2)^2}+\frac{1}{(c_1+c_2)^2}\le\frac{1}{4(r_1+r_2)^2}. \tag{15}$$

不等式 (15) 即爲冷崗松教授在文 [1] 提出的猜想的二維情形。

由不等式 (5) 可得如下顯然的推論:

推論2: 設 $\triangle A_jB_jC_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$ 的內切圓半徑分別 r_j $(j=1,2,\ldots,n)$, 又設以 $a''=\sum\limits_{j=1}^n a_j$, $b''=\sum\limits_{j=1}^n b_j$, $c''=\sum\limits_{j=1}^n c_j$, 爲三邊的 $\triangle A''B''C''$ 的內切圓半徑爲 r'', 則

$$\sum_{j=1}^n r_j\le r''$$

結合 Walker 不等式 [3, p.173] 與推論 2, 我們可得如下比不等式 (15) 更一般的結果:

推論3: 設 $\triangle A_jB_jC_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$ 的三邊長分別 a_j、b_j、c_j $(j=1,2,\ldots,n)$, 內切圓半徑分別 $r_j(j=1,2,\ldots,n)$, 則

$$\frac{1}{\Big(\sum\limits_{j=1}^n a_j\Big)^2}+\frac{1}{\Big(\sum\limits_{j=1}^n b_j\Big)^2}+\frac{1}{\Big(\sum\limits_{j=1}^n c_j\Big)^2}\le\frac{1}{4\Big(\sum\limits_{j=1}^n r_j\Big)^2}.$$

5. 進一步的問題

注意到不等式 (2), 筆者試圖建立涉及 R_1, R_2 與 R' 的不等式, 但無結果。因此是否存在涉及 R_1, R_2 與 R' 的有趣的不等式是個值得探索的問題。考慮到 A. Oppenheim 的工作, 一個自然的問題是: 能否將不等式 (4) 推廣到圓內接凸 n 邊形? 再注意到楊路和張景中在文 [11, 12] 的工作, 另一個自然的問題是: 能否將不等式 (4) 和 (5) 推廣到 n 維空間的單形? 這個問題也許比較困難, 因爲目前我們尚不清楚以兩個 $n(n \geq 3)$ 維單形的對應棱長之和爲棱長能否構成另一個單形 (關於單形構造定理可參見文 [9, p.169])。

致謝: 衷心感謝審稿人提出的寶貴意見和建議!

參考文獻

1. G. S. Leng, Some inequalities involving two simplexes [J], *Geom. Dedicata*, 66(1997), 89-98.
2. D. S. Mitrinovic and J. E. Pecaric, About the Neuberg-Pedoe and the Oppenheim inequalities [J], *J. Math. Anal. Appl.*, 129(1988), 196-210.
3. D. S. Mitrinovic, J. E. Pecaric and V. Volenec , Recent Advances in Geometric Inequalities [M], Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, Boston, London, 1989.
4. A. Oppenheim, Problem 5092 [J], *Amer. Math. Monthly*, 70(1963), 444 and 71(1964), 444.
5. A. Oppenheim, Some inequalities for triangles [J], *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, No.357-380(1971), 21-28.
6. A. Oppenheim, Inequalities involving elements of triangles, quadrilaterals or tetrahedral [J], *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, No.461-497(1974), 257-263.
7. P. A. Parrilo and R. Peretz, An inequality for circle packings proved by semidefinite programming [J], *Discrete Comput. Geom.*, 31(2004), 357-367.
8. R. T. Rockafellar, Convex Analysis [M], Princeton University Press, New Jersey, 1996.
9. 沈文選, 單形論導引 — 三角形的高維推廣研究 [M], 長沙: 湖南師範大學出版社, 2000。
10. 王良成, 凸函數及其不等式 [M], 成都: 四川大學出版社, 2001。
11. 楊路、張景中, 關於 Alexander 的一個猜想 [J], 科學通報, 1981 年第 1 期, 1-3。
12. 楊路、張景中, 高維度量幾何的兩個不等式 [J], 成都科技大學學報, 1981 年第 1 期, 63-70。
13. 張賢科、許甫華, 高等代數學(第2 版)[M], 北京: 清華大學出版社, 2008。

—本文作者任教中國浙江省新昌縣浙江省新昌中學—