數學傳播 37卷3期, pp. 68-70

圓內接四邊形的一個有趣性質

吳 波

本文擬給出圓內接四邊形的一個有趣性質。我們先從凸四邊形的一個性質說起。

定義 1: 一個四邊形的四條內角平分線所圍成的四邊形叫做它的內平分四邊形。

注: 四邊形的內平分四邊形有可能退化成一點 — 此時該點即是這個四邊形的內心。

定義 2: 一個四邊形的所有外角平分線所圍成的四邊形叫做它的外平分四邊形。

性質 1: 四邊形的內平分四邊形和外平分四邊形都有外接圓。

這個性質的證明很容易, 因此略去。由此我們可作如下定義:

定義 3: 四邊形的內平分四邊形的外接圓叫做它的內平分圓。

定義 4: 四邊形的外平分四邊形的外接圓叫做它的外平分圓。

如圖1, 四邊形 $ABCD$ 四條內角平分線圍成內平分四邊形 $EFGH$, 所有外角平分線 (每個頂點處有兩條, 所以共有八條) 圍成外平分四邊形 $IJKL$。由性質 1 知 : 四邊形 $EFGH$ 和 $IJKL$ 都有外接圓, 即圖1中的 $\odot O_1$、$\odot O_2$。

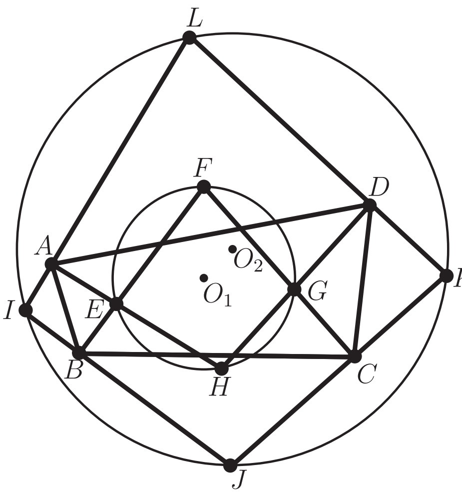

圖 1

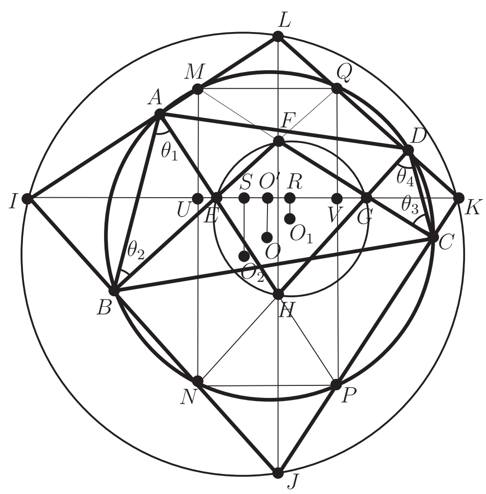

圖 2

問題: 如果四邊形 $ABCD$ 本身也有外接圓, 那麼它的外接圓與它的內、外平分圓有什麼樣的關係呢?

經過探討, 筆者發現有如下有趣結論:

性質 2: 圓內接四邊形的外心是其內、外平分圓的連心線的中點。

如圖2, 四邊形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的內接四邊形。四邊形 $EFGH$ 和 $IJKL$ 分別是其內、外平分四邊形。O_1、O_2 分別是其內、外平分圓圓心。設 $\angle DAB=2\theta_1$, $\angle ABC=2\theta_2$, $\angle BCD=2\theta_3$, $\angle CDA=2\theta_4$。

注意到圓內接四邊形對角互補, 因此有:

(i) $\theta_1+\theta_3=\theta_2+\theta_4=\dfrac{\pi}{2}$。

而同一頂點處內、外角平分線互相垂直, 則有

(ii) 有如下四個共圓四點組:

A、E、B、I; B、F、C、J;

C、G、D、K; D、H、A、L。

(iii) I、E、G、K 四點共線, J、H、F、L 四點共線, 且這兩條直線互相垂直。

(iii) **的證明**: 若 $AD//BC$, 則此時圓內接四邊形 $ABCD$ 爲等腰梯形或矩形, 此時易證 I、E、G、K 四點共線。

下設 AD 與 BC 不平行。此時易知 E、I 分別是直線 AD、BC 和 AB 所圍成的三角形的內心和旁心。因此 E、I 必在這個三角形的 AD、BC 所夾內角的角平分線上。同理 G、K 也在這條角平分線所在直線上, 因此 I、E、G、K 四點共線。

同理可證 J、H、F、L 四點共線。

又由結論 (ii) 可知 $\angle AIE=\angle ABE=\theta_2$, $\angle ALH=\angle ADH=\theta_4$。

則由結論 (i) 知 $\angle AIE+\angle ALH=\dfrac{\pi}{2}$, 因此有 $IK\perp JL$。

(iv) 圓內接四邊形一個頂點處的內角平分線與相對頂點處的外角平分線的交點必在這個四邊形的外接圓上。

如圖2, CM 是內角平分線, 與相對頂點 A 處的外角平分線 AM 的交點爲 M。我們證明 M 在 $\odot O$ 上。

事實上, $\angle MAD=\dfrac{\pi}{2}-\angle DAE=\dfrac{\pi}{2}-\theta_1=\theta_3=\angle MCD$。因此 M、A、C、D 四點共圓。即 M 在 $\odot O$ 上。如圖2, 同理可證另外三個交點 N、P、Q 也在 $\odot O$ 上。

(v) I、G 關於 MN 對稱; J、H 關於 NP 對稱; K、E 關於 PQ 對稱; L、F 關於 MQ 對稱。

(v) **的證明**: 由 (iv) 有 $\angle AMN=\angle ADN=\theta_4$, $\angle CMN=\angle CDN=\theta_4$, 所以

$\angle AMN=\angle CMN$。同理可證 $\angle BNM=\angle DNM$。由此易知 I、G 關於 MN 對稱。如圖 2, 其它三者同理可證。

(vi) 四邊形 $MNPQ$是 $\odot O$ 的內接矩形。

(vi) **的證明**: 在 (iv) 中已證四邊形 $MNPQ$ 內接於 $\odot O$。

如圖2, 由結論 (v) 知 $MN\perp IG$, 而由結論 (iii) 知 $IK\perp JL$, 則 $MN//JL$。同理 $MQ//IK$。而 $IK\perp JL$, 則 $MN\perp MQ$, 所以 $\angle QMN=\dfrac{\pi}{2}$。同理它的另外三個角也爲 $\dfrac{\pi}{2}$, 因此四邊形 $MNPQ$ 是 $\odot O$ 的內接矩形。

性質2的證明: 設有向線段 $\overline{IG}=2a$, $\overline{GE}=2b$, $\overline{EK}=2c$。且設 O_1、O、O_2 在 IK 上的正投影分別爲 R、O'、S。

注意到 O_1 是內平分圓圓心, 則 $\overline{GR}=\dfrac{1}{2}\overline{GE}=b$, 所以 $\overline{IR}=\overline{IG}+\overline{G}R=2a+b$。

注意到 O_2 是外平分圓圓心, 則 $\overline{IS}=\dfrac{1}{2}(\overline{IG}+\overline{GE}+\overline{EK})=a+b+c$。

設 MN 與 IG 相交於點 U, PQ 與 EK 相交於點 V。由 (v)：I、G 關於 MN 對稱, K、E 關於 PQ 對稱, 則：$\overline{UG}=\dfrac{1}{2}\overline{IG}=a$, $\overline{EV}=\dfrac{1}{2}\overline{EK}=c$。所以 $\overline{UV}=\overline{UG}+\overline{GE}+\overline{EV}=a+2b+c$。

又由 (vi)：四邊形 $MNPQ$ 是 $\odot O$ 的內接矩形且 $MQ//UV$, 則 $2\overline{UO'}=\overline{UV}=a+2b+c$。因此可算得 $2\overline{IO'}=2(\overline{IU}+\overline{UO'})=3a+2b+c$。

上述計算結果表明：$\overline{IR}+\overline{IS}=2\overline{IO'}$。由此可知：$O'$ 是 RS 的中點。

又設 O_1、O、O_2 在 JL 上的正投影分別爲 S'、O''、R'。同理可證 O'' 是 $R'S'$ 的中點。

也就是說, 線段 O_1O_2 在兩條相交直線上的正投影均被點 O 的正投影所平分。由同一原理即知：點 O 是 O_1O_2 的中點。 □

既有內切圓又有外接圓的四邊形稱爲雙心四邊形[1](或稱雙圓四邊形)。對雙心四邊形, 由性質 2 有

推論: 雙心四邊形的外心是其內心與外平分圓圓心連線的中點。

參考資料

1. 楊之, 初等數學研究的問題與課題。長沙: 湖南教育出版社, 1993, pp.95。

—本文作者任教重慶市長壽龍溪中學—