數學傳播 37卷3期, pp. 25-47

# 美國小學數學師資培訓教材《數的基礎理論》簡介

## ——兼論伍鴻熙教授的教育工作*

趙 潔 · 林開亮

數學課要講得孩子們有興趣。孩子們都是有好奇心的。他們對數學本來也有好奇心。可是如果教得不好, 把數學講得乾巴巴的, 扼殺了好奇心, 數學就難了。

陳省身 (見 [28])

如果我們希望得到更多更好的社會支持, 那麼作爲團體, 我們必須做得更好。特別的, 我們必須培養出更好的數學教師。我要非常謹慎地說, 促使我決定成爲職業數學家的最重要的人是 Lottie Wilson, 她是我從前的高中數學教師。Wilson 夫人讓人理解到她的課有一個本質的特徵, 她明白數學的崇高和神秘, 她還知道, 得到正確的答案無法用別的來代替。

P. A. Griffith (見 [12])

當然讀者要問, 是否必須要求學生學習正確的數學? 要知道, 不正確的數學是非理性的產品, 不是從按部就班、有跡可循的思路得到的結果。我們不可能要求中小學生學習這種不合情理的數學。譬如說, 要讓學生掌握“負負得正”而不講邏輯推理, 唯一的辦法就是說服學生某些數學只能死記硬背不能推理。一旦有了這個心理狀態, 學生難道還有希望去學習高深的數學嗎? 又譬如說, 一般的課本要求學生瞭解“變量”是什麼才能學習代數。在這種情況下, 學生們不免產生一種錯覺, 每見一個符號就提心吊膽, 以爲這個符號一定是一個在紙上跳動的“變量”。這種數學是能夠讓學生學習的嗎?

伍鴻熙

*參看本期 “K-12 數學教育的危機 — 伍鴻熙談美國中小學數學教育”

## 概述

近些年來, 中小學的數學教育引起了世界各國的數學家的廣泛關注, 其中的代表者有: 俄國的阿諾爾德 (Arnold [2, 3]), 美國的巴斯 (Bass [5, 6]), 匈牙利的羅瓦茲 (Lovász [16]), 中國的吳文俊 ([25])、姜伯駒 ([14]) 等。這裏我們要介紹的是美籍華人伍鴻熙 (Hung-Hsi Wu) 關於中小學數學教育的理念與工作。

爲了提高美國大、中、小學的數學教育水準, 加州大學柏克萊分校的知名數學教授伍鴻熙十年前正式轉行投身數學教育, 特別是爲中小學數學教師做師資培訓 [1]。伍教授的目標很明確, 就是要讓數學老師教好數學, 最終讓學生明白數學是能夠學懂的。近十餘年裏, 伍教授發表了多篇關於數學教育的文章, 見諸數學教育的各種期刊雜志、會議文集。[2]

在這十幾年裏, 伍教授對中小學數學作了系統的剖析, 融合師資培訓的經驗, 將其成果總結成三本師資培訓專著《數的基礎理論》([19])、《代數初步》與《中學代數導論》([20])、《高中數學課程 I-III》([21]), 分別適用於小學、初中、高中數學教師, 眞可謂“十年辛苦不尋常”。下面我們就來簡單地介紹一下這些專著。

《數的基礎理論》主要介紹了小學數學教師應該掌握的關於數的一些理論, 包括自然數、分數、有理數、無理數以及涉及的某些初等數論, 分別詳細地討論了這些概念及其運算性質。在首都師範大學數學科學學院李慶忠教授的鼓勵和丁潔、王盼盼、王麗芳等同學的幫助下, 筆者已將《數的基礎理論》翻譯成中文, 並計劃在進一步修訂審校以後交由北京大學出版社出版。本文第三節將對此書展開詳細的介紹與評述。

《代數初步》從分數講到初等幾何, 目的是要把初中代數所需要的一切知識都說清楚。特別值得一提的是, 書中對初等幾何的討論, 開始嘗試用直觀的方法解釋了“全等”與“相似”的基本概念, 然後用同樣直觀的方法解釋了兩個三角形“相似”的刻劃條件。這個處理初中幾何的方法, 是目前美國國家統一核心數學標準從初二到高中的幾何標準的基礎。《中學代數導論》介紹初等代數的基本概念, 包括正確運用符號、線性方程及其圖形 (爲什麼是一條直線)、函數的概念、一次與二次函數及其圖形, 等等。值得指出的是, 這部分說明了, 爲什麼懂得正確地應用符號就可以明白爲什麼“變量”是一個慣用的名詞而不是一個數學上的概念。另一方面, 這部分也指出了, 爲什麼配方的技巧是瞭解二次函數所有問題的基本工具。

《高中數學課程 I-III》內容涵蓋了分數、負數、初等數論、代數 (多項式、指數、對數、複數、代數基本定理)、幾何 (全等、相似、平面三角形的幾何、圓的幾何、面積與體積) 以及初等的微積分。

2010 年 6 月, 美國頒布了國家統一核心數學標準 (Common Core State Mathematics

---

[1]見伍鴻熙《數學教師的專業培訓》, 李志堯譯,《數學譯林》第19卷 (2000年) 第1期, pp. 67–76。

[2]一些代表性的文章可見於伍鴻熙教授的個人主頁, 請上網 http://math.berkeley.edu/∼wu。

Standard–以下簡稱 CCSMS[3] ), 這也是伍教授自始至終參與完成的。

2011 年 9 月, 伍教授在首都師範大學爲數學院的師生做了題爲“高觀點下的中小學數學”的系列講座[4], 其間筆者有幸與伍教授近距離接觸, 從而對伍教授關於數學教育的想法和工作有了進一步的瞭解。這裏筆者想談談我們的一點心得, 與各位讀者分享一下我們的點滴收穫。本文旨在引起讀者對伍教授所做工作的興趣, 最終目的則是希望引起教育同行們對數學教育的關注。

## 1. 伍教授其人

伍鴻熙, 1940 年出生於香港, 1961 年在哥倫比亞大學取得數學學士學位, 1963 年在麻省理工學院取得數學博士學位。他先後擔任過麻省理工學院和普林斯頓高等研究院的研究員, 1965-2009 年任教於加州大學柏克萊分校, 2009 年至今是該校名譽退休教授。1997-2005 年期間, 伍教授與加州政府就數學教育進行了全方位的合作。2000-2001 年任美國國家教育進展評估數學指導委員會委員, 2006-2008 年擔任美國總統的國家數學顧問組的成員。他目前是 2011 數學與自然科學項目TIMSS (Third International Mathematics and Science Study, 第三次國際數學和科學評測) 評審委員會成員。

伍鴻熙是知名的幾何學家, 是陳省身先生在柏克萊所營建的幾何王國的核心人物之一。他與學生 R. E. Greene 合作, 對複流形的曲率與函數論關係作了精細的研究, 得到了許多深刻的結果。受陳省身先生關於多複變函數的 Nevanlinna 理論幾何化觀點的影響, 他在微分幾何的框架下重新詮釋並進一步發展了 Ahlfors-Weyl 關於全純曲線的 Nevanlinna 理論, 並形成專著 The equidistribution theory of holomorphic curves, 作爲 Princeton 大學 Annals of Mathematics Study 叢書第 64 號出版。他還與薩克斯 (R. K. Sachs) 合作寫了一本 General relativity for mathematicians, 這本書作爲 GTM 叢書第 48 號出版, 並且有蕭欣忠先生的中譯本《廣義相對論: 給學數學的人》(臺北曉園出版社出版)。

在陳省身先生的帶動與鼓舞下, 伍教授多次回中國講學, 其講義經整理出版的有《黎曼幾何引論》、《黎曼幾何選講》、《緊黎曼曲面引論》。這些著作膾炙人口、引人入勝, 深受讀者歡迎, 培養了廣大本科生和研究生對幾何的興趣, 掀起了國內學習、研究幾何的陣陣熱潮, 造就了一批又一批年輕的幾何學者。

從 1992 年起, 伍教授開始關注數學教育工作。他注意到, 當時的中小學數學教育體系、教育方式以及教材中存在一系列問題。由於教師不能給予正確的指導, 學生受不到正確的數學教育, 以致逐漸喪失了學習數學的信心。作爲數學家, 他認爲僅僅提出這些問題是遠遠不夠的, 關鍵是要想辦法解決這些問題。如果僅僅指出問題而不提出解決問題的方法, 那麼隱含的意思就

[3]讀者要瞭解更多關於 CCSMS 的情況, 可參見 [22] 或上網 www.corestandards.org。

[4]關於這次講座的報導, 可見 [9]。

是這些問題很容易解決。但事實上, 對於數學教育來說, 我們必須重新思考數學知識方面存在的種種誤區。如果數學家想致力於改進數學教育而不僅僅是想引發爭論, 那麼他們就應該努力針對每個問題進行解決。正是這種想法促使伍教授逐漸轉行走上了數學教育之路。

從 2000 年起, 伍教授開始在美國組織一年一度的爲期三周的中小學數學暑期師資培訓, 這一項目陸續受到了加州政府、洛杉磯教育辦公室、Stephen D. Bechtel. Jr. 基金會的資助。這種師資培訓以數學知識爲主要載體, 經受住了時間的考驗, 逐漸得到了大衆的認可。十多年來, 受到培訓的教師的人數已成百上千, 並且還將有更多的教師因此而受益。

2008 年, 在從事數學教育近十年之後, 伍教授在第四屆世界華人數學家大會中學數學教育論壇上 (見 [18]) 談到了他的三點心得:

第一, 數學教育是"數學工程", 與"數學"有異;

第二, 數學家如要改善數學教育, 需要作建設性的批評;

第三, 數學家應該致力於師資培訓。但要有收穫, 就需要對中小學數學有深切的認識。

## 2. 伍教授談中小學數學教育存在的主要問題

伍教授認爲, 美國中小學數學教育的問題主要來自於三個方面: 教師、教材和師資培訓。同樣的問題在大陸也相當嚴重, 下面我們就分別來談一談這三個方面的問題。

### 2.1. 教師方面的問題

伍教授認眞思考美國中小學數學教育的問題根源所在, 得出這樣一個驚人的結論 (見 [29]): "在美國, 中小學數學教育的最大問題是, 很多中小學數學教師不懂數學。" 伍教授舉例說, 有的數學教師甚至不明白定義和定理之間的差別。根據在三大洲 (北美洲、亞洲和大洋洲) 進行的教師培訓的經驗, 他發現, 這種情況其實很普遍。

如果教師對他所講授的學科缺乏很好的理解(見 [23]), 而妄圖"以其昏昏使人昭昭", 那麼後果可想而知, 他根本不可能教好學生。反之, 如果教師對所教的科目有透徹的瞭解, 他本人的腦海中有一幅整體上淸晰的圖景, 那麼他教好這門課的可能性就大得多。舉例來說, 美國當代著名數學家格列菲斯 (Griffiths) 就是因爲有幸遇到了這樣一位出色的高中數學教師而對數學發生興趣並最終走上了職業數學家的道路 (見本文標題下的第二段引用), 在另一個場合, 他這樣說道 (見 [8, 第48頁] 的結尾部分):

> 在當今世界, 科學知識尤爲重要。許多工作都要求具備定量的、分析的技能。科學所教給你的事實就是基於論據推理 (evidence-based reasoning) 的精神, 而我們正是在這一點上失敗了。要成爲本國的好公民, 你需要對科學有一般的認識。看看進

> 化論的爭辯、看看新聞和報紙上的種種資料, 你會發現: 事實上, 對於進化論的大意以及如何理解新聞報紙上的資料, 許多人連最模糊的觀念都沒有。
>
> 造成這一問題的部分原因在於學校的教學。教學體系的教師主要來自於教育院校。他們更多地停留在教學技能的層面而並沒有深入到教育的本質部分。一個數學教師, 哪怕是一個小學數學教師, 都應該對這個科目有一個碩士水準的瞭解。唯有具備了如此深刻的瞭解, 你才能用一種簡單的方式更好地去教初等的內容。否則, 你可能會弄得不必要地過分複雜。威爾遜 (Wilson) 夫人, 我的第一個數學教師, 絕對是一個富有天分的數學家, 這一點使她成爲一個偉大的教師。

格裏菲斯是幸運的, 但幸運往往只屬於少數人。事實上, 好的數學教師並不多見。讓我們來看看世界著名的"雜交水稻之父"袁隆平的經歷 (見 [27, 第18–19頁]):

> 我在學習方面喜歡憑興趣, 從小學到中學直到大學都是這樣: 對喜歡的功課, 就特別注意聽講, 還讀這方面的參考書, 成績就很好; 不喜歡的, 就考 60 分, 只求及格就行。我喜歡地理、外文, 化學我也喜歡, 我考試就拿高分。我最不喜歡數學, 得 60 分就心滿意足。記得當時學"負數乘以負數得正數"時, 我很不理解, 說正數乘以正數得到的是正數, 這還好理解, 爲什麼負數乘以負數也得正數? 我就問老師爲什麼, 老師不講, 只要我呆記。我不懂, 那怎麼呆記呢? 要講道理呀! 從此我便對數學不感興趣了。

可以想見, 像袁隆平一樣, 絕大部分學生遇見這樣的教師唯有"敢怒不敢言" (正如伍教授在做報告時所說的)。長此以往, 學生不僅會泯滅對數學的興趣, 甚至會喪失對教師的信任。可以說, 學生學不好數學, 教師應負大部分的責任。再來看袁隆平的例子, 事實上, 不懂"負負得正"的中小學生何止他一個, 最有趣的一個例子居然是後來成爲大數學家的吳文俊先生, 這也是袁隆平透露給我們的 (見 [27, 第184–185頁]):

> 記得有一件十分有趣的事, 就是這次到北京, 中央電視臺對我和吳文俊先生做一個專訪的節目。這是我們兩人頭一次見面, 但卻是一見如故, 相談甚歡。······ 我又說起小時候數學成績不好, 初中時向老師提問爲什麼"負負得正", 到現在還是沒有弄清楚。吳老聽後大笑起來。後來聽說, 原來他老先生在中學時對"負負得正"也是很不理解的。結果呢, 他知難而進, 成了大數學家。

由此可見, "負負得正"的問題絕非個人案例, 古今中外, 概莫能外。事實上,《數的基礎理論》第 29 章 (這一章的標題就是 負負得正) 開篇的一句就是: "可以說, 在中小學數學中, 學生問得最多的問題就是 負負得正的問題。" 據筆者所知, 這個問題不僅僅是學生的問題, 也是許多中小學數學教師的問題 — 他們根本無法向學生解釋清楚爲什麼"負負得正"。

## 2.2. 教材方面的問題

伍教授指出的第二個問題是中小學數學教材中存在的各種問題: 基本概念缺乏淸晰的定義、數學推理論證含糊不淸、數學符號的使用不恰當、內容設置缺乏整體的把握等。伍教授在 [29] 中說道, “中小學課本不及格, 幾乎完全不是數學。$\cdots\cdots$ 美國的中小學課本幾乎沒有定義, 2 除以 3 弄不清, 分數學不了, 數學的基本精神沒有了。”[5] 同樣的問題也暴露在大陸的中小學數學教材中。事實上, 早在 1980 年代, 中國著名數學家蘇步青敎授就曾指出合理編寫中學教材的重要性, 他在 [17] 中說道:

> 其次, 要做好教材的編寫工作。教材是進行教學的工具。$\cdots\cdots$我把美國、德國、俄國、日本等國家的中學數學和理科課本翻閱了一遍, 覺得有些地方值得借鑒。現在, 我國中學數學和理科教材, 比較重視基礎知識和基本技能, 注重啓發學生的智力和培養學生的能力, 這是好的。但是, 有些內容陳舊, 需要更新; 有些內容濃縮、跳躍, 如中學代數, 把幾何、三角混合編排; 不少教師反映, 按這樣的順序講課不習慣。因此, 編寫教材也要廣泛地徵求中小學教師和科研部門專家的意見和建議, 進行適當修改, 編出一套比較理想的教材。

## 2.3. 師資培訓方面的問題

當然, 對於教師和教材中出現的問題, 我們不能簡單地將責任全部推卸給教師與編者, 還要追究到他們所接受的教育上。伍敎授指出 (見 [29]): “不論是職前的還是在職的對中小學教師的師資培訓, 到目前爲止, 常常文不對題, 教師們學到的數學與他們敎的數學離題萬里。” 如果教師自身所接受的培訓不完善不合理、甚至帶有根本性的錯誤, 那麼他們誤人子弟就在所難免了。

首先, 職前的師資培訓, 也就是大學裏爲師範生所開設的課程, 通常只涉及高等數學, 如微積分、線性代數、解析幾何、抽象代數等等。這些課程講解的都是正確的數學知識, 具有完整的理論體系, 強調精確的邏輯推理, 有助於教師更深刻地理解數學。但是, 未來的教師不僅要瞭解高等數學, 更要學會給中小學生講解他們能夠接受的 (acceptable) 初等數學。我們仍用“負負得正”來說明。假定我們的出發點是分配律, 那麼“負負得正”就是其必然推論。伍敎授在 [22] 的一篇附錄中提到, 在大學水準下, 可以對所有的實數給出一個邏輯嚴密的證明:

> 我們首先來證明, 對於任意實數 $x$ 和 $z$ 都有 $(-x)z=-(xz)$。注意到如果一個數 $A$ 滿足 $w+A=0$, 那麼 $A=-w$. 現在如果 $A=(-x)z$, 由分配律意味著 $xz+A=xz+[(-x)z]=(x+(-x))z=0\cdot z=0$。所以, 事實上有 $(-x)z=-(xz)$。對於給定的 $y$, 如果我們令 $z=-y$, 這就推出 $(-x)(-y)=-(x(-y))$。

[5]早在 1970 年代初, 著名的物理學家費曼 [10] 就指出了的美國 1960 年代“新數學”運動產生的一些數學教材的諸多弊端。

> *現在設 $B=(-x)(-y)$, 要證明 $B=xy$, 只需要證明 $xy-B=0$。這是對的, 因爲 $xy-B=xy-[-(x(-y))]=xy+x(-y)=x[y+(-y)]=x\cdot 0=0$。這就是我們要證明的。*

這個證明無懈可擊, 但是卻因爲太抽象了而難以爲中小學生所理解。作爲比較, 讀者可以在本文第 3 節找到負負得正的一個初等證明。

再如, 兩個分數 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 的乘法是 $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$。從抽象代數的立場來看, 這個公式完全是一個定義。這個公式使得我們可以在整環 (integral domain) 的分式域 (quotient field) 上引進乘法結構, 確定了 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 的乘積爲 $\frac{ac}{bd}$。但是, 如果從中小學的眼光來看, 這個公式則是一個大定理。因爲中小學生根本不知道什麼是整環, 什麼是其分式域。他們只懂得兩個整數相乘的含義 (例如 $12\times 27=\underbrace{27+\cdots+27}_{12}$)。所以我們要從這個出發點去定義兩個分數的乘積。然後再用這個定義去證明乘積公式 $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$。這是一個太平凡的證明! 所以, 如果在中小學數學中我們說 $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ 是一個定義, 那就大錯特錯了。這就是不正確的數學的一個典型例子。

由上面兩個例子可以看出, “正確的中小學數學”與“正確的抽象數學”可能有天壤之別。目前在討論中小學數學時, 許多師範類專業學生對“數學正確性”的瞭解, 還只停留在“正確的抽象數學”的階段, 而對“正確的中小學數學”一無所知。所以, 大學裏的師範類數學專業需要設置專門的針對性課程, 幫助未來的教師更好地講授初等數學。對此, 伍鴻熙教授打了一個巧妙的比方: *拉丁語是法語的起源語言, 而且比法語更複雜。那麼爲了造就一名好的小學法語教師, 難道讓他們只學習拉丁語就夠了嗎?*

此外, 大學的數學師範類課程中通常也開設了一些由教育學方向的教師講授的教學方法類的課程。伍教授認爲, 這些教育理論確實有必要學習, 但更好的辦法應該是, 把要教的正確的數學知識融入到這些理論框架中去。這就要求, 數學界與教育學界一起合作共同設置合理的課程, 確保未來的數學教師既能對數學有深刻的理解, 又能懂得如何正確地講授中小學範圍內的數學。

其次, 在職教師的師資培訓也是一項巨大的工程。多年來, 數學師資培訓裏充斥了複雜的教育理論、課堂教學策略、教具使用、教學效果評估等等。這些對於教學固然重要, 但最重要的還應當是所講授的知識本身 — 正確的數學。許多在職的數學教師多年積累下來的教學經驗大多是基於不合理的數學 (參見本文標題下第三段引言), 所以, 更有價值的師資培訓應當以正確的數學知識爲主要內容。

## 3.《數的基礎理論》簡介

### 3.1. 總論

總的來說, 伍教授的這些著作 [19, 20, 21] 都是針對“正確的中小學數學”而寫的。就是說, 這些書是根據從小學到高中的數學課程而寫的。所以書中的一切概念和推理, 都是可以適用於

中小學課堂的正確的數學 (而不是爲了追求嚴格性而寫的數學)。伍教授之所以非常強調正確的數學, 是因爲他發現, 目前公衆對中小學數學的誤解恰恰在於, 他們認爲學校講授的數學基本上是正確的。但事實上, 如果去翻看中小學數學教材, 很容易就看到錯誤百出。所以, 當務之急就是要更正這些錯誤, 確保所講授的數學是正確的。本著這一宗旨,《數的基礎理論》的致讀者部分這樣結尾 :

> 我希望你們已經開始發現, 閱讀這本書需要費大力氣, 這樣才能保證學到並講授正確的數學。正確的數學比不正確的要好教, 正如好文章比差文章要容易讀。你所下的功夫最終將有助於你成爲一個更出色的數學教師。這便是本書要講的全部內容。

談到伍教授的這些著作, 筆者忍不住想要將它們與 20 世紀最有影響的兩個數學教育家克萊因 (F. Klein, 1849-1925) 的著作《高觀點下的初等數學》([15]) 和弗蘭登塔爾 (H. Freudenthal, 1905-1990) 的著作《作爲教育任務的數學》([11]) 做一個比較。

先來看弗蘭登塔爾《作爲教育任務的數學》。正如作者在序言 (見 [11, 第4頁]) 中所說的, "本書雖然也研究了許多細節, 但它首先絕對是一本數學教育哲學的書。" 他在書中研究了哪些課題是可以教的, 提綱挈領地論述了中小學數學的一些基本課題, 強調要將近代數學的某些思想滲透到中小學數學中去。可以發現, 伍教授《數的基礎理論》與之形成鮮明的對比 :《作爲教育任務的數學》是構建抽象理論框架, 宏觀概括地指出問題, 談的是一種理想和目標; 而《數的基礎理論》則是論述具體的基本數學知識, 直面學生可能遇到的各種問題並一一化解, 處理的是現實和實踐。我們舉一個例子以說明《作爲教育任務的數學》的風格 (見 [11, 第201頁]) :

> 乘法的矩形模型關於兩個因數是對稱的, 但是當具體的數量相乘時就失去了對稱性: 如果件數乘以單價、工作時數乘以小時工資, 月數乘以30, 那麼在乘數與被乘數之間或多或少地存在著明顯的區別。
>
> 教學法專家在除法中覺察到了這個不對稱性, 由於除法是一種高度直觀的運算, 所以 "5 個人分 20 塊麵包, 每人分多少?"與"20 塊麵包, 每個人分 4 塊, 可以分給多少人?"兩者從直觀上來看, 就是截然不同的事情。前者 20 塊麵包由 5 個人分稱爲分配除法, 後者 20 塊麵包除以 4 塊麵包是比的除法。這就要求學生用不同的方法解兩個問題, 特別是, 兩種情況下的長除法是不同的。
>
> ......
>
> 我也認爲, 應該訓練學生解兩類問題, 例如, "4 乘以什麼數等於 20?"與 "什麼數乘以 4 等於 20?"等等。但是, 不要在每一種情況下得出一個特殊的法則, 而應理解爲它們具有共同的模型, 所以一種法則就足夠了。我之所以提出這個問題, 就是因爲, 如果某些教學法專家不是從量的基礎理論出發來考慮除法, 那麼除法的兩重問題就會一代一代地死灰復燃。

弗蘭登塔爾這裏所說的“除法的兩重問題”在《數的基礎理論》§7.1 中有詳細的討論, 分別被稱爲等分除解釋 (partitive interpretation) 和包含除解釋 (measurament interpretation)。伍教授進一步指出, 除法的這兩種解釋相互對偶, 因爲乘法滿足交換律。

再來看克萊因的《高觀點下的初等數學》, 伍教授在首都師範大學所做報告的大標題是“高觀點下的中小學數學”, 看似與此非常相像, 實則大相逕庭。吳大任先生曾經爲中譯本寫了專門的介紹 (見 [24]), 對這三卷書贊譽極高。這一點不容否認: 一個中小學數學教師如果能把這三卷書讀下來, 那麼他的修養必定可以得到極大的提高。但是, 應該坦白承認, 這三卷書其實並不適合教師直接應用於中小學數學課堂。因爲該書要求讀者事先掌握了初等數學, 然後再進一步拔高, 這就是克萊因所謂的“高觀點下的初等數學”。事實上, 這一點早就被弗蘭登塔爾指出過了, 他在 [11, 第155頁] 如是說:

> 有許多初等數學的現象只有在非初等的理論框架下才能深刻地理解。克萊因的觀點就是想爲教師日常的課堂活動提供一個科學的背景。但是, 克萊因在《高觀點下的初等數學》中提供的背景對中學教師而言, 只能作爲周末的風景觀賞, 卻不能作爲間接的手段進入課堂。因此, 不能影響中學數學。例如, 克萊因詳細說明了伽羅瓦理論是中學求解二次方程、三次方程的背景, 但是, 事實上伽羅瓦理論高踞於中學數學水準之上。

因此, 克萊因《高觀點下的初等數學》對中小學數學教師的教學過程並不能有直接的幫助。相比之下, 伍教授的這套師資培訓教材則是直接論述教材中的基本知識, 直面學生有可能遇到的理解上的困難和疑惑, 所以對改進中小學的數學教學會有立竿見影的效果。

## 3.2.《數的基礎理論》的基本特色

根據筆者的體會和理解, 總結起來,《數的基礎理論》一書至少有以下十點基本特色:

**一、等級森嚴: 循序漸進。**

這本書是寫給中小學數學教師的, 但基本上是從零開始, 除了要求讀者對基本的加減乘除四則運算有所瞭解以外, 不需要任何其他的準備知識, 所以即便是對一般的讀者 (特別地, 包括學生家長) 來說, 讀這本書也應該是毫無困難的。正是因爲這本書沒有對讀者做過多的要求, 所以在材料的選擇和內容的安排上, 先後次序非常有講究。本書的主題是數 (numbers), 內容上分爲五個部分, 依次分別是: 自然數、分數、有理數、初等數論、小數。除了初等數論以外, 這些課題都是中小學數學中的常規內容 (對於初等數論, 我們將在下面第六款中討論)。這一安排不僅遵循了各個課題之間內在的等級結構 (hierarchical structure), 而且符合中小學生學習數學的循序漸進的規律。

**二、語言清晰: 概念的定義非常明確。**

學習數學最重要的一點就是學會邏輯推理, 而定義是進行邏輯推理的基礎。數學中所討論的對象都應當非常清晰、具體, 否則容易給往後的邏輯推理造成不必要的麻煩。本書最大的特色之一是, 對所有論及的基本概念都給出了精確的定義 (precise definition)。例如, 數、分數、小數、有理數以及數的四則運算等基本概念甚至四捨五入的概念在本書中都能找到清晰的定義。舉例來說, 分數的乘法在書中定義爲:

$$\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}\times\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{l}}=\text{邊長爲 }\frac{m}{n}\text{ 和 }\frac{k}{l}\text{ 的矩形的面積。}$$

再如, 書中將有限小數定義爲一類特殊的分數:

> 有一類分數比較特別, 值得在一開始就單獨指出來, 即分母是 10 的某個正整數次冪的分數, 如:
>
> $$\frac{1489}{100},\quad \frac{24}{100000},\quad \frac{58900}{10000}。$$
>
> 這些分數被稱爲“十進制分數”。不過, 使用另一種記法和稱謂可能更容易理解。1593 年, 德國傳教士、天文學家克拉維烏斯明指出, 如果我們捨棄分數的形式, 一個十進制分數可以更容易地以如下方法寫出: 只寫出分子, 並用所謂的小數點記錄分母中有多少個 0 (上述十進制分數中第一個有 2 個 0, 第二個有 5 個 0, 第三個有 4 個 0), 於是上述分數相應地改寫爲:
>
> $$14.89,\quad 0.00024,\quad 5.8900,$$
>
> 用這種小數點的方式寫成的數稱爲有限十進制小數或有窮十進制小數。

作者進一步強調了這一定義的合理性:

> 就學習數學而言, 本書中小數的這一定義可能給讀者造成第一個嚴峻的障礙。我們來重複闡述一下主要內容: 一個小數, 例如 0.0938, 它本身的意義是一個分數, 即 $\frac{938}{10^4}$。你可能會將小數的這一特殊“解釋”認爲是開玩笑, 對此不加以太多的注意, 然後接下來就全部忘記。然而, 小數這一定義的作用正是在於要求你重新思考已學過的小數的知識, 並以此定義作爲出發點重新整理所學的知識, 來對已有知識作一個整體的新的評價。這可並非一件容易的事情, 因爲你已經習慣於認爲 5.89 表示 5 個 1, 8 個 $\frac{1}{10}$, 9 個 $\frac{1}{100}$ 之和, 並不考慮它是什麼意思, 也不考慮這樣定義會在將來用小數計算時給你帶來多大麻煩。我們也深深理解, 要接受一個全新的定義需要下很大的功夫, (其難度無異於學習一門新的語言), 我們也會在後續的章節中盡最大可能幫助你理解。不過仍然需要你自己努力, 因爲如果不親自動手, 小數部分的知識對於你來說將永遠很難對付。

還有一個例子特別值得在這裏一提, 這就是第18章引入的等速運動的定義。伍教授注意到, 在中小學數學文獻中, 人們很難找到等速直線運動的準確定義, 於是幾乎所有與運動有關的問題都要麼是通過單位變化率來做, 要麼是通過比例推理來做, 而不是數學推理。他寫道, 如果在要求學生求解運動問題之前卻沒有預先告訴他們需要知道哪些條件, 那麼這絕對不會是成功的教育。

有鑒於此, 伍教授在本書中第 18 章第 293 頁對等速運動給出了一個精確的定義:

> 若一個物體在任意的時間段 $t$ 內的平均速度 $\frac{d}{t}$ 都等於某個固定的 $v$, 則稱這個物體做的是等速運動。

此外, 對於讀者可能不明白的較爲陌生的一般觀念, 書中常常以脚注的形式加以解釋。例如, 第 17 章的論證中第一次出現了引理 (lemma) 的概念, 伍教授就在脚注中作出說明: "在數學中, 引理也是一個定理, 但是人們對它的興趣略遜一籌, 它的特點是, 通常帶有一定的技巧性, 但可能不是作者要寫的最本質的東西。"

筆者之前曾經見過法國當代著名數學家塞爾 (Serre) 曾在 [8, 第144頁] 對引理作出如下詮釋:

> 我應該解釋一下引理是什麼嗎? 登山者從一級上到更高的一級需要支撑, 引理就是數學家的支撑。

爲此, 筆者曾向伍教授建議在中譯本中添加一個譯者注作爲補充, 引用塞爾先生的上述絕妙比喻, 伍教授欣然採納了這一建議, 並且一再對譯者授權說, 凡是有助於讀者理解的提議, 都可以大膽採用。

**三、邏輯嚴密: 推理論證井井有條。**

該書對中小學數學中的諸多基本事實都給出了清晰明瞭的證明, 這些證明往往都是從定義出發, 一步一步、環環相扣地推導, 每一步都有理可循, 而且言簡意賅、要言不煩。

作爲例子, 我們來看第 13 章對於等值分數定理的證明。

> 給定分數 $\frac{m}{n}$, 我們要證明, 對於任意非零自然數 $c$, 有
>
> $$\frac{m}{n} = \frac{cm}{cn}.$$
>
> 我們知道, $\frac{m}{n}$ 表示 $m$ 份 $\frac{1}{n}$, 下面證明它也表示 $cm$ 份 $\frac{1}{cn}$。在數線上, 首先考慮 $\frac{1}{n}$ 的所有倍數, 接著考慮 $\frac{1}{cn}$ 的所有倍數, 把 $\frac{1}{cn}$ 的每兩個相鄰倍數之間的線段稱爲小線段。則對於 $\frac{1}{n}$ 的任意兩個相鄰倍數之間的線段來說, 小線段把它分成 $c$ 個相等的線段。

此時, 觀察到, $\frac{1}{n}$ 的任意兩個相鄰倍數之間的線段長度為 $\frac{1}{n}$, 每個小線段的長度為 $\frac{1}{cn}$。而前者恰為由 $c$ 個小線段拼接而成, 所以 $\frac{1}{n}$ 表示 $c$ 份 $\frac{1}{cn}$。由於 $\frac{m}{n}$ 表示 $m$ 份 $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}$ 表示 $c$ 份 $\frac{1}{cn}$, 所以 $\frac{m}{n}$ 表示 $cm$ 份 $\frac{1}{cn}$, 而 $\frac{cm}{cn}$ 也表示 $cm$ 份 $\frac{1}{cn}$, 這樣我們就證明了 $\frac{m}{n}=\frac{cm}{cn}$。這就證明了等值分數定理。

書中還有很多這樣的例子, 第 17 章對分數的乘積公式的證明, 第 27 章對“去括號”法則的證明等等, 也都是從精確的定義出發。再如, 對等速運動問題的求解都是基於等速運動的定義。

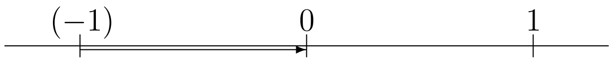
## 四、由簡到繁: 從特殊到一般。

書中的論述和證明常常遵循這樣一個模式: 先討論一個特例, 揭示其關鍵點所在, 然後將特殊情形下的論證推廣到一般情況。例如, 書中對“負負得正”的證明, 先考慮一個重要的特殊情況 $(-1)(-1)=1$, 然後過渡到對所有的正整數 $m, n$ 來證明 $(-m)(-n)=mn$, 最後才對任意的有理數 $x, y$ 證明$(-x)(-y)=xy$ (負負得正)。下面我們依次援引 [19, 第406頁] 給出的證明。

首先來看最特殊情況下的負負得正:$(-1)(-1)=1$。

**定理**: $(-1)(-1)=1$。

**證明**: 令 $z=(-1)(-1)$。我們的目標是證明 $z=1$。首先想想: 對於有理數 $z$, 如何證明它是否等於 1? 可以嘗試的一種方法是, 驗證 $z$ 是否滿足 $(-1)+z=0$。如果是, 則 $\vec{z}$ 是方向向右長度為 1 的向量, 如下圖所示是從以 $-1$ 為起點 0 為終點, 因此有 $z=1$。[6]




通過計算有

$$\begin{aligned}(-1)+z &= 1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1) && \text{(根據(M2) 以及 } z \text{ 的定義)}\\ &= (1+(-1))\cdot(-1) && \text{(分配律)}\\ &= 0\cdot(-1)\\ &= 0。 && \text{(根據(M3))}\end{aligned}$$

所以可得 $z=1$, 也就是 $(-1)(-1)=1$。證畢。

**注**: 這裏的 (M2), (M3) 是對有理數的乘法所作的三條基本假設的第二條和第三條, 分別是: (M2)如果 $x$ 是任意的有理數, 那麼 $1\cdot x=x$; (M3)對任意有理數 $x$ 有 $0\cdot x=x\cdot 0=0$。

[6]這與化學中處理問題的方式完全相似: 要驗證一種溶液是否呈酸性, 只需要用 pH 試紙驗證是否變紅。([19] 原注。)

接下來我們再來看正整數情況下的負負得正: $(-m)(-n) = mn$。

$(-m)(-n) = mn$ 在一般情況的證明與前面的特殊情況本質上是一樣的。

我們首先證明, 對任意的正整數 $n$ 有

$$(-1)(-n) = n。 \tag{$*$}$$

根據"去括號"法則,

$$-n = -(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n}) = \underbrace{(-1) + \cdots + (-1)}_{n},$$

因此

$$\begin{aligned}(-1)(-n) &= (-1)\Big(\underbrace{(-1) + \cdots + (-1)}_{n}\Big)\\ &= \underbrace{(-1)(-1) + \cdots + (-1)(-1)}_{n} \quad \text{(根據分配律)}\\ &= \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} \quad \text{(根據上述定理)}\\ &= n,\end{aligned}$$

這就是我們要證明的。因此, 對任意的正整數 $m, n$ 有

$$\begin{aligned}(-m)(-n) &= (\underbrace{(-1) + \cdots (-1)}_{m})(-n) \quad \text{(根據"去括號"法則)}\\ &= \underbrace{(-1)(-n) + \cdots + (-1)(-n)}_{m} \quad \text{(根據分配律)}\\ &= \underbrace{n + \cdots + n}_{m} \quad \text{(根據 ($*$))}\\ &= mn。\end{aligned}$$

對於 $m, n$ 是任意有理數的情形, 留給有興趣的讀者, 可參見 [19, 第409–410頁]。

## 五、評論中肯: 示人以樸。

本書中穿插著許多注記 (remark)。這些注記往往是小結性的, 通常一針見血地指明問題的關鍵所在。比方說, 對於某些結果, 書中給出了不止一個證明, 有的是計算性的, 有的是概念性的, 伍教授在注記中對各個證明做了比較和點評, 評語切中肯綮, 使人讀了眼前一亮, 仿佛若有光。

例如, 大概很少有人思考這一問題: 爲什麼長除法 (the long division algorithm) 最後可以得出 (除法的) 商和餘數, 伍教授在書中一個具體舉例之後點評:"長除法通過把原來的除法

分解成一系列簡單的帶餘除法, 使得人們可以簡單地甚至是機械地求出商和餘數。” 這就點明了長除法的實質!

又如, 在第 27 章從定義出發直接證明了“去括號”法則以後, 我們可以讀到以下

**注記**: 學生推導“去括號”法則的通常方法是“乘以 $-1$ 並應用分配律”, 亦即,

$$-(x+y)=(-1)(x+y)=(-1)x+(-1)y=-x+(-y)=-x-y,$$

這個計算是正確的, 但是對於“去括號”法則的證明來説卻顯得有些繁瑣。上述計算應用了下述事實, 即, 對於所有的有理數 $x$ 有 $(-1)x=-x$。這是關於有理數乘法的一個事實, 要在講有理數的乘法時才能證明。然而, 對“去括號”法則的一個概念上的理解需要認識到, 它們僅僅與有理數的加法和減法有關, 而與乘法無關。因此, “去括號”法則的一個更直接的證明是很有價值的。

這個注記表明, “去括號”法則的實質並非我們通常誤以爲的“乘以 $-1$ 並應用分配律”, 而是最基本的有理數加減法 (乘法的概念是不需要的)。

古人云: 良工不示人以樸。[7] 近代著名數學家許寶騄 (1910–1970) 則推崇在教學上要做到“良工示人以樸”, 他的意思是, 要把原始的、眞實的思想講解給學生, 而在形式上、在證明方法上要力求簡明扼要而無冗言贅文。簡而言之, 就是以樸素的方式說清楚本質。按照這一說法, 伍教授確實做到了“示人以樸”。

### 六、內容新穎: 中小學數學基本假設和初等數論的引入。

伍教授還注意到, 在中小學數學中, 有一個基本假設不可或缺, 這就是他所命名的中小學數學基本假設 (Fundamental Assumption of School Mathematics)。這是他對中小學數學教材的一個重大貢獻, 他在《數的基礎理論》中用了整整一章 (第 21 章) 的篇幅討論這個假設。

> 中小學數學有意避開討論無理數, 但卻試圖假裝處理了包括有理數和無理數在內的所有實數, 這一事實直到 2001 年的文獻中似乎還沒有明確說清楚。
>
> 從普通的教科書中可以推斷出, 這些教材隱含地要求學生掌握下面的假設, 我們建議稱作中小學數學基本假設:
>
> 分數的所有代數運算的結論都可以推廣到全體實數。
>
> 這是一個洞察很深刻的假設。它允許學生像處理分數一樣處理無理數, 即使不知道無理數是什麼。因此有的學生不經思考就能夠寫出下面一類典型的式子:
>
> $$\sqrt{2}(\sqrt{3}+\pi)=\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{2}\pi,$$

[7]本意是, 好的木匠不把未加工好的東西給人看。比喻有賢德的人一定要把人培養成材或所做的事一定要完美。樸: 沒有細加工的木材。

或

$$37 \times \pi = \pi \times 37。$$

他們仍然會用分配律證明第一個式子, 用交換律證明第二個式子。儘管每條定律或等式我們都只在分數的情形下進行了證明。換句話說, 中小學數學基本假設潛在地發揮著作用。

此外, 伍教授還用整整一個部分 (第四部分) 介紹了初等數論的基本內容。正如前面已經提到的, 相對於其他部分而言, 初等數論這一部分是本書選材上的最大突破。伍教授認爲, 中小學的數學教師必須瞭解一些數論, 特別是以下兩點:

第一: 一些較小的整數的整除性規律。例如, 爲什麼判斷一個整數能否被 3 整除只需要看它的各位數字之和能否被 3 整除。然而, 只要討論整除性, 就不得不提到質數以及它們的簡單性質, 就需要瞭解初等數論。

第二: 爲什麼分數可以化簡爲最簡分數, 以及哪些分數可以化爲有限小數。這兩個問題的回答分別由以下兩個定理給出 (見 [19, 第 479 頁]定理 36.1 與定理 36.2)。

**定理**: 每一個分數 $\frac{m}{n}$ 可以通過約去分子和分母的最大公因子得到最簡分數。而且其最簡分數在下述意義下是唯一的, 如果 $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$, 其中 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{A}{B}$ 都是最簡分數, 那麼 $a = A$ 且 $b = B$。

**定理**: 一個最簡分數 $\frac{a}{b}$ 可以化爲一個有限小數的充分必要條件是分母 $b$ 具有形式 $b = 2^s5^t$, 這裏 $s$ 和 $t$ 是自然數。

但是, 如果不知道歐幾裏得算法和算術基本定理, 就無法證明上述兩個定理。伍教授一再強調, 雖然學生可能沒有足夠的時間學習這麼多的數論知識, 但是, 每一位中小學數學教師都應該學會如何使用歐幾裏得算法和算術基本定理, 並且要瞭解其證明。

有一點值得在此特別指出, 初等數論中的許多基本事實都可以從歐幾裏得算法得到, 而歐幾裏得算法的實質則是一連串的帶餘除法 (在這一點上, 與長除法極爲相似)。因此可以認爲, 初等數論的很多結果是帶餘除法的自然延伸。事實上, 伍教授在介紹第四部分時這樣說:本書的這一部分或許可以視爲 “對帶餘除法中餘數的重要性的一個反思”。因此, 對於那些從來不曾接觸初等數論的讀者來說, 讀到這一句就好比吃了一顆定心丸: 解開這一部分的鑰匙是我們所熟悉的帶餘除法。

**七、誤區分析與教學評論。**

伍教授在書中指出:

> 作爲老師, 你不僅僅要認識到什麼是對的, 更重要的是要認識到什麼是錯的, 這樣才能給予學生正確的指導。

書中對於中小學數學中師生的常見誤區作了深入的分析, 這是本書的一大亮點, 對教學具有極爲重要的價值。例如, 第18章用一節的篇幅探討了分數除法的教學中的幾種錯誤觀點。

此外, 書中還穿插有多處教學評論, 例如第39章複習有限小數時我們可以讀到以下

**教學評論**: 按定義, 一個有限小數是一個以 $10^n$ 爲分母的分數。這一事實不論如何強調都不會過分。事實上, 中小學教材中最常見的一個敗筆就是對有限小數缺乏一個清晰的定義。評論結束

**八、注重歷史: 回顧與前瞻並重。**

伍教授在書中對歷史上許多著名的成就和問題都有簡要的介紹, 比如說, 艾拉托色尼篩法、畢達哥拉斯三元數組、歐幾裏得算法和哥德巴赫猜想等等, 甚至對數的乘法以及單位"米"的歷史演化也有簡單的介紹。同時, 對某些古老問題的近代進展也有提及, 例如, 維納格朵夫 (I. M. Vinogradov) 和陳景潤各自對哥德巴赫猜想所作的貢獻, 甚至提到了陶哲軒 (Terence Tao) 與格林 (B. Green) 2004 年關於質數分布的工作。這讓我們回想起數學家塞爾的建議 (見 [7]):

> 要讓學生明白, 數學是活生生的, 而不是僵死的 (學生有這樣一種傾向, 認爲只有在物理學或生物學中才有未解決的問題)。講授數學的傳統方法有一個缺陷, 就是教師從來不提這類未解決的問題。例如, 數論中就有許多諸如此類的問題, 十幾歲的孩子就能很好地理解它們。這當然包括費爾馬大定理[8], 哥德巴赫猜想, 以及關於存在無窮多個形如 $n^2+1$ 的質數的猜想。教師也可以隨意介紹一些定理而不加證明, 例如關於非平凡算術級數中存在無窮多個質數的狄利克雷定理。

無獨有偶, 陳省身先生在 [28] 中所表達的看法 (見本文標題下的引言) 與塞爾的上述觀點遙相暗合、有如共鳴, 值得我們活躍在一線的中小學數學教師特別注意。

伍教授在書中也介紹了中國古代數學的一些偉大成就, 例如, 第一章記數法中就介紹了源於古代中國的十進位位值制。伍教授甚至認爲, 十進位或許是中國對世界數學的最大貢獻。第一次聽到這個說法的人或許會覺得不可思議。事實上, 我們可以在精通中國古代數學史的著名數學家吳文俊那裏找到更爲肯定的說法 (見 [13, 第91–92頁]):

[8] 現在, 費爾馬大定理已經被證明而不能歸爲未解決的問題了, 但是在塞爾說這話的時候它還沒有被證明。

進行算術運算, 首先要有一個可以表示出任意大的整數的方法。在中國古代, 就爲此而創立了完整的 10 進位位值制。世界古代各個民族, 都有不同形式不同程度的進位制記數法, 如巴比倫的 60 進位制, 埃及與希臘的 10 進位制以及中美與南美瑪雅民族的 20 進位制等。但是他們的進位制有時是不完全的, 更談不上位值制。至於印度, 至少在 6 世紀以前, 其以位值制的記數法, 還沒有發現過。

⋯⋯位值制的數字表示方法極其簡單, 因此也掩蓋了它的偉大功績。它的重要作用與重要意義非但爲一般人所不瞭解, 甚至眾多數學家對它的重要性也熟視無睹。而法國的數學家拉普拉斯 (Lapalace) 則獨具慧眼, 提出位值制應在一切有用的發明中列於首位。中華民族是這一發明當之無愧的發明者。中華民族應以創造出這一發明而引以自豪[9]。

吳文俊先生下面的一段話 (見 [25, 第 3 頁]) 完全肯定了中國古代數學文明對當代中小學數學的貢獻:

中小學數學中的算術、代數這些部分, 從記數以至解聯立線性方程與二次方程, 實質上都是中國古代數學家的發明創造, 早就見之於中國的《九章算術》甚至是更早的《周髀算經》等書。根據錢寶琮考證,《九章算術》完成於西元 50-100 年間。但除個別片段以外, 基本內容應該完成於西元前 200 年或者更早一些 (這是某些西方數學史家的意見。有的甚至提到西元前 1000 年, 例如 Scott 的著作 A History of Mathematics[10], 1958年)。根據錢寶琮考證, 另一部《周髀算經》成書於西元前100年左右。

根據這一說法, 中小學數學的大部分內容都可以在中國古代找到源頭, 因此, 在我們的中小學課堂上, 應該盡可能地將這些中國古代數學成就融入進來。正如著名的數學史專家 M. Klein 在接受訪問時一再強調的 (見 [1]) :

中學和大學裏的每一位數學教師都應瞭解數學史。理由很多, 但是最重要的一個原因或許是, 數學史乃是指導教育的指南。

⋯⋯歷史可以在教學中扮演重要的角色。例如, 如果告訴初學微積分的學生們: 儘管牛頓和萊布尼茲是名聲顯赫的前輩, 但是他們自己也沒有能夠透徹地理解微積分的許多概念, 數學家們經過了大約 200 多年的努力, 才把這些概念搞清楚; 那麼當學生們在開始時不能很好地理解這些概念, 也就不至於感到迷惘。相反的, 他們將得到鼓舞而繼續學下去。歷史還有許多其它的教育價值。

[9] E. T. Bell《數學大師》第309頁:高斯對阿基米德無限欽佩。他在談到阿基米德時說, 我不理解阿基米德怎麼會沒有發明十進位的記數法或與它等價的東西 (以不同於 10 的數爲基底)。阿基米德設計了一種遠遠超出希臘符號體系的方法, 用來書寫和處理數位, 他的這項完全非希臘式的工作, 按照高斯的說法, 已經把十進位連同其最重要的位值制 ($325 = 3 \times 10^2 + 2 \times 10 + 5$) 掌握在手裡了。高斯把這個疏忽看成是科學史上最大的災難。

[10] 有中譯本,《數學史》, 侯德潤、張蘭譯, 廣西師範大學出版社, 2002年。

在我們的情形而言, 如果中小學生能夠瞭解到, 課本上種種美妙的數學 (勾股定理、輾轉相除法、以至於中國剩餘定理) 竟是從幾千年之前的老祖宗傳承下來的, 那麼他對數學的興趣和信心一定大增。

### 九、記號恰當、排版美觀。

所有的記號都經過了精心的選擇。書中凡是用代數運算式定義的概念, 都使用了符號 $\overset{\text{定義}}{=}$, 而且所定義的概念用黑體標出。例如, 第27章對有理數的減法定義如下:

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\overset{\text{定義}}{=}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{*}。$$

又如, 為了顯示出帶餘除法中商與餘數, 本書採取了加方框標記的方法, 例如 25 除以 6 的帶餘除法表達為

$$25=(\boxed{4}\times 6)+\boxed{1}$$

這一記號比通常出現在美國中小學教材的記號 (見下文) 優越多了。對此, 伍教授說道:

> 在中小學數學裏, 25 與 6 作帶餘除法, 所得商為 4 餘數為 1, 通常寫作[11]
>
> $$25\div 6=4\,\mathrm{R}\,1$$
>
> 應當把這種記號剔除出所有的教科書, 有很多原因, 其中一條是, 它沒有任何意義。從最基本的角度看, 如果允許寫 $25\div 6=4\,\mathrm{R}\,1$, 那麼我們也不得不寫出 $21\div 5=4\,\mathrm{R}\,1$, 因此, $25\div 6=21\div 5$, 因為它們都等於 $4\,\mathrm{R}\,1$。可是, "四組物體, 每組 5 個, 還餘 1 個"與"四組物體, 每組 6 個, 還餘 1 個", 怎麼能一樣呢? 此外, 我們還可以通過理解等號的意思來更深入地討論 $4\,\mathrm{R}\,1$ 的意思。我們已經把兩個自然數相等定義為數線上的對應點重合, 但是 $25\div 6$ 和 $4\,\mathrm{R}\,1$, 哪個都不是自然數, 所以它們之間的等號只是在拙劣地挪用記號。即使我們承認一般的分數和實數 (見第二部分, 特別是第 12 章和第 21 章), 等式 $25\div 6=4\,\mathrm{R}\,1$ 仍然不具有任何意義, 因為 $4\,\mathrm{R}\,1$ 不代表任何數。帶餘除法的正確的表示方式是"$25=(4\times 6)+1$", 這才是教師真正應該帶到課堂上的東西。

全書採用功能強大的 Tex 軟件排版, 數學公式非常美觀。第一次出現的數學名詞以及相應的記號, 作者以黑體標出; 運算法則、方法或者是結論類型的段落, 縮進成段以示強調。特別是, 某些證明經過作者的精心排版之後變得一目了然 (例如第四款所舉的"負負得正"的證明之排版), 這樣的排版可以作為課堂板書之規範。

---

[11]筆者瞭解到, 在中國和日本的中小學數學課本中常常用

$$25\div 6=4\cdots 1 \qquad \text{或} \qquad 25\div 6=4\,\text{餘}\,1$$

來表示帶餘除法。

**十、舉例典型、習題豐富。**

該書的一個重要特點是, 選取了大量具體的典型實例來佐證其觀點。比如, 在第 23 章一些有趣的應用題中, 伍教授引用了俄國的兩道題目作爲例題:

**問題**: 新鮮的黄瓜中, 全部重量的 99% 都是水分。現將 300 磅黄瓜置於儲藏室裏, 但是等拿到市場賣的時候, 人們發現水分的重量只剩下了 98%, 請問水分揮發之後的這些黄瓜重量是多少?

**問題**: 有一瓶紅酒和一壺茶水, 先從茶水中盛一勺倒入紅酒中, 均勻攪拌後再盛一勺倒回茶水中。請問此時瓶中含有的茶水和壺中含有的紅酒, 哪個更多? 如果沒有攪拌均勻, 情況又會怎樣?

這兩道題目出現在第 22 章比例和比率之後, 因爲它們既可以用分數的比例方法做, 又可以用常識解釋, 從而可以讓學生對如何正確使用比例計算有很好的理解。

古人云: 紙上得來終覺淺, 絕知此事要躬行。解題可以認爲是一個實踐活動, 以衡量讀者是否掌握了所學理論。伍教授在每章後面都精心安排了許多基礎而新穎的習題, 對正文是一個很好的補充。此外, 全書中穿插了許多動動手 (activity), 這些都是基礎而簡單的練習, 可用於隨堂檢測與鞏固。

## 4.《數的基礎理論》對中小學教學的指導意義

《數的基礎理論》是一本典型的側重正確知識性的師資培訓教材, 旨在對教師的知識理論結構進行一次徹頭徹尾的整理。當然, 師資培訓教材不能作爲學生課本直接搬進課堂, 還需要學生課本的編寫者以講授正確的數學知識爲基本原則, 以中小學生的認知特點爲指導, 編寫出循序漸進的、適合中小學生使用的課本。教師在掌握了正確的數學知識後, 也應當輔以適合學生認知的教學策略, 以便於學生更好地理解數學。

爲了解釋這一點, 我們以三年級階段學生對分數的初步認識爲例, 介紹該書對中小學教學的指導意義。

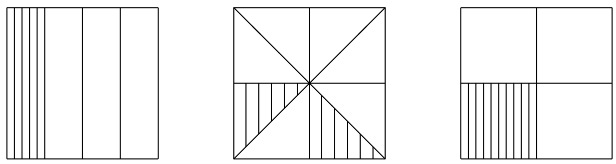
伍教授強調, 每一個數學課題的教學都必須是階梯式地緩慢遞進的過程。例如, 在他參與制定的 CCSMS 中, 分數的教學從三年級貫穿到七年級。其中, 三年級階段的分數教學的目的有三:

一、理解分數 $\frac{1}{b}$ 表示把一個整體平均分成 $b$ 個相等的部分後其中 1 個部分的大小, 分數 $\frac{a}{b}$ 表示把一個整體平均分成 $b$ 個相等的部分後其中 $a$ 個部分的大小。

二、理解分數是數線上的一個點; 把分數表示為數線上的一個點。

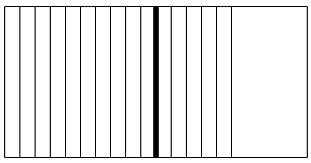
三、解釋等值分數的意義, 比較分數的大小。

在三年級, 學生首次接觸分數的部分、整體關係, 鑒於學生對數學的認知程度較淺, 所以只能用簡單的比喻和直觀的推理給學生展示分數。但即使是在這個探索和體驗的初步階段, 教師仍然可以選擇好的方法進行分數的教學。至少, 教師可以幫助學生養成習慣: 在討論分數時要注意選擇某個固定的整體作為單位 “1”, 而且要儘量精確。在眾多表示分數的形式中, 正方形和數線這兩個數學圖形脫穎而出, 因為它們表示的不是物體的“形狀”, 而是物體的“度量”, 即面積和長度。例如, 把單位正方形任意分割成面積相等的 4 部分, 那麼 $\frac{1}{4}$ 可以表示其中一部分的面積。如圖所示,



這樣對正方形進行多種分割, 直觀又形象, 但也暗示學生, 這種平均分割針對的是面積而不是形狀。對於規定好的單位正方形, 分割後所得形狀不同的部分也有可能表示同一個分數。

再如, 教師不應該唐突地提出如下問題: “下圖陰影部分表示的分數是多少?”



這個問題的不合理性在於沒有明確地指出單位“1”是什麼。如果單位“1”是整個矩形的面積, 那麼陰影部分的面積應該是 $\frac{3}{4}$, 如果單位“1”是單位正方形的面積, 那麼陰影部分的面積就是 $\frac{3}{2}$。因此, 最好養成習慣, 從一開始就強調單位的重要性, 以避免這種歧義。

伍教授認為, 如果把分數想像成某些圖形對學生的學習有幫助, 那麼當然可以盡情地使用這些圖形, 例如餡餅、蘋果、正方形、或一些圓圈等。教師可以用一切可以想到的圖示為學生展示分數, 但是一定要保證使用語言的準確性, 明確單位“1”代表的是圖形的度量而不是圖形的形狀, 並在同一個題目中保證單位“1”的大小保持不變。

當學生對分類有了以上初步的認識後, 就可以逐漸體會其精確的數學定義, 逐步清晰地理解分數是數線上的一個點, 並把分數表示為數線上的一個點。在定義的幫助下, 再對分數比較大小、理解等值分數、以及四五年級學習分數加減乘除四則運算, 學生就能形成完整的邏輯系統。

伍教授這套書的定位是師資培訓教材, 其受衆是中小學數學教師。他在《鳳凰涅盤》(中譯文見 [22, 第 1 頁]) 中指出,

> 孩子的數學思維, 技術的合理應用, 師生互動, 以及良好的教學實踐等 ······ 對於教學是很重要的話題, 但是它們還不足以將舊式數學體系改變成核心標準的體系課程。當務之急是, 如何用師資培訓來幫助教師們, 把舊式數學轉變成正確的、連貫的、精確的、合理的中小學數學。

也就是說, 他認爲數學的正確性是講授數學的首要前提, 而在符合學生認知水平的特點的基礎上選擇適合的方法和途徑則可以作爲輔助手段, 使得同時滿足所講授的數學旣是正確的, 也是有趣的。

## 結語

總之, 我們希望, 所有的中小學數學教師能抽空讀一讀伍教授的這本書。這是一位數學家在對高等數學做過多年的深入研究以後再重新審視中小學數學的結晶。對於中小學生在學習數學中已經遇到的或將來可能遇到的種種問題, 伍教授都做了深入的思考, 並對這些問題給出了出色的回答。當然, “授人以魚, 不如授人以漁”, 我們更需要學習的是這種方法與精神, 即要去鑽研學生可能遇到的困難, 並努力直面問題給出解決方案, 而不是迴避和敷衍。這樣的努力是値得的, 正如著名英國數學家阿蒂亞 (Atiyah) 所說的 (見 [4, 第27頁]):

> 我們必須牢牢記住, 數學是人類的一項活動。求解問題或做數學的目的大概是爲了把我們獲得的資訊傳遞給後代。我們必須記住, 人的智力是有限的, 肯定不能連續不斷地去領會和消化無窮多的問題並把它們全部記住。在很大程度上, 理論的眞正目的, 著眼於把過去的經驗加以系統地組織, 使得下一代人 — 我們的學生以及學生的學生, 能夠盡可能順利地汲取事物的本質內容。唯有如此, 你才能不斷地進行各種科學活動而不至於走進死胡同, 我們必須設法把我們的經驗濃縮成便於理解的形式, 這就是理論之基本所爲。也許我可以引用龐加萊在談論這個話題時的所說的話: 科學由事實建造, 正如房屋由石頭建造一樣; 但是事實的收集並非科學, 正如石塊的堆積並非屋宇。

古人云: 博學之, 審問之, 愼思之, 明辨之, 篤行之。這就是伍鴻熙教授的眞實寫照。他不辭勞苦、兢兢業業、十年如一日地默默耕耘, 就是爲了讓老師們明白數學原來是可以教的, 最終讓學生明白數學原來是可以學的, 這也是我們所有數學教育工作者的共同目標。筆者深信, 伍教授的著作一定會給我們提供許多借鑒和指導。爲此, 筆者鄭重地向讀者特別是中小學數學教師推薦伍教授的這套師資培訓教材。

## 致謝

感謝對我們的寫作給出極大幫助的各位老師和同學: 首都師範大學外語系的張淑娥老師, 數學科學學院的丁潔、雷豔萍、邵紅亮、王麗芳、王盼盼、趙媛肖同學, 北京市豐台一中的田雙老師。

感謝伍鴻熙教授對筆者一如既往的熱情幫助和支持。

感謝審稿人對初稿提出許多有價值的建議。

## 参考文獻

1. C. L. Alexandersen, Morris Klein 訪問記, 劉鈍譯,《數學譯林》, 第8卷 (1989年) 第4期, pp332–341.
2. V. I. Arnold, 新蒙昧主義與俄羅斯教育, 袁鈞譯,《數學譯林》, 第25卷 (2006年) 第1期, pp13–25; 第 2期, pp108–121.
3. V. I. Arnold, 中學需要數學嗎? 趙琳譯,《數學譯林》, 第25卷 (2006年) 第3期, pp250–258.
4. M. F. Atiyah, 如何進行研究, 收入《數學的統一性》, 袁向東主編, 江蘇教育出版社, 1995年。
5. H. Bass, 數學家應是教育家, 蔡克聚譯,《數學譯林》, 第17卷 (1998年) 第4期, pp344–348。
6. H. Bass, 數學, 數學家和數學教育, 林長好譯,《數學譯林》, 第25卷 (2006年) 第4期, pp367–377。
7. C. T. Chong and Y. K. Leong, Jean-Pierre Serre 訪問記, 張偉平、陳軍譯,《數學譯林》, 第6卷 (1987年) 第3期, pp254–259.
8. M. Cook, *Mathematicians–An outer view of the inner world*, Princeton University Press, 2009.
9. 丁潔、趙潔, 根深葉茂, 源遠流長 — 記伍教授北京數學教育之行,《數學通報》, 2011年第11期。
10. R. P. Feynman, New Textbooks for the “New” Mathematics, 中譯文收入《費曼手札: 不休止的鼓聲》pp513–520, 葉偉文譯, 湖南科學技術出版社, 2008年。
11. H. Freudenthal,《作爲教育任務的數學》, 陳昌平、唐瑞芬等編譯, 上海教育出版社, 1995年。
12. P. A. Griffith, 數學: 從夥計到夥伴, 黃樂華譯,《數學譯林》, 第13卷 (1994年) 第3期, pp246–255。
13. 胡作玄、石赫,《吳文俊之路》, 上海科學技術出版社, 2002年。
14. 姜伯駒, 關於初中數學課程標準的“基本理念”,《數學通報》, 第44卷 (2005年) 第8期, pp1–4。
15. F. Klein,《高觀點下的初等數學》, 共三卷: 第一卷《算術、代數、分析》與第二卷《幾何》, 舒湘芹, 陳義章、楊欽梁譯; 第三卷《精確數學與近似數學》, 吳大任、陳鶡譯, 臺北, 九章出版社, 1996年。
16. L. Lovász, 數學的趨勢: 它們會怎樣改變教育?, 李喬譯,《數學譯林》, 第29卷 (2010年) 第2期, pp178–184。
17. 蘇步青, 大學要關心中小學教育, 收入《蘇步青文選》, pp139–141, 浙江科學技術出版社, 1991年。
18. 伍鴻熙, 一個數學家在數學教育界的經驗,《數學通報》, 第47卷 (2008年) 第1期, pp6。
19. H. Wu, *Understanding Numbers in Elementary School Mathematics*, American Mathematical Society, 2010。
20. H. Wu, *Pre-Algebra*, *Introduction to School Algebra*, 伍鴻熙教授的個人主頁上有可下載的電子版書稿 (例如前一部分可上網 http://math.berkeley.edu/∼wu/Pre-Algebra.pdf)。
21. H. Wu, *Mathematics of the Secondary School Curriculum I, II, III*, (待出版)。

22. H. Wu, *Phoenix Rising-Bring the Common Core State Mathematics Standard to Life*, American Educator, Fall 2011, pp. 3–13. 中譯文《鳳凰涅盤 — 讓核心數學標準煥發生機》, 趙潔譯, 《數學通報》, 2012年第4期, pp1。
23. H. Wu, Mis-education of Methematics Teacher, Notices of AMS, 58(2011), No.3, pp372-384. 中譯文《數學教育的錯誤教育》, 李曉莉譯, 《數學譯林》, 2012年第2期, pp143–155。
24. 吳大任, 博洽內容、獨特風格 — 介紹克萊因《高觀點下的初等數學》, 《數學通報》, 1989年第6期, 收入《吳大任教育與科學文集》, 崔國良主編, 南開大學出版社, 2004年。
25. 吳文俊, 中國古代數學對世界文化的偉大貢獻, 收入《吳文俊文集》, 山東教育出版社, 1986年。
26. 吳文俊, 大國對數學教育應有的態度, 《上海教育》, 2011年17期。
27. 袁隆平、辛業芸, 《袁隆平口述自傳》, 湖南教育出版社, 2010年。
28. 張奠宙, 陳省身談中國數學教育, 《高等數學研究》, 2005年第02期。
29. 張英伯, 與伍鴻熙教授座談摘要, 《數學通報》, 2006年第45卷第7期, pp1。

—本文作者趙潔, 林開亮爲中國首都師範大學數學科學院研究生—