

K-12 數學教育的危機 ——

伍鴻熙談美國中小學數學教育



訪 問：梁耀強

翻 譯：甘濟維

感謝新加坡數學學會及伍教授、梁教授應允本刊翻譯、刊登此文，特此致謝。原文 “Mathematics K-12: Crisis in Education, Interview of Wu Hung-Hsi by Y. K. Leong” 刊登於 *Mathematical Medley*, Vol. 38, No. 1 (June 2012), 2-15。本文乃根據 *Asia Pacific Mathematics Newsletter*, Vol. 3, No. 1 (January 2013), 31-40, 轉載的版本翻譯。

— 編輯室

前言：伍鴻熙是新加坡數學學會 (Singapore Mathematical Society) 2010年的傑出訪問學者，2010年8月30日至9月4日訪問新加坡，對數學家、學生及老師演講並和他們互動。他在國立教育學院 (National Institute of Education) 給了一場學術演講；又在教師聯網 (Teachers Network) 和國立大學附屬數理中學帶領了兩場教師工作坊。

伍教授現為加州大學柏克萊分校名譽教授，從1973年任數學系教授迄今。他是著名的數學家，原先研究興趣為實、複微分幾何 (real and complex differential geometry)。過去二十年，他將幾乎全部的時間、精力和數學專業傾注於改善美國的K-12¹數學教育。1992年開始他以部分時間從事美國數學教育現狀的批評，但很快的對既有的教科書品質、教師的知識內容，尤其是大學的中小學師資養成方式感到憂心。這份專業的擔憂不久便具體化成為個人使命，針對與數學師資培育及教育者等有關的議題提出許多看法。結果積極參與了無數有關數學課程、標準，與K-12數學教師專業發展的委員會和專門小組。他以其專業擔任加州數學師資培育學院 (Mathe-

本文下方註解為本刊所加，非原稿所有，希望方便讀者閱讀。

更多有關訊息請參看本期“美國小學數學師資培訓教材《數的基礎理論》簡介——兼論伍鴻熙教授的教育工作”。

¹Kindergarten through 12th Grade, 指幼稚園到高中三年級。

atics Professional Development Institutes)、美國國家教育進展評估數學領航委員會 (Mathematics Steering Committee of the US National Assessment of Educational Progress, NAEP) 和國家數學諮詢小組 (National Mathematics Advisory Panel) 的成員。

梁耀強代表 Mathematical Medley 於 2010 年 9 月 1 日在新加坡國立大學數學系訪問伍教授。以下是編輯、潤飾過的訪談，在坦誠而熱情的談話中，伍教授提供他，起初並不情願，卻意外地成為加州 K-12 數學教育改革提倡者的背景。他對於現代數學的看法，以及現代數學對中小學數學教育的影響，也可從中窺見一斑。

遭禁的「真相」

梁耀強 (以下簡稱「梁」): 你什麼時候、以及如何開始深深涉入數學教育議題，尤其是學校數學 (school mathematics)² 教學和教師的訓練？

伍鴻熙 (以下簡稱「伍」): 那完全是個意外。我當時很開心地做數學，但是 1992 年剛寫完一篇長論文 — 那篇論文花了我兩年 — 正在休息。我太太接到監督當地學區的學校委員會委員打來的電話，對方問她:「妳先生在 (加州大學柏克萊分校) 數學系，他知不知道有誰願意看看新教科書，這套教材只有教育家審查過，或許我們應該找數學家來看看。」當時我太累了，好幾個禮拜無法做任何數學，所以我說，「好吧，我來審查。」我以為只要到那裡去，簡短看看，講幾句話，就沒事了。頂多一、兩天，就可以回到數學。所以答應去學區辦公室一趟，瞧瞧有什麼樣的新教科書。

我去的時候，他們說:「嗯，我們出兩千塊錢請你寫兩篇報告。」我大笑，我沒打算寫東西或領錢，可是已經答應在先，不得不做。他們說:「寫一份報告只要一週，所以一共是兩個禮拜。」因為從來沒有碰過數學教育，我完全不知道怎麼寫那種報告。他們解釋給我聽:「有兩個新課程，我們想請你評估，一份報告一千塊。」我還花得起兩個禮拜，所以我說 OK。其中一份報告很好寫，很單純，很容易得出結論。可是另一份，是一套還在美國現場測試的新教科書，書還沒出版正在學校裡試用，給我看的是草稿。

我拿了草稿，回到家裡開始讀，自忖，「我還沒看過這樣的數學」。對我而言，數學是很清楚、很實在的，有明確的定理和證明。(在 K-12 脈絡中，「定理」及「證明」可能有不同的稱呼，但事實上相同。) 即便是中小學數學，還是應該能夠說:「這是公式，可以用它推導出一些事實，我可以告訴你為甚麼這是正確的。」不過這本教科書沒完沒了，所有的東西都不正規，幾乎不給任何準確的定義。它盡可能的避免使用符號，寧可用語言陳述來代替符號表述。尤有甚者，它常常以下面這種方式闡述: 使用計算機，藉著淺顯的推論獲得真實世界問題的答案，但一旦真實世界的問題解決了，並不回頭說明使用計算機後面推理的數學脈絡。換言之，這

²這裡指的是從小學到高中的數學，在後文中除少數例外，皆譯為中小學數學。

本教科書沒有用數學來討論數學範疇裡的東西。這不是我遇過的數學，我問自己，「這是怎麼回事？」我變得很疑惑，也很不高興。開始問問題，還約談作者之一。一個月後——沒想到會那麼久，因為我希望越快寫完越好——我開始意識到中小學數學教育中有些十分嚴重（而且不一定受歡迎）的事正在發生。我們面臨了新的東西。我問朋友，甚至不曾謀面的人：「發生什麼事了？」但似乎沒有人知道。

然後慢慢的，我得知1989年，國家數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics, NCTM）出版了「學校數學課程與評量標準」（簡稱 NCTM 標準）。我想這份文件在新加坡也是知道的，它對於如何教學生數學有嶄新的觀點。我買了份 NCTM 標準來看。它相當奇怪，但我漸漸明白他們想要做什麼。接著，東看西看兩個月之後，我又花了一個半月寫報告。為了一千塊，總共花了三個月。我寫了自認誠實的報告。事實上，那份報告還在我的網站上，題目是「互動式數學教育評論（“Review of the Interactive Mathematics Program (IMP)”」，<http://math.berkeley.edu/wu/IMP2.pdf>）我讚許 IMP 做了些對的事情，也很嚴厲的批評了我覺得做錯的部份。我指出，數學不應該在什麼是對、什麼是錯上讓人疑惑，應當點明對錯，否則就直接說不知道，不應當說了一件事情，讓它懸在半空中，留給學生自己判斷對錯。這是無法接受的，而且無論如何這都不是我所理解的數學。當時我不知道數學教育竟然能夠完全和政治相互牽連，以至數學中的智識部份妥協於真實世界的考量。那時我已經做了三十年數學，但我對於中小學數學簡直無知，到現在，我的結論是，中小學數學教育中有百分之八十的政治，只有百分之二十是和智識有關的。那時，我犯了一個錯，就是把中小學數學教育與學術界的數學訓練搞混了。

在我看來我的報告是對 IMP 的公正批評，這個看法在後來所謂「數學戰爭」兩造中都有人同意。不過 IMP 的作者並不喜歡我的報告，有些學校的委員會成員是政客，為了政治目的支持 IMP，也不喜歡我的報告，無法接受我批評 IMP。有一天我接到地方學區打來電話說，因為這份報告由他們出錢，就是他們的財產，他們毫不含糊的決定對這份報告下禁令，制止它的流通。我很震驚，因為在研究圈，跟朋友交流研究論文是理所當然的事，當時我正把報告和其他數學家分享，問他們知不知道中小學數學當下發生的事情。我的路被擋死了。

不許我對自己的報告發表言論，那是對言論自由徹底的打壓，是民主社會中所能做出最不民主的事情。我非常憤怒竟然有人敢壓抑我的言論自由。此外，一份教育的文獻（IMP 教科書）竟能激起這樣的狂熱，不惜踐踏我的公民權，這點使我憂慮不安。我試著打電話給幾個律師，最後找上了美國大學教授聯盟（Association of American University Professors, AAUP）的法律顧問，即使我不是會員，那位聯絡人非常好，我把一切告訴她。最後她說：「把所有文件傳真給我，我來看看。」隔天，或是兩天後，她回電：「他們只是虛張聲勢，因為他們無權禁止任何事情。那是你的智慧財產，你可以拿它做任何想做的事。」我鬆了口氣，但也開始覺得不對勁，我想知道原因，那是我涉入教育的起點。回頭看，如果他們沒有妨害我的言

論自由，我會把報告寫完，寄給朋友，過了幾個禮拜就把這件事忘了。可是他們禁止我的文章，惹毛了我，我要了解爲什麼。我知道得越多，對於中小學數學教育的態度也越認真。

事情是這樣的，有一群人得到聯邦獎助撰寫新書。我親自去了解了一些 IMP 之外的新書，我的判斷是，它們（如同 IMP）歪曲了數學，因爲下面列出來的項目，它們一致的，都至少有一項沒有做到：

- (1) 精準而清楚的說明定義與數學結論（也就是定理）。
- (2) 提供支持每個數學命題的推理。
- (3) 闡明每個觀念或技巧在數學結構層次上的位置，並且依照這個層次循序漸進地呈現數學。
- (4) 告訴學生每個觀念或技巧的數學目的。

關於最後一點，可以做進一步的說明；數學是目標明確的科目，標準課程中每個觀念或技巧的存在，都是爲了某個數學目的；學生們應該知道那個目的是什麼，讓他們有學習的動機。看著一群人正在敗壞數學使我很憤怒，如果他們只是把敗壞數學當作喜愛的消遣，那是他們的事，他們也有權利做他們高興做的事，與我無涉。但他們是在撰寫下一代的教科書，在這個情形之下，我無法袖手旁觀，任由他們用這樣的書教育下一代。

梁：那是在加州嗎？

伍：那些書全美國都用，我對數學教育的概況知道越多，越覺得焦慮。還有其它事情。我開始詢問老師、跟家長談，有人打電話給我，有的家長說：「我的小孩學不到東西，你可以怎麼幫我嗎？」那時候我才完全意識到狀況有多危急，就連要讓他們學習真正的數學，都找不到教科書或教材可以推薦。我發現教科書和相關的數學教材退化到了不可讀的地步。我彷彿在惡夢裡，走在河邊，河中有人溺水呼救，我卻只能站在岸邊，無助而恐懼的看著。我是個數學家，想要幫忙，但除非我自己教學生——但這是不切實際的——我無法告訴學生去上甚麼課或讀甚麼書來幫助他們。實際上，好的中小學數學教育根本不存在。所以我覺得必須做點什麼。

梁：令人驚訝。那是 1990 年代嗎？

伍：那是 1992 年，1992 年 1 月。我 4 月寫的報告，「新數學」(The New Math) 大約是 1960 至 1970，「回歸基本」(Back to Basics) 運動大約在 1975 年開始，回歸基本數學，基本上是把中小學數學簡化到沒有推理程序，而 NCTM 標準則是對「回歸基本」的反動。

教師的標準，教科書品質

梁：你正在寫一些書，不是嗎？

伍：寫書有幾個原因。第一個是一旦參與中小學數學教育，我就察覺教師的知識內涵有真正的危

機。首先，已經有人告訴我教科書不好，學生從中學不到東西。當然，作為數學家，除了聽他人的意見，還必須有自己的判斷。我對既有的教科書作了批判性的考察，發現果然很糟。不過我也發現，如果教師們數學夠好，他們或許能夠彌補教科書的不足。可是我們的教師數學不夠好，所以他們無法幫助學生理解教科書裡的數學意義。因此我的首要之務是教老師們數學。

我應該告訴你一件可笑的事。我以為教老師很容易：一告訴他們我願意免費教學，他們就會蜂擁而至。那時我太天真了，不清楚一般教師的工作量，(美國)教師當時(和現在)都負荷過重。我跟一位本地教師說：「嘿，我願意免費教學，你說個時間，我就來教，如果你能找一群想學的教師，我可以教他們所有需要知道的數學。」她用一種很委婉的方式告訴我為什麼我的提議石沈大海。老師們在學年中辛勤工作，沒有多餘的時間學新東西，至於暑期，雖然放假，有些人需要放鬆，還有些人利用時間賺取需要的額外收入。即便我只提議在暑假教他們兩週，他們也不會給我兩週。於是，就算我知道教師的品質才是真正的問題，還是經過了一段很長的時間我才能直接介入教師的專業進修。2000年我終於獲得這個機會，而一開始教學，我知道必須親自撰寫教材，因為市面上的教科書品質低落得難以置信。

巧的是1999年，我已經深入參與加州數學教育的實務。由於某種原因，當時州政府信任我，我擔任了州政府的幾個官方職務，包括加州教科書採用的負責人之一。加州是少數有教科書採用程序的州，也就是所有出版社必須把教科書送給州審查，由州來決定這些書是否值得採用。嚴格來說，1999年沒有一套書夠好，只能從既有的書中選出最好的，因為學生需要教科書。那時加州有一套新的標準，我們想要藉著採用示範怎麼教數學，所以州方告訴出版商這個期待。由於我的官方職務，很多出版商代表來找我，問我加州想要的品質，以及教學的「正確方法」是什麼等等。就在那時我驚覺到：我無法舉出一本書，說，「參考這本，要比它更好。」顯然必須有人寫一套合理的 K-12 數學教科書。

梁：不是有掌管教育的單位？

伍：並不是這樣。在新加坡，教育部決定所有事情，在美國，情況很複雜。首先，美國有五十個州，但是美國憲法裡沒有提到聯邦政府在學校教育中的角色，學校教育於是成為各州的責任。所以上述的教科書採購政策僅適用於加州。我應該順帶一提，因為加州是很大的州，做任何事情都有份量，加州採用的也可能在其它州產生效應。

我正在寫一套給教師的書。第一本是給小學教師的。[2012年9月6日註：此書已在2011年由美國數學會出版，書名為《了解小學數學中的數》(*Understanding Numbers in Elementary School Mathematics*, American Mathematical Society, 2011)。] 接著還有兩套，一冊給中學教師，另一套三冊給高中教師。(在美國，中學是6到8年級，高中是9到12年級。) 這些書組成一系列完全配合中小學數學課程發展的 K-12 教科書。這是為教師寫的，

讀者是老師不是學生，沒有太多廢話。我不打算寫學生的教科書，這樣的書，教學和心理的成分比較重，我不想處理那些。如果我做了，會有一堆原因讓我成為衆矢之的。這套書的主要目的，是展現數學上正確的中小學數學。說來簡單，但一點也不。

在美國出版教科書非常、非常複雜，必須政治正確、心理上可接受，地方學校教育委員會同意，等等。第二，寫書給學生還不夠，必須另外寫一套教師手冊，告訴老師怎麼使用學生的教科書，以及提供習題解答。此外，還得準備所謂的教具，也就是昂貴的圖表，習作單、各式各樣的工具。這是個大工程。我這一輩子也出不了這種東西。我對中小學數學夠了解，我想傳達的是如何在數學識見下正確地發展中小學數學，不希望有人告訴我「這政治正確嗎？心理上可接受嗎？」我做數學，就這樣。

在職專業進修，真正的需求

梁：下面的問題你可能已經回答了一部份；一開始跟中小學老師溝通數學最基本的面向時，你遇到的主要障礙是什麼？

伍：這是個好問題。我希望我的答案，能幫助其他想為中小學數學貢獻己力的數學家。

教老師的時候，一開始我犯了一個致命的錯誤。我以一般對待大學生的方式對待他們，但他們是不一樣的。教大學生，上課的第一天我會告訴學生：「這是我要教的內容，這是我的評分方式，這是我對考試及作業的期待。」我設定的標準，不喜歡的學生可以不選，一旦留下來，他們知道要嘛達到標準，不然就被當。不過，這個方法對老師們未必恰當。

我教在職教師至今已經超過十年，暑期班的課程長度從一週到三週都有。經過一段時間我才明白教在職教師和教大學生其間的不同。假設專業發展的焦點是數學，我可以總結出下面的不同：

- (1) 大學生直接從中學上來，還停留在學習模式中；知道應該學習。在職教師習慣於教學生，而不是自己當學生，聆聽和吸收資訊的能力打了折扣。在學習一貫的邏輯論證微妙的地方時，差異尤其顯著。教老師的時候，應該要察覺這些不同。
- (2) 我們教給大學生的數學，對他們而言大部份是新的，有時候他們在 K-12 所受的錯誤教育會被新的主題掩蓋。然而，教中小學老師從 K 到 8 年級數學，迫使他們無可逃避的面對所受過的錯誤教育：在學會新知識之前，他們必須先忘記以前在學校所學的。忘掉東西是很困難的。
- (3) 人為因素：在職老師教學多年都是對學生做評量，輪到自己被評量，就有「自我」這個細緻而不容忽略的議題。大學生的自我問題相較之下小多了。
- (4) 如果把大學課程想做大學生的障礙超越過程，我們毫不猶豫接受一個事實—每個障礙，都可

能有人過不了。可是教在職的老師，必須摒除「有人不過」的想法，因為任何老師「不過」，就會殃及他或她教書生涯中千百受教的學生。必須窮盡所能，排除萬難讓每位教師都跟上來。

但這些不同還不完全。首先，應該問，為什麼我們要談教老師們他們在校時就應該學會的知識。原因很簡單：整個教育體制在每個階段都辜負了他們。美國大學不教老師們工作上真正需要的數學，也就是中小學數學。這絕對是實話。大學數學如微積分、離散數學、抽象代數、分析、微分幾何、數值分析，等等，所有你說得出來的，我可以告訴你，為什麼 – 原則上 – 學這些，對要當老師的人來說是好的。但學了所有那些，並不會直接幫助老師教中小學數學。事實上，我寫過關於這個狀況的文章 [2012年9月6日加註：數學教師的錯誤教育 *The Mis-Education of Mathematic Teachers*, *Notices Amer. Math. Soc.* 58 (2011), 372-384. <http://math.berkeley.edu/~wu/NoticesAMS2011.pdf>.] 我們沒有給老師教學上真正需要的知識。大學數學正規課程中完全不包括中小學數學 (K-12)。

梁：不過他們應該在學校裡學過了。

伍：這是惡性循環。我前面說過，美國中小學數學教育糟糕已久，中學畢業生不會數學，只會教科書上的很不幸的有缺陷的數學。上了大學，他們期待得到幫助，但得不到，因為我們的大學假裝只要是從 K-12 畢業的，都已經會中小學數學，不需要再多討論。於是當大學生回到學校教書，他們會的中小學數學與當初中學畢業時一樣多，那個有缺陷的數學版本就此代代相傳。

我還沒有研究其他國家的教育系統，是否我剛剛說的問題是美國獨有的。我想不是。這麼重要的事情 – 我們孩子的未來 – 顯然需要徹底的研究。

美國大學的中小學數學師資培育課程，不教中小學數學，喜歡教些其它東西：針對高中老師，他們教微分方程，或群、環這類進階的主題，小學老師則是教學策略。然而，由於學生上大學時數學知識已經不足，教育他們比較實際的方法是握住他們的手，告訴他們，「小心，如果你要當小學老師，教學生乘法，你能夠解釋乘法的演算法是怎麼回事？」想想，哪一門大學數學課，以一種實事求是的態度，教學生為何乘法的演算法是對的？舉例來說，如果這是個演算法，（也就是說，有限的機械過程 *finite machine procedure*），它到底是什麼，主要的數學意義又是什麼？至於長除法的演算，我甚至不知道有哪一本書試著正確地解釋這個演算要達成什麼，以及它為什麼有效。再舉一個例子，解方程式的意思是什麼？這是個比大多數人所理解還要難的問題。目前，全美國幾乎所有的老師和教科書都不是以正確的方法教如何解代數方程。

如果希望某人成為好老師，必須仔細教她將來要教的內容。然而，我們似乎從不把這個簡單的事實放在心上。我們責怪老師們不懂數學，其實幾乎全是由於我們的輕忽，造成大部分老師不懂數學。我們沒有教老師們工作所需的知識。我涉入教育不久就發現這個事實，所以我

下定決心，教老師們數學是最重要的課題。

現在美國的在職專業進修是個大事業。許多業者靠著到各個學區告訴老師們：「你付我一天（或兩天）的錢，我保證有成果。」而大賺錢。你知道大部份業者做什麼嗎？他們的主要目標似乎是讓老師們感覺良好，拍拍老師們的背，告訴他們：「嗯，數學很有趣，我們會討論解一些特殊題目的訣竅，介紹一些課堂活動，把這些帶回課堂，孩子們會很愛你。」有些機構付錢，讓老師們參加這類的專業進修。當然我也希望老師們感覺良好，希望他們相信數學很有趣，但如果他們對於所要教的最基本的東西不懂，這些都沒有意義。這些業者不談數學教學切實的議題：分數是什麼？為甚麼除分數時要先將分數倒過來再相乘？

下面這個比喻不見得特別貼切，不過我還是要說。假設有一群人快餓死了，你要幫他們，首要之務是什麼？

當然是給他們基本的東西，像是蔬菜、米和肉。但有些人不這麼想，他們對饑民說：「我來教你們做舒芙蕾。」這就是大部份專業進修業者對老師做的。做舒芙蕾非常好玩，你不覺得嗎？但這不是餓肚子的人需要的。挨餓的人需要最基本的營養，才能重獲力氣、繼續生活。我們的老師渴望知識希望把書教好，不知為甚麼這個需求沒有受到重視。我認為首要之務，應該提供老師們基本的數學知識。傳遞這個知識是我的目標，奇怪的事實是許多教育學者對這個建議的反應是「教學很複雜，懂數學並不是全部。」人生也很複雜，免於挨餓的威脅也無法解決深奧的人生問題。如果你時時刻刻都在擔心挨餓，很難想像你能解決任何人生的真正問題。所以在我們能提供老師們足夠的數學知識之前，數學教育哪兒也去不了。這當下，美國似乎沒有任何系統性的學程能夠提供老師們基本的數學知識，但教育體制宣稱盡力解決數學教育危機。很奇怪，不是嗎？

「新數學」和數學改革

梁：1960年代，「新數學」被當作很重要的一部份納入美國中小學數學課程，或許全球皆然。這是否大部分源於當時數學家對其時盛行的抽象概念和公理化的熱衷與樂觀？

伍：那確實有份，無法否認。然而，新數學的種子是由50年代早期教育家-老師 Max Beberman³ 播下。現在，我們傾向將新數學等同於由 Ed Begle⁴ 為首的學校數學考察小組 (School Mathematics Study Group, SMSG)，因為 SMSG 是 1960 年代早期官方委託辦理國家改革中小學數學課程的單位。SMSG 獲得國家科學基金會 (National Science Foundation, NSF) 前所未有的資助，由數學家與老師組成的團隊撰寫實驗教材。學者們對於 Bourbaki⁵ 工作的熱忱與樂觀當然影響了新數學那一派人更新老舊課程和教科書的嘗試，

³Max Beberman (1925~1971)，美國數學家，被稱為「新數學之父」，美國數學教育改革的主導者之一。

⁴Edward Griffith Begle (1914~1978)，美國數學家，美國學校數學考察小組 (School Mathematics Study Group) 計畫領導人。

⁵Bourbaki，為 20 世紀一群法國數學家發表一系列著作時共同使用之筆名。他們以建立完全奠基於集合論上的數學為標的，且重視數學

有時也許過頭。新數學未能改善中小學數學，因為負責的人似乎不能準確地拿捏中小學數學中形式化與抽象概念該有多少才適當，或者說學生能夠接受多少。這裡讓人想起他們死板地區分 number 和 numeral 的不同，以及堅持使用集合論語言。更重要的是，雖然新數學那些人預見需要教育所有將要教新式數學（尤其是 K-8）的老師，卻徹底敗給出版商來勢洶洶的數學盲教科書，最後，被這些數學盲教科書教育的老師遠比被 MSG 教育的多。新數學運動造成的，就是知識短缺的老師和數學盲教科書的致命組合。

梁：1970年代的「回歸基本」運動是對「新數學」的反動嗎？這個運動達成了什麼？

伍：嗯，我不是「回歸基本」運動的專家，就我粗淺所知，這個運動除了糾正新數學運動中一些明顯的錯誤，並沒有達成太多。舉例來說，回歸基本至少重建了數學課程的標準公式，學生能夠流暢的做基本運算。另一方面，回歸基本運動過份強調數學的步驟面向，忽略推理和連貫性，這是致命的錯誤。

梁：對於沒有受過教學訓練的數學家來說，訓練數學老師必定是不簡單的事。有多少比例是關於有效教學，又有多少是關於主題內涵？

伍：大部分是關於數學主題內容，但最終兩者都有。讓我解釋，教老師時，內容的選擇不是標準數學，而是規劃過，適合 K-12 情境的數學。（參見 H. Wu, How mathematicians can contribute to K-12 mathematics education, *Proceedings of International Congress of Mathematicians*. Madrid 2006, Volume III, European Mathematical Society, Zürich, 2006, 1676-1688, <http://math.berkeley.edu/~wu/ICMtalk.pdf>）

這個規劃的過程，包含考量如何最優化呈現，讓特定年級的學生最容易接受的內容。這些考量的本質必然是教學的。人們經常有個印象，以為數學家只做數學，所以不懂教學，其實不然。在柏克萊以及其它地方，我的很多同行都是非常好的老師，他們顯然對自己需要的教學法駕輕就熟。數學家不應該假裝是教學專家，但這不表示他們對於教學無可貢獻。

梁：最近數學教育改革的特色是鼓吹回到概念與證明，或許是一種「回到嚴謹」類型的運動？

伍：我認為新數學的領袖們（大部份，但不是全部，是大學數學學者）犯的一個關鍵的錯誤是，對於中小學沒有足夠的瞭解。相較之下，在最近的改革中教育家犯的錯誤則是，沒有盡力去了解必需的數學。從事數學教育，必須做兩件事：了解數學和中小學，只知道數學是不夠的，只知道中小學也不夠。很不幸的，美國的數學家和教育家少有對話，缺乏溝通阻礙了數學教育真正的進步。沒有一個領域（例如數學）在教育家和專家（例如數學家）分道揚鑣的情形下能成就好的教育。我這十年來做的，就是不斷提醒他們必須重新結合起來，彼此學習與合作。我自己經常與老師們保持對話。

數學，電腦和學校

梁：有很多大學裡的數學家到中小學演講嗎？

伍：有，並不多。美國的數學研究者當中，有多少對當地之外的中小學數學教育有興趣？非常少。因此，很少數學研究者會到中小學演講 — 沒理由這麼做 — 除非他們有興趣改善中小學數學教育。當然，可能恰巧，一輩子有一次去中小學對學生演講，因為有人找你，問你：「願意到學校跟學生談談嗎？」否則，中小學數學教育的政治層面傾向於阻擋數學家參與。一位幾何同行曾經告訴我：「中小學數學教育是個無底洞。」

梁：Serge Lang⁶ 過去常到學校演講。

伍：他有閒。他寫了不少書，包括一本平面幾何和一本基礎數學的書。就我看來，這些對有興趣學些東西的學生，是好書。有些老師們讀了並不喜歡，因為太簡短了。我想這是個公正的評價；這些書相當難。即使對老師來說都是，因為讀者需要費點工夫來填補闡述中的落差。Serge喜歡臨場發揮，大概是爲了好玩，他對學生們演講的時候幾乎都如此。我不覺得他是專業的態度對待學校教育，他聽到我這麼說也許會很不舒服，但是如果他是認真的，首先他會嘗試改變中小學文化。我不覺得他做了這點，他喜歡爭論和批判，可是我覺得批判在這個節骨眼上對老師們沒什麼幫助。

梁：中小學老師通常對定理的證明感到不自在，如果用基本算術和幾何爲例子教他們邏輯，會有幫助嗎？

伍：我不這麼認爲。讓我打個比方。假設有個人英文寫不好，你覺得應該做什麼：給他好的閱讀材料，讓他大量閱讀，然後指出其中的寫作好在哪裡，還是就讓他讀文法書？這基本上是同樣的問題。不要讓老師們直接學邏輯，但讓他們在實際的數學情境下學習邏輯，他們學到的機會比較高。只要給老師一本程度合適、寫得好的數學書，有實質內容，清楚而有邏輯的解釋數學。讓他們先從書上學習一些有趣的數學，然後聚焦在幾個好的定理上，分析每個定理的內容，解釋定理的證明如何能顯示定理是對的。用這些證明，讓他們明白證明的目的是藉著使用邏輯，從 A 點（假設）走到 B 點（結論）。所有的數學都不過是從 A 點走到 B 點，如果老師們能從研讀有趣的定理中學到這一點，他們就看到邏輯運作。這樣他們比較可能學會什麼是證明。我不相信學習邏輯本身對大部分的人有幫助。

梁：你自己的數學研究是實、複幾何。陳省身⁷ (S. S. Chern [1911~2004]) 對於你的專業選擇有甚麼影響？

伍：也許令人意外，但我選擇微分幾何並不是陳教授的緣故。我還是大學生的時候，就認定幾何

⁶Serge Lang (1927~2005)，法裔美籍數學家，以在代數領域的工作以及他所編寫的多本教科書而爲人所知。

⁷陳省身 Shiing-Shen Chern (1911~2004)，華裔美籍數學家，詳第 1 卷第 2 期，(學算四十年)；第 11 卷第 2 期，(陳省身院士演講 — 我的若干數學生涯)；第 35 卷第 2 期，(陳省身與漢堡大學)，與其它卷期的相關文章。

是我唯一能做的數學。當然後來認識他，我們同事大約三十年。陳教授比我年長三十歲，他過世以來，我寫了兩篇有關他的文章。他確實影響了我對數學整體的視野與態度。順帶一提，不只陳教授，丘成桐⁸對我有同樣的影響。我的指導教授是 [Warren Arthur] Ambrose⁹，他從陳教授的文章中學了很多微分幾何。(可是 Ambrose 總是說自己不懂陳的寫法，必須重建陳的所有論證。) Ambrose 從泛函分析轉換到微分幾何的時候，已經是公認的數學家。我可以象徵性地列為陳教授的「徒孫」。我不以為直接從他身上學了多少微分幾何，我學到的是更重要的東西：數學品味與判斷。至於丘成桐，他是陳教授的學生，也修過一門我的課，他們兩位都教會我，做數學要尋找重要的東西，忽略其它的事。用這樣的態度，你會專注中心議題，略過次要議題。這也是我面對數學教育的態度，活用從這兩位 [陳和丘] 身上學到的。

梁：電腦視覺化的進步，對中小學幾何的教學與了解有多少幫助？

伍：我對這個議題的看法並不專業，因為沒有研究過，也不是心理學家，無法對這個議題發表任何權威的意見。話說回來，我不相信電腦視覺化能夠幫助學生學習幾何。我認為，開始學幾何的唯一方法，是動手畫很多圖。不少人認同我的看法——學習是從指尖到大腦——沒有其它方法。必須畫圖，或做模型，因為起初學的幾何是二維，或三維的。當然，最後進入高維，或許需要電腦製作模型或幫助思考；舉例來說，六維 Calabi-Yau 流型的三維投影。可是中、小學，還是動手畫這個實在的方法比較好，沒有捷徑。

梁：不過，有很多幾何的軟體，例如建築師畫三維圖用的軟體。

伍：建築師需要的是，建築物建造之前很好的影像呈現完工後的樣子，所以軟體對於精確的圖像呈現是重要的。但是幾何需要精準繪圖則是誤解，一般需要的只是本質正確的略圖。舉例而言，一些二維歐氏幾何的東西，在證明定理時用手畫圓和線，得到大略的圖，通常就夠了，幾乎從不用尺和圓規。我不覺得準確度有這麼重要。

梁：你最近的數學或數學教育計劃是什麼？

伍：我說過正在寫一套給各級老師的教科書，如果有時間，我也想寫一本給老師的數學史。我覺得老師應該了解一些數學史，但大部分這類的書跟歷史比較相關——我認為是無聊的歷史細節——而不是數學想法。老師們應該知道偉大數學想法的演進，像是中世紀代數的出現，平行公設的影響，歷來十進位系統與極限觀念的演進，等等。

—本文受訪者伍鴻熙為美國加州大學柏克萊分校名譽教授。伍教授關於數學教育的工作，請見其網頁 <http://math.berkeley.edu/~wu/>。訪問者梁耀強任教新加坡國立大學。譯者甘濟維曾任中央研究院數學研究所助理—

⁸丘成桐 Shing-Tung Yau (1949~)，華裔美籍數學家，詳第 13 卷第 3 期，(我的求學經驗)；第 18 卷第 3 期，(丘成桐教授清華大學座談)；第 22 卷第 3 期，(丘成桐院士演講：我研究數學的經驗)，與其它卷期的相關文章。

⁹Warren Arthur Ambrose (1914~1995)，美國數學家，研究領域包含微分幾何，偏微分方程和機率論。