數學傳播 37卷2期, pp. 93-95

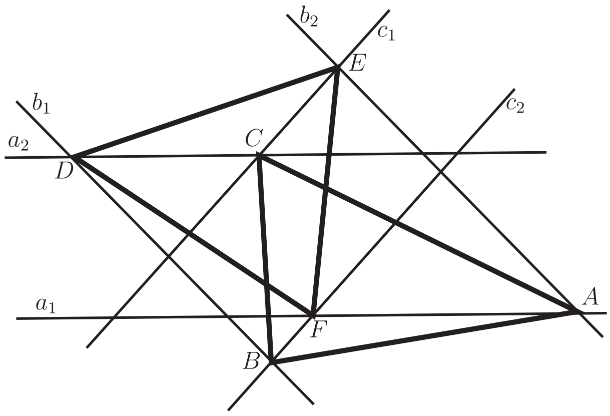
三組平行線定理及其一個猜想

劉步松

如圖一, 平面上給定三組平行線, 分別是 $a_1//a_2$, $b_1//b_2$, $c_1//c_2$, 處在不同組的兩條直線都是相交的。設 a_1 與 b_2 的交點爲 A, b_1 與 c_2 的交點爲 B, c_1 與 a_2 的交點爲 C; a_2 與 b_1 的交點爲 D, b_2 與 c_1 的交點爲 E, c_2 與 a_1 的交點爲 F, 則有如下兩個結論:

(1) 若 A, B, C 三點不共線, 則 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DEF}$;

(2) 若 A, B, C 三點共線, 則 D, E, F 三點也共線。



圖一

這個定理是筆者在研究四邊形的性質時發現的, 感覺它條件簡單, 結論中, a, b, c 三個字母具有輪換性, 下標1和2也是輪換的, 從而是非常優美的一個定理。

下面證明這個定理。

在直角坐標系中, 設 A, B, C, D, E, F 的座標依次爲 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, $D(x_1',y_1')$, $E(x_2',y_2')$, $F(x_3',y_3')$, 利用平行線的斜率相等:

因爲 $AF//DC$, 所以 $\dfrac{y_3'-y_1}{x_3'-x_1}=\dfrac{y_3-y_1'}{x_3-x_1'}$, 因爲 $AE//BD$, 所以 $\dfrac{y_2'-y_1}{x_2'-x_1}=\dfrac{y_1'-y_2}{x_1'-x_2}$,

因爲 $CE//FB$, 所以 $\dfrac{y_2'-y_3}{x_2'-x_3}=\dfrac{y_2-y_3'}{x_2-x_3'}$。將上面三個等式分別去分母可得下面三個等式:

$$x_3'y_3-x_3'y_1'-x_1y_3+x_1y_1'=x_3y_3'-x_3y_1-x_1'y_3'+x_1'y_1 \tag{1}$$
$$x_2'y_1'-x_2'y_2-x_1y_1'+x_1y_2=x_1'y_2'-x_1'y_1-x_2y_2'+x_2y_1 \tag{2}$$
$$x_2'y_2-x_2'y_3'-x_3y_2+x_3y_3'=x_2y_2'-x_2y_3-x_3'y_2'+x_3'y_3 \tag{3}$$

將上面三個等式相加, 消項後並移項可得:

$$x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_2y_1-x_3y_2-x_1y_3=x_1'y_2'+x_2'y_3'+x_3'y_1'-x_2y_1'-x_3'y_2'-x_1'y_3'$$

寫成行列式的形式:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} \tag{4}$$

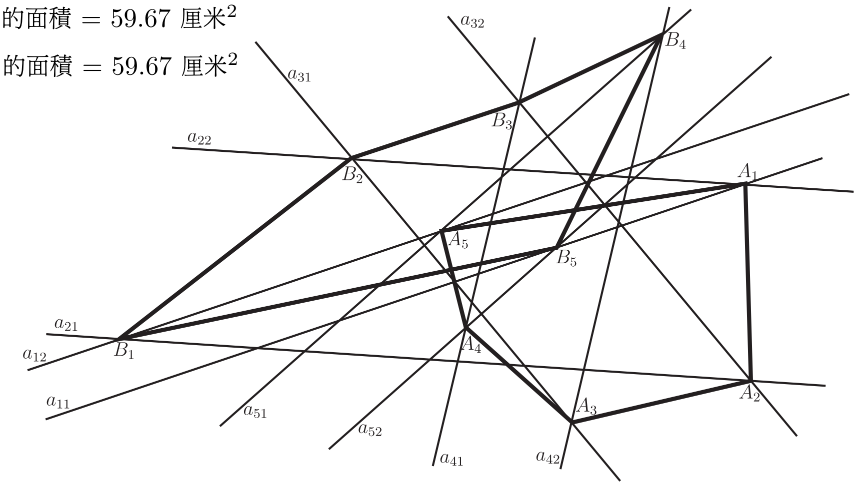
而 $S_{\triangle ABC}=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$, $S_{\triangle DEF}=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix}\right|$, 由於 (4) 式成立, 所以有 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DEF}$。從而結論 (1) 成立; 如果 A, B, C 三點共線, 則 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$, 由 (4) 式也有 $\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix}=0$, 從而 D, E, F 三點也共線, 證畢。 □

筆者在幾何畫板上已驗證, 對於四、五、六、七組平行線時, 類似的定理也成立。因此筆者猜想有如下的定理成立。

平面上有 n 組平行線滿足: $a_{11}//a_{12}$, $a_{21}//a_{22}$, …, $a_{n1}//a_{n2}$。記 a_{11} 與 a_{22} 的交點爲 A_1, a_{21} 與 a_{32} 的交點爲 A_2, a_{31} 與 a_{42} 的交點爲 A_3, $\cdots$, a_{n1} 與 a_{12} 的交點爲 A_n; a_{12} 與 a_{21} 的交點爲 B_1, a_{22} 與 a_{31} 的交點爲 B_2, a_{32} 與 a_{41} 的交點爲 B_3, $\cdots$, a_{n2} 與 a_{11} 的交點爲 B_n。則多邊形 $A_1A_2\cdots A_n$的面積等於多邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 的面積。圖二畫出了 $n=5$ 的情形。

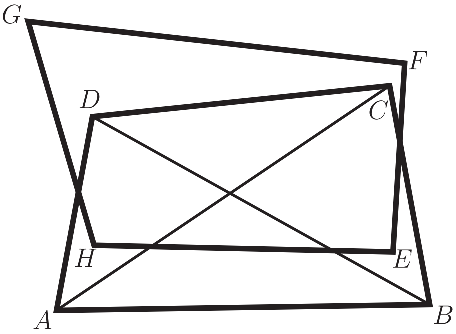
$A_1A_2A_3A_4A_5$ 的面積 $= 59.67$ 厘米^2

$B_1B_2B_3B_4B_5$ 的面積 $= 59.67$ 厘米^2

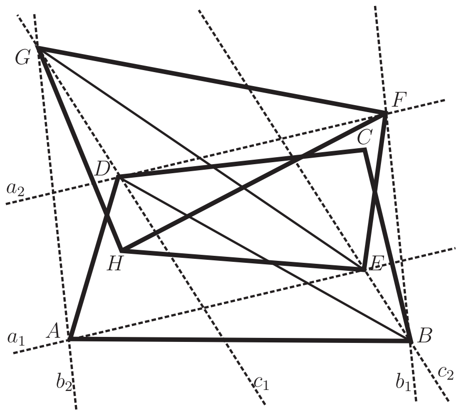


圖二

下面用三組平行線定理解決一個實際問題。



圖三



圖四

如圖三, 對任意四邊形 $ABCD$, 若 $\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle CDA$、$\triangle DAB$ 的垂心依次爲 E、F、G、H, 則有四邊形 $EFGH$ 的面積等於四邊形 $ABCD$ 的面積。

證: 如圖四, 對 $\triangle ABD$ 和 $\triangle FGE$ 使用三組平行線定理。記直線 AE 爲 a_1, 直線 DF 爲 a_2, 直線 FB 爲 b_1, 直線 AG 爲 b_2, 直線 DG 爲 c_1, 直線 BE 爲 c_2。因爲 E 爲 $\triangle ABC$ 的垂心, 所以 $AE \perp BC$, 因爲 F 爲 $\triangle BCD$ 的垂心, 所以 $DF \perp BC$, 從而 $AE//DF$, 即 $a_1//a_2$, 同理可證, $b_1//b_2$, $c_1//c_2$, 由三組平行線定理有 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle FGE}$。同理可證, $S_{\triangle BCD} = S_{\triangle GHE}$, 這樣便有四邊形 $EFGH$ 的面積等於四邊形 $ABCD$ 的面積。

從上面的證明看到, 利用三組平行線定理證明四邊形的這個性質是非常簡潔的。

—本文作者爲中國江蘇省邳州市運河高等師範學校—