數學傳播 37卷2期, pp. 80-92

複數法在中學數學中的應用

葉文傑

摘要: 複數法是中學數學解題方法中很重要的方法之一, 因爲複數具有向量性質, 極坐標形式, 指數形式等多種表示方法, 而這些表示形式, 處理某些代數, 幾何問題, 有其獨特的優勢, 我們以新的視角、新的途徑溝通了複數與三角, 幾何, 數論等內容之間的聯繫, 若能在解題時根據問題的特點, 巧妙地運用複數的方法, 會使問題變得簡潔明了。

關鍵詞: 一般形式, 極坐標形式, 指數形式; 複數法, 三角, 幾何, 高斯整數。

1. 引言

複數法是中學數學解題方法中很重要的方法之一, 因爲複數具有向量性質, 極坐標形式, 指數形式等多種表示方法, 而這些表示形式, 處理某些代數, 幾何問題, 有其獨特的優勢, 我們以新的視角、新的途徑溝通了複數與三角, 幾何, 數論等內容之間的聯繫, 若能在解題時根據問題的特點, 巧妙地運用複數的方法, 會使問題變得簡潔明了。

2. 複數的歷史及其相關概念

2.1. 複數的歷史

最早有關負數方根的文獻出於公元1世紀希臘數學家海倫, 他考慮的是平頂金字塔不可能問題。16世紀意大利數學家 (塔塔利亞和卡爾達諾) 得出一元三次和四次方程式的根的表達式, 並發現即使只考慮實數根, 仍不可避免面對負數方根。17世紀笛卡兒稱負數方根爲虛數,「子虛烏有的數」, 表達對此的無奈和不忿。18世紀初棣莫弗及歐拉大力推動複數的接受。1730年, 棣莫弗提出棣莫弗公式:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

而歐拉則在1748年提出分析學中的歐拉公式:

$$\cos\theta + i\sin\theta = \mathrm{e}^{i\theta}$$

十八世紀末, 複數漸漸被大多數人接受, 當時卡斯帕爾·韋塞爾提出複數可看作平面上的一點。數年後, 高斯再提出此觀點並大力推廣, 複數的研究開始高速發展。詫異的是, 早於 1685 年約翰·沃利斯已經在 De Algebra tractatus 提出此一觀點。

卡斯帕爾·韋塞爾的文章發表在 1799 年的 Proceedings of the Copenhagen Academy 上, 以當今標準來看, 也是相當淸楚和完備。他又考慮球體, 得出四元數並以此提出完備的球面三角學理論。1804 年, Abbé Buée 亦獨立地提出與沃利斯相似的觀點, 即以$\pm\sqrt{-1}$來表示平面上與實數軸垂直的單位線段。1806年, Buée 的文章正式刊出, 同年讓-羅貝爾·阿爾岡亦發表同類文章, 而阿岡的複數平面成了標準。1831年高斯認爲複數不夠普及, 次年他發表了一篇備忘錄, 奠定複數在數學的地位。後來因爲柯西及阿貝爾的努力, 掃除了複數使用的最後顧忌, 而後者更是首位以複數研究著名的。

複數吸引了著名數學家的注意, 包括庫默爾 (1844年)、克羅內克 (1845年)、Scheffler(1845年、1851年、1880年)、Bellavitis(1835年、1852年)、喬治·皮庫克 (1845年) 及德·摩根 (1849年)。莫比烏斯發表了大量有關複數幾何的短文, 約翰·彼得·狄利克雷將很多實數概念, 例如素數, 推廣至複數。

費迪南·艾森斯坦研究 $a+bj$, 其中 j 是 $x^3-1=0$ 的複根。其他如 $x^k-1=0$ (k 是質數) 亦有考慮。庫默爾的完美數理論, 經由菲利克斯·克萊因 (1893年) 以幾何角度加以簡化。伽羅華其後提出更一般的推廣, 解決了五次以上多項式的根不能表達問題。

2.2. 複數的模, 共軛, 輻角

2.2.1. **複數的代數形式**

儘管可以使用其他表示法, 複數通常寫爲如下形式:

$$a+bi$$

這裡的 a 和 b 是實數, 而 i 是虛數單位, 它有性質 $i^2=-1$。實數a叫做複數的“實部”, 而實數b叫做複數的“虛部”。實數可以被認爲是虛部爲零的複數; 就是說實數a等價於複數$a+0i$。實部(a)被指示爲$Re(z)$, 而虛部(b)被指示爲$Im(z)$。

複數間的等量關係

複數無法比較大小, 即兩個複數只有相等和不等兩種等量關係。

兩個複數是相等的, 當且僅當它們的實部是相等的並且它們的虛部是相等的。就是說, $a+bi=c+di$當且僅當$a=c$並且$b=d$。

複數的算數運算

通過形式上應用代數的結合律、交換律和分配律, 再加上等式$i^2+1=0$, 定義複數的加法、減法、乘法和除法:

加法: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

減法: $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

乘法: $(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+(bc+ad)i$

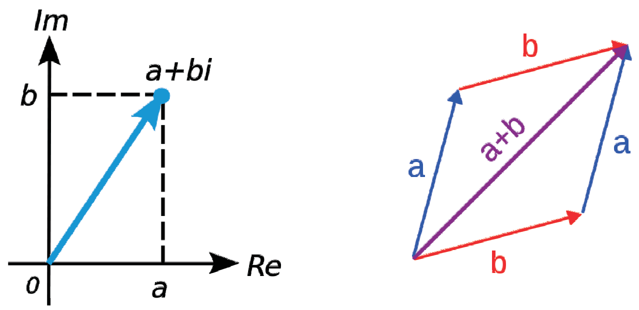
除法: $\frac{(a+bi)}{(c+di)}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bci-adi-bdi^2}{c^2-(di)^2}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$

2.2.2. 複數的幾何表示

複數可定義爲實數組成的有序對 (a,b), 而其相關之和及積爲:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,bc+ad)$$

而有序對 (a,b) 與複平面上的點一一對應, 因此複數與平面向量一一對應, 因此, 我們可以將複數看作向量來對待

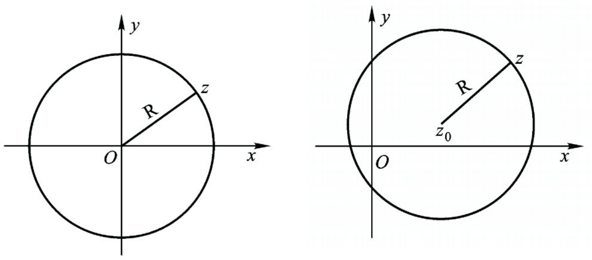


圖一: 複數向量的加法

由複數的向量性, 我們給出模的概念, 我們把複數對應的向量的長度, 叫做複數的模, 用 $|\,|$ 表示, 模有如下的性質

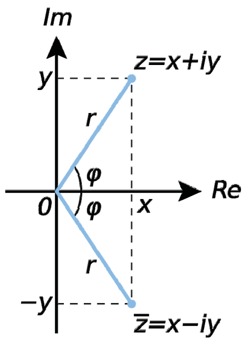
- $|z|-|w|\le|z+w|\le|z|+|w|$
- $|zw|=|z|\,|w|$
- $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$

用模的概念可以很簡潔的表示圓的方程。從圖上我們看出圓心在原點的圓的方程爲 $|z|=R$, 如果圓心 z_0 不在原點, 我們通過平移容易知道這時圓的方程爲 $|z-z_0|=R$。

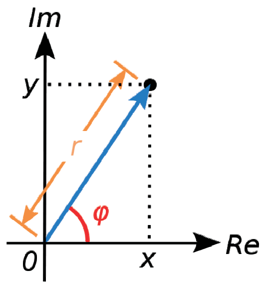


圖二: 圓的方程的複數形式

我們考慮, 複向量關於 x 軸的鏡像向量, 我們把鏡像向量對應的複數叫做原來複數的共軛複數, 即 $z=a+bi$ 的共軛複數爲 $\overline{z}=a-bi$。我們有下面共軛複數的運算



圖三: 複數的共軛



圖四: 複數的輻角

- $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$ $\quad\overline{zw}=\overline{z}\cdot\overline{w}$ $\quad\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$
- $\overline{\overline{z}}=z$ $\quad|z|=|\overline{z}|$ $\quad|z|^2=z\overline{z}$ $\quad z^{-1}=\overline{z}|z|^{-2}\,(z\neq 0)$

在指定固定起點的情況下, 我們可以通過給出向量的長度, 和向量與固定方向直線的夾角唯一決定向量, 我們把向量與 x 軸的夾角叫做輻角, 容易知道輻角的值不唯一, 如果我們把角度限制在 $[0,2\pi)$, 則角度值可以唯一確定, 我們把此範圍的值稱作複數輻角的主值

2.2.3. 極坐標表示

我們用模與輻角, 寫出複數的表示形式, 我們稱之爲極坐標表示, 極坐標的形式符號爲:

$$z=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

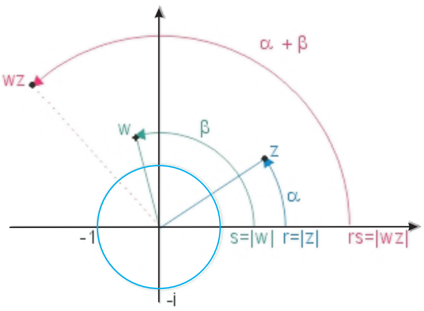
使用歐拉公式上式還可以寫作

$$z=r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$$

這叫做指數形式, 我們用指數形式, 來看一下複數乘法的幾何意義, 注意到

$$r_1\, e^{i\varphi_1} \cdot r_2\, e^{i\varphi_2} = r_1\, r_2\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

我們發現複數相乘, 得到的新複數, 模是原來複數模的乘積, 而輻角是原來複數輻角的加和。注意到, 如果我們乘一個模爲一的複數, 相當於給原來的複數做旋轉變換。



圖五: 複數的乘法

我們發現, 複數的模, 共軛, 輻角的概念, 恰好給出了幾何中的度量, 反射, 旋轉的概念, 也正是這些概念讓複數的方法在解決幾何問題時, 可以轉換爲代數問題, 使得原來很棘手的幾何, 三角, 數論問題, 轉變成代數運算, 而代數運算所需要的技巧相對幾何而言, 小得多。

3. 複數法解決代數問題

利用複數的方法可以通過基本的代數運算導出中學中基本的三角公式, 利用複數的極坐標表示和指數表示, 推導過程僅僅是用到了複數的乘法。通過複數法的靈活運用, 可以導出一系列的三角公式, 下面我們就運用複數與三角的關係, 用複數結合代數運算推導幾個三角恆等式。

問題 1: 正弦, 餘弦的三角和公式。

證明: 爲了簡化推導, 我們取

$$C = \cos\theta, S = \sin\theta$$
$$c = \cos\phi, s = \sin\phi$$

對和角用歐拉公式, 得到下面的恆等關係,

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi) &= \mathrm{e}^{i(\theta+\phi)} = \mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{e}^{i\phi}\\ &= (C+iS)(c+is) = (Cc-Ss) + i(Sc+Cs)\end{aligned}$$

比較兩邊複數的實部與虛部, 我們有如下的三角關係

$$\cos(\theta+\phi) = Cc - Ss$$
$$\sin(\theta+\phi) = Sc + Cs \qquad \square$$

我們用複數的方法得到正弦, 和餘弦的三角和公式。有了三角和的三角公式之後, 中學階段的其他三角公式也就可以藉助這兩個基本的三角公式推導出來。實際上複數的方法能處理的三角公式遠遠不止上面我們推導的兩個, 我們看一下, 下面的幾個公式的推導。

問題 2: 正弦的三倍角公式。

證明:

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + i\sin 3\theta = \mathrm{e}^{3i\theta} = (\mathrm{e}^{i\theta})^3 \\ = (C+iS)^3 = (C^3 - 3CS^2) + i(3C^2S - S^3)\end{aligned}$$

因爲有基本關係 $C^2+S^2=1$ 將上式實部消去 S^2, 虛部消去 C^2, 我們有如下關係,

$$\cos 3\theta = 4C^2 - 3C$$
$$\sin 3\theta = -4S^3 + 3S \qquad \square$$

我們也可以用上面的方法, 運用二項式定理, 逐步遞推, 推導出更一般的公式, 達到用三角函數的冪來表示倍角的三角函數。

上面是用 θ 的三角函數的冪來表示 θ 的倍角的三角函數, 反過來, 我們也可以用 θ 的倍角三角函數表示三角函數的冪。

問題 3: 餘弦的四次冪的倍角表示。

證明: 我們注意到如下關係

$$2\cos\theta = \mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}$$

兩邊四次方, 並運用二項式展開, 我們有

$$\begin{aligned}2^4\cos^4\theta &= (\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta})^4 \\ &= (\mathrm{e}^{4i\theta} + \mathrm{e}^{-4i\theta}) + 4(\mathrm{e}^{2i\theta} + \mathrm{e}^{-2i\theta}) + 6 \\ &= 2\cos 4\theta + 8\cos 2\theta + 6\end{aligned}$$

由上關係, 我們得到 $\cos^4\theta = \frac{1}{8}(\cos 4\theta + 8\cos 2\theta + 3)$ $\square$

我們的方法對三角的多次冪也好用, 我們又得到了一系列的三角公式。

正弦, 餘弦的公式我們有了, 再看一下, 怎樣將複數的方法應用到正切函數。

問題 4: 正切的三倍角公式。

證明: 令 $T=\tan\theta$ 考慮 $z=1+iT$, z 的輻角爲 θ, 容易知道, z^3 的輻角爲 3θ, 由此, 我們有下面的等式

$$\tan 3\theta=\frac{Im(z^3)}{Re(z^3)}$$

我們對z取立方, 得到如下的關係式子,

$$z^3=(1-3T^2)+i(3T-T^3)$$

把虛實各部分帶入, 我們便得到了下面的關係式

$$\tan 3\theta=\frac{3T-T^3}{1-3T^2} \qquad \square$$

我們的方法仍然可以推廣, 比較用三角公式推導和複數法推導, 我們會發現, 複數的方法極其優美, 簡潔, 耐人尋味。

在代數求和時, 常常會發現, 如果寫出該式子對應的對偶式子, 會對解題有很有幫助, 複數法中也有很優美的例子, 我們看一下下面的求和。

問題 5: 求 $\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta$ 的和。

證明: 我們寫出上和的複數對偶式子, 並用字母表示, 我們如下的表達

$$P=\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta$$
$$Q=\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta$$

我們注意到如果令 $r=\cos\theta+i\sin\theta$ 我們會發現, 我們可以將兩個對偶的式子, 組合起來, 將原來的求和先轉換爲求一個幾何級數的和, 再通過比較虛實部, 一下子可以求出原式子與對偶式子的和, 不得不驚嘆, 複數方法的巧妙。

我們可以得到如下的等式

$$P+iQ=\frac{r(1-r^n)}{1-r}=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)(1-\cos n\theta-i\sin n\theta)}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$$

將右邊化簡, 比較虛實部, 得到

$$P=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\,\cos\frac{n+1}{2}\,\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \qquad \square$$

當然我們也可以求得 Q 的值, 如果用普通的三角公式法, 需要較高的構造技巧, 對計算能力有較高的要求, 我們發現複數法能很好的簡化運算。

猜測 1: 怎樣由

$$(a+bi)(\cos\theta+i\sin\theta)$$

的展開計算, 推導出如下關係

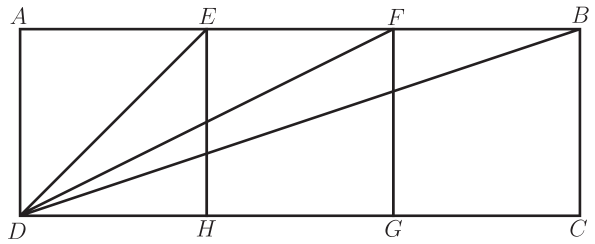
$$b\cos\theta+a\sin\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\tan^{-1}(\frac{b}{a})).$$

4. 複數法解決幾何問題

複數也可以被當作向量來處理, 中學所學的向量涉及旋轉時, 表達並不是很優美。在複數中, 我們結合著複數的乘法運算與輻角運算的關係, 用複數法可以處理好多用歐幾里德的幾何方法, 很難處理的幾何問題, 我們舉例來看一下, 複數法在解決幾何問題的優勢。

下面, 我們考慮, 一個很簡單的小問題

問題 6: 如圖 6 所示的三個正方形並列排放, 求證:$\angle AED=\angle AFD+\angle ABD$。



圖六: 圖例

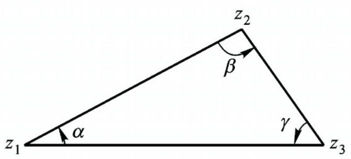
證明: 取 D 爲坐標原點 DC 爲實軸, DA 爲虛軸建立複平面, 令 $\alpha=1+i,\beta=2+i,\gamma=3+i$

我們有 $\beta\gamma=5(1+i),\quad \angle AFD+\angle ABD=arg(\beta\gamma)=arg(1+i)=\angle AED.$ □

複數法解決上面問題, 只須做一次乘法。

在中學中, 我們曾用幾何的辦法證明了三角形的內角和是 π, 用複數法我們同樣能夠得到這個結論。

問題 7: 三角形內角和等於 π。



圖七: 圖例

證明: 設三角形的三個頂點分別爲z_1, z_2, z_3; 對應的三個頂角分別爲α, β, γ。於是有

$$\alpha = arg\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$$
$$\beta = arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}$$
$$\gamma = arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$$

由於

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}\cdot\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=-1$$

兩邊取幅角, 我們有

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+2k\pi$$

由於$0<\alpha<\pi, 0<\beta<\pi, 0<\gamma<\pi$, 所以

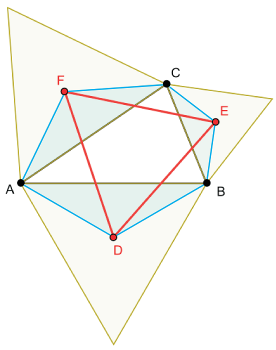
$$0<\alpha+\beta+\gamma<3\pi$$

故$k=0$, 因而$\alpha+\beta+\gamma=\pi$。 □

下面我們來看一個很有趣的問題, 第一個發現此定理的人是拿破崙, 這個問題也以他的名字命名。

問題 8: 任意三角形, 三邊外接正三角形, 則各外接三角形的中心也組成一個正三角形。

拿破崙三角形確實很有趣, 如果我們將拿破崙三角形, 多畫出幾個, 然後填充上顏色, 我們會得到一個鑲嵌, 從鑲嵌中我們會發現不少有趣的性質, 我們會找到很多特定的角度, 很多共線的點, 不知道不可一世的拿破崙, 在發現定理後, 有沒有時間再多畫幾個圖形。



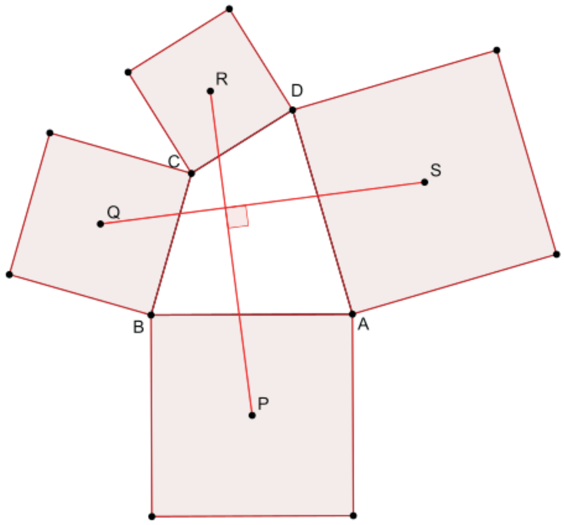
圖八: 拿破崙三角形

圖九: 拿破崙三角鑲嵌

雖然拿破崙定理很美妙, 但我們不打算去證明拿破崙定理, 而是去證明一個比拿破崙定理更難一點的問題, 我們解決了這個較複雜的問題後再看拿破崙定理便會變得簡單了。

下面的問題是 Thebault 提出來的幾個幾何問題之一, 稱作 Thebault 問題。

問題 9: 任意四邊形, 在每條邊外接正方形, 取各個正方形的中心, 連接相對的邊所對應的正方形的中心, 則這兩條線段垂直且相等。



圖十: 圖例

證明: 令$2a, 2b, 2c, 2d$爲表示四邊的複數。由於封口, 我們有關係, $a+b+c+d=0$ 這個關係很重要, 我們會在後面發現, 它對問題的證明起到了很本質的作用。

我們用複數將各中心點表示出來, 注意S, Q相對,R, P相對

$$P = a + ia = (1+i)a \quad R = 2a + 2b + (1+i)c$$
$$Q = 2a + (1+i)b \quad S = 2a + 2b + 2c + (1+i)d$$

由上面的點的表示, 我們取,

$$A = (b + 2c + d) + i(d - b)$$
$$B = (a + 2b + c) + i(c - a)$$

其中 $A = S - Q$, $B = R - P$, 要證明的結論等價於 $A + iB = 0$, 又由於

$$A + iB = (a+b+c+d) + i(a+b+c+d) = 0$$

是故, 結論成立。 □

運用複數的方法, 我們發現, 原本看似複雜的問題, 用短短的幾行推導便能給出解答, 可見複數法在處理與旋轉, 長度有關的問題時, 很有優勢, 而且形式簡潔優美, 很直接, 不需要太多的

構造, 太多的額外輔助。當然複數法也有它的局限性, 當所涉及的問題, 與度量和旋轉關係不是很明顯的時候, 複數法的優勢也就體現的不是那麼明顯了, 值得一提的是, 複數法也可以給出, 像梅捏勞斯定理, 塞瓦定理等一系列和共點, 共線有關的著名定理的證明, 方法也是合理的取複點, 利用共線共點的複數間的關係。

5. 複數法解決初等數論問題

在歷史的那一章, 我們看到, 有人將整數的概念推廣到了複數域裡, 高斯整數就是整數概念在複數域裡的推廣, 我們把 $m+in$ 這樣的複數叫做高斯整數, 其中 m, n 均爲整數。

我們先來通過一個小的例子看看我們在幾何中用的複數的旋轉的方法是如何求解數論問題的。

問題 10: 不可能畫出一個三頂點均爲高斯整數的等邊三角形。

證明: 不妨取正三角形的中心爲複平面原點, 其中一個頂點爲 m_1+in_1 另一個頂點爲 m_2+in_2, 我們有

$$m_2+in_2=(m_1+in_1)(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$$

我們將括號裡的項展開, 合併後得到下面的式子

$$m_2+in_2=(\frac{\sqrt{3}}{2}m_1-\frac{1}{2}n_1)i-(\frac{1}{2}m_1+\frac{\sqrt{3}}{2}n_1)$$

比較一下實部和虛部, 我們發現由於 $\sqrt{3}$ 是無理數, 上面的等式是不成立的, 因此我們有, 不可能存在高斯三角形。

我們發現這個問題的關鍵在於用到 $\sqrt{3}$ 是無理數這個條件, 使得原問題出現有理數等於無理數的矛盾。 $\square$

下面的問題, 很有意思, 如果我們不用複數的方法, 要構造出積的平方和是很困難的, 但如果我們發現了下面的規律, 問題一下子變得顯然了。

問題 11: 兩個整數可寫爲兩個平方數之和, 則其積亦然;

證明: 我們取 $M=a^2+b^2$, $N=c^2+d^2$, 考慮如下式

$$|(a+bi)(c+di)|^2=(ac-bd)^2+(bc+ad)^2$$

而 $|a+bi|^2=M$, $|c+di|^2=N$ 所以原命題成立。 $\square$

我們看到平方和, 可能會下意識想到勾股定理吧, 我們先來看下面一個問題, 然後再來研究勾股數問題。

問題 12: 一個奇素數具有$p = a^2 + b^2$的形式當且僅當 $p \equiv 1 \mod 4$。

證明: 左推右, 一個奇素數模4, 或者爲1或者爲3, 如果$p = a^2 + b^2$, 由於a^2和b^2模4或者爲0或者爲1 , 因此, $p \equiv 1 \mod 4$

右推左, 我們先默認一個事實

$$p \equiv 1 \mod 4 \Rightarrow p \text{ factors in } \mathbf{Z}[i]$$

也就是說由如果 p 模 4 餘 1, 則 p 是兩個高斯整數的積

$$\begin{aligned} p \equiv 1 \mod 4 &\Rightarrow p \text{ factors in } \mathbf{Z}[i] \\ &\Rightarrow p = (a+bi)(c+di) \\ &\Rightarrow p^2 = p\overline{p} = (a^2+b^2)(c^2+d^2) \\ &\Rightarrow p = a^2+b^2 = c^2+d^2 \end{aligned}$$

□

我們來看一下那個默認的事實, 我們知道 $p \equiv 1 \mod 4$由歐拉定理我們知道 $(\frac{-1}{p}) = 1$ 也就是說存在一個數滿足 $h^2 + 1 \equiv 0 \mod p$, 於是我們有

$$p \,|\, h^2 + 1 = (h+i)(h-i)$$

但是, 如果 $p|h+i$ 便有 $p = \overline{p}|h-i$ 也就有 $p|2i$, 也即在高斯整數的世界裡 $p|2$, 也就是說在普通整數的世界裡 $p|2$ 與 p 是奇數矛盾, 對 $p|h-i$ 情況討論相似, 因此我們便知道 p 在高斯整數的世界裡不是素數了。下面來看我們之前提到的勾股數問題

問題 13:

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad x, y, z \in \mathbf{Z}^+, \quad \gcd(x, y, z) = 1$$

也就是說 x, y, z 是兩兩互素的, 不失一般性的可以令 x 是奇數, y 是偶數, 和 z 是奇數。(不可能出現 x 奇 y 奇 z 偶的情況, 只須兩邊都模4, 注意到平方數模4或0或1, 推出矛盾)。

證明: 我們在高斯整數的世界裡處理問題。我們先默認一個事實, 高斯整數的世界裡 $x + iy$ 是一個完全平方數 即存在一個高斯整數 $r + is$ 滿足

$$x + iy = (r + is)^2 = r^2 - s^2 + i2rs$$

這樣我們有

$$x = r^2 - s^2, \quad y = 2rs, \quad z = r^2 + s^2$$

這裡 $0 < s < r$, $\gcd(r, s) = 1$, r, s 一奇一偶.

我們來看爲什麼$x+iy$在高斯整數的世界裡是完全平方數。

我們令 π 是高斯整數世界裡的素數, 則我們有

$$\begin{aligned}\pi|x+iy &\Rightarrow \pi|(x+iy)(x-iy)=z^2\\ &\Rightarrow \pi^2|z^2\\ &\Rightarrow \pi^2|x+iy \quad or \quad \pi|x-iy\end{aligned}$$

如果 $\pi^2|x+iy$, 則素數 π 在右側至少出現兩次, 我們有 $x+iy$ 可被 π^2 整除, 重複上述討論即可。

在另一種情況, 我們有

$$\begin{Bmatrix}\pi|x+iy\\ \pi|x-iy\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix}\pi|2iy\\ \pi|z\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix}\pi\overline{\pi}|4y^2\\ \pi\overline{\pi}|z^2\end{Bmatrix}$$

最後一對關係由於 $\gcd(x,y,z)=1$, y 是偶數, z 是奇數, 矛盾。因此第二種情況不可能。 □

參考文獻

1. Conway, John, Functions of One Complex Variable I. Springer. 1986. ISBN 0-387-90328 -3.
2. Tristan Needham, Visual Complex Analysis Oxford Univ Pr.1999. ISBN 0-19-853446-9.
3. 鍾玉泉.複變函數論 (第三版) 高等教育出版社 2004 ISBN: 9787040129434.
4. GH Hardy , EM Wright 哈代數論 (第六版) 人民郵電出版社 2009 ISBN: 9787115214270.

—本文作者於投稿時爲青島大學師範學院數學系學生—