數學傳播 37卷2期, pp. 73-79

阿基米德如何求球體積

朱 哲

數學史家 E.T. 貝爾曾說過: “任何一張關於有史以來最偉大的數學家的名單中, 必定會包括阿基米德。另外兩個通常是牛頓和高斯。不過, 以他們的豐功偉績和所處的時代背景來對比, 拿他們影響當代和後世的深邃久遠來比較, 還應首推阿基米德。” 阿基米德同時還享有“數學之神”的美譽, 他出生於義大利西西里島的敍拉古。他的父親是天文學家, 母親出生于名門望族, 且知書達理。青年時代的阿基米德曾到號稱“智慧之都”的亞歷山大城求學。期間, 阿基米德系統地閱讀了歐幾里德的《幾何原本》, 研究了古希臘時期巧辯學派代表人物的著作及安提豐等人關於三大幾何問題討論的種種方法, 特別是安提豐和歐多克索斯的窮竭法對阿基米德影響最爲深刻, 以至後來發展成爲他處理無限問題的基本工具。

阿基米德學成後返回故鄉, 並一直住在敍拉古。阿基米德的一生充滿傳奇色彩, 皇冠摻假的故事家喻戶曉。西元前212年, 羅馬人在其統帥馬塞露斯的率領下圍攻敍拉古。由於叛徒出賣, 羅馬人趁敍拉古人慶祝女神節的狂歡之夜, 攻佔了城市; 阿基米德死于士兵劍下, 臨死前還在思考幾何問題。阿基米德的死亡標誌著希臘數學和燦爛文化走向衰落的開始, 從此以後, 羅馬人開始了野蠻和愚昧的統治。據說曾下令勿殺阿基米德的馬塞露斯事後特意爲他建墓, 並按照他的遺願將死者最引以自豪的數學發現的象徵圖形–球及外切圓柱刻在墓碑上。阿基米德通過研究發現: 球的體積是其外切圓柱體體積的 $\frac{2}{3}$, 其表面積也是其外切圓柱體表面積的 $\frac{2}{3}$。

那麼, 阿基米德是如何求得球體積的呢? 在回答這個問題之前, 我們先來瞭解“阿基米德羊皮書”的傳奇故事。

1. 阿基米德羊皮書

大約西元 1000 年前, 一位叫阿卡隆斯的人仰慕阿基米德的數學貢獻, 將所能收集到的阿基米德的書稿工整地抄錄在羊皮書上, 近九十頁。但是在12世紀末至13世紀初的時候, 一名僧侶竟然將羊皮紙上的原文洗刷刮除, 再寫上東正教的祈禱文, 這樣阿基米德的著作從此變成一本祈禱書。1906年, 這本祈禱書在土耳其伊斯坦堡出現, 有人注意到羊皮紙下方有當年沒有刮

除乾淨的數學文字, 引起丹麥哥本哈根大學教授海伯格的注意。他親自前往伊斯坦堡, 赫然發現這本祈禱書原來是阿基米德的著作, 其中最重要的就是早已失傳的《有關力學定理的方法》(簡稱《方法論》) 與《史多馬奇恩》, 以及原本只有拉丁文譯本的《論浮體》。

受限於當時環境與科技條件, 海伯格無法對"阿基米德羊皮書"做更完整的解讀, 而且隨著第一次世界大戰爆發, 這本彌足珍貴的古籍一度消失, 多年後才又出現在法國一名收藏家的公寓中。1998年10月, "阿基米德羊皮書"在紐約克利斯蒂公司拍賣, 一名匿名富豪出價兩百萬美金買下, 並委託美國巴爾的摩的"華特斯美術館"典藏並加以復原。

這時, "阿基米德羊皮書"的狀況已經相當差, 除了歲月的痕跡之外, 多處頁面佈滿黴菌和蠟油, 後人爲防止散佚而塗抹大量膠水; 更嚴重的是, 20世紀的善本書僞造者爲了增添其"價值", 在其中四頁畫上拜占廷時代的宗教畫, 造成難以彌補的傷害。所幸古文物專家運用紫外線與數位圖像電腦處理等技術, 耐心將"阿基米德羊皮書"一頁一頁復原, 塡補了百年前海伯格解讀的闕漏, 並呈現多幅原作繪製的幾何圖形。從2000年5月開始, 復原工作更是如虎添翼。加州斯坦福大學同步輻射實驗室的科學家伯格曼想到, 既然抄錄阿基米德論文的墨水中含有鐵, 因此可以用直線加速器發出的高能 X 光, 將墨水中的鐵原子激發出螢光, 從而讓許多至今無法解讀的文字與圖形一一現形。華特斯美術館善本書籍部主任諾爾說: "這猶如從西元前三世紀 (阿基米德時代) 收到一份傳眞, 眞是令人興奮不已。"

圖 1: 阿基米德羊皮書。

除去《方法論》, 阿基米德的著作還有《論平面平衡》、《拋物線求積》、《論螺線》等, 阿基米德的這些數學著作無一不是數學創造的傑出之作, 正如英國數學史家希思所指出的, 這些論著“無一例外地都被看作是數學論文的紀念碑。解題步驟的循循善誘, 命題次序的巧妙安排, 嚴格擯棄敍述的枝節及對整體的修飾潤色, 總之, 給人的完美印象是如此之深, 使讀者油然而生敬畏的感情。”

2. 阿基米德的“平衡法”

我們知道, 窮竭法可以嚴格證明已知的命題, 卻不能用來發現新的結果。這是希臘演繹數學的一大弱點。阿基米德在這方面則屬例外, 他的數學工作是嚴格證明與創造技巧相結合的典範。在他的《方法論》中, 他斷言“力學便於我們發現結論, 而幾何則能幫助我們對結論作出證明”。《方法論》是阿基米德寫給艾拉托塞尼的一封信, 其中包括15個命題, 集中闡釋了發現求積公式的方法, 這種通常被稱爲“平衡法”的方法, 實質上是一種原始的積分法。

阿基米德用力學方法探索數學結論的基本思想是: 爲了找出所求圖形的面積和體積, 可將它分成很多窄的平行條和薄的平行層, 接著, 將這些條或層掛在槓桿的一端, 使它平衡於體積和重心爲已知的圖形, 利用槓桿平衡原理及已知圖形的面積、體積, 便可探求出未知圖形的面積和體積來。平衡法體現了近代積分學的基本思想, 可以說是阿基米德數學研究的最大功績。阿基米德在這篇著作中應用力學探索方法確定了球體積, 拋物線弓形面積, 以及橢球體、拋物線旋轉截體和球缺的體積。

阿基米德對球體積公式的推導可簡單陳述如下:

設 R 爲一個球的半徑, 把這個球的兩極沿水平線放置, 使北極 N 與原點重合 (如圖2)。畫出 $2R\times R$ 的矩形 $NABS$ 和 $\triangle NCS$ 繞 x 軸旋轉而得到的圓柱和圓錐。現在從這三個主體中割出與 N 距離爲 x、厚度爲 Δx 的三個豎直薄片 (假設它們都是扁平圓柱), 這些薄片的體積分別近似於:

球: $\pi x(2R-x)\Delta x$ (設球片半徑 r, 則有 $r^2=R^2-(x-R)^2=2xR-x^2=x(2R-x)$),

圓錐: $\pi x^2\Delta x$,

圓柱: $\pi R^2\Delta x$。

取由球和圓錐割出的兩個薄片, 將它們的重心吊在點 T, 使 $TN=2R$。這兩個薄片繞 N 的合成力矩爲 $[\pi x(2R-x)\Delta x+\pi x^2\Delta x]2R=4\pi R^2x\Delta x$。

容易看出這等於圓柱割出的薄片處於原來位置時繞 N 的力矩的 4 倍。把所有這些薄片繞 N 的力矩加在一起便得到:

$2R$ (球體積+ 圓錐體積)$=4R$ 圓柱體積,

$$2R\left(\text{球體積}+\frac{8\pi R^3}{3}\right)=8\pi R^4,$$

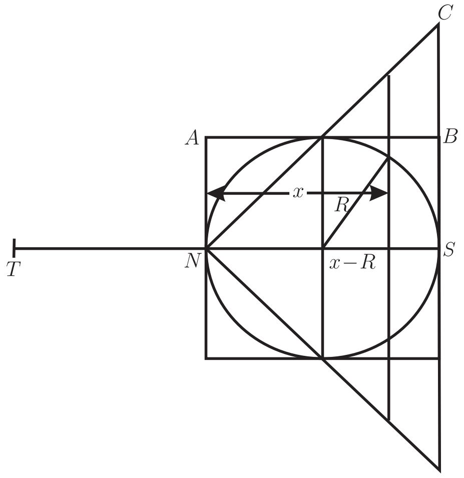

圖 2: 阿基米德用平衡法求球體積。

故得球體積 $=\dfrac{4}{3}\pi R^3$, 等於其外切圓柱體積的 $\dfrac{2}{3}$。

當然, 平衡法本身必須以極限論爲基礎, 阿基米德意識到他的方法在嚴密性上的不足, 所以當他用平衡法求出一個面積或體積之後, 必再用窮竭法給以嚴格的證明 (本文對其證明過程不作介紹)。這種發現與求證的雙重方法, 是阿基米德獨特的思維模式, 也可以說是他勝歐幾里德一籌之處。

雖然 "窮竭法" 在歐幾里德《幾何原本》中已有記載, 甚至更早的還可以追溯到歐多克索斯, 但是任何人都難以否認這樣的事實: 阿基米德對窮竭法的運用代表了古代用有限方法處理無限問題的最高水準。

3. 對阿基米德方法的解讀

以上對阿基米德平衡法的描述比較簡單, 似乎也比較晦澀難懂, 爲此, 我們對這一方法進行具體而細緻的解讀。需要說明的是, 這解讀並非完全是遵照阿基米德的原意, 而是爲了幫助讀者理解他的方法而進行了適當的處理。

這一過程由以下四部分組成:

(1) 分體成片

如圖3, 將圓柱、圓錐、球分成 n 片平行的薄片, 每片的厚度爲 Δx ($\Delta x=\frac{2R}{n}$), 其中第 p 片的重心到頂點 O 的距離爲 x, $x=\left(p-\frac{1}{2}\right)\Delta x$ ($p\le n$)。

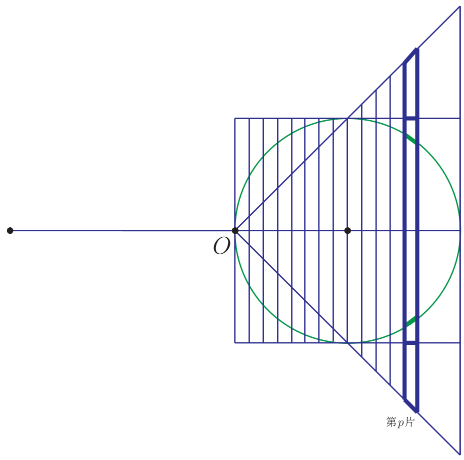

圖 3: 分體成片。

(2) 取片求積

取第 p 片進行研究, 求出三片的近似體積分別爲:

$$\begin{aligned} V_{\text{柱片}} &= \pi R^2 \Delta x, \\ V_{\text{錐片}} &= \pi x^2 \Delta x, \\ V_{\text{球片}} &= \pi[R^2 - (x-R)^2]\Delta x = \pi(2Rx - x^2)\Delta x。\end{aligned}$$

(3) 力的平衡

如圖 4, 柱片不動, 將錐片和球片放到 O 點另一側的 T 點, 且 $OT = \frac{1}{2}R$。(這一放置方式與阿基米德的原意不同。)

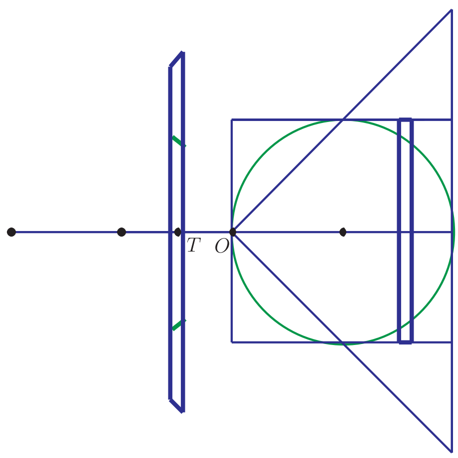

圖 4: 力的平衡。

因爲 $F=V\rho g$, 爲了簡便起見, 我們用 V 指代 F, 求得各片的力矩:

$$\begin{aligned}
\text{柱片的力矩} &= V_{\text{柱片}}\cdot x=\pi R^2\Delta x\cdot x,\\
\text{錐片的力矩} &= V_{\text{錐片}}\cdot \frac{1}{2}R=\pi x^2\Delta x\cdot\frac{1}{2}R,\\
\text{球片的力矩} &= V_{\text{球片}}\cdot \frac{1}{2}R=\pi(2Rx-x^2)\Delta x\cdot\frac{1}{2}R,
\end{aligned}$$

錐片和球片的合力矩 $=\pi x^2\Delta x\cdot\frac{1}{2}R+\pi(2Rx-x^2)\Delta x\cdot\frac{1}{2}R=\pi R^2\Delta x\cdot x=$ 柱片的力矩, 平衡。

對第 p 片如此, 對任意片都有此結論: 錐片和球片的合力矩=柱片的力矩。

(4) 合片成體

把所有片合起來成原來的體, 按 (3) 中的方式, 力依然平衡。(這裏有兩種理解, 一是所有的錐片和球片均理想化地放置於 T 點, 二是認爲錐體和球體的重心位於 T 點。)

則有:

$$(V_{\text{錐}}+V_{\text{球}})\cdot\frac{1}{2}R=V_{\text{柱}}\cdot R, \tag{$*$}$$

由於錐體和柱體的體積公式已知, 我們可以推出球的體積公式: $V_{\text{球}}=\frac{4}{3}\pi R^3$。

其中, (*) 式的具體數學推導過程如下:

$$\begin{aligned}
&\text{當 } p=1 \text{ 時, } (V_{\text{錐片}\,1}+V_{\text{球片}\,1})\cdot\frac{1}{2}R=V_{\text{柱片}\,1}\cdot\Big(1-\frac{1}{2}\Big)\Delta x,\\
&\text{當 } p=2 \text{ 時, } (V_{\text{錐片}\,2}+V_{\text{球片}\,2})\cdot\frac{1}{2}R=V_{\text{柱片}\,2}\cdot\Big(2-\frac{1}{2}\Big)\Delta x,\\
&\qquad\vdots\\
&\text{當 } p=n \text{ 時, } (V_{\text{錐片}n}+V_{\text{球片}n})\cdot\frac{1}{2}R=V_{\text{柱片}n}\cdot\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Delta x\text{。}
\end{aligned}$$

其中, $V_{\text{柱片}\,1}=V_{\text{柱片}\,2}=\cdots=V_{\text{柱片}n}=\dfrac{V_{\text{柱}}}{n}$,

相加, 得

$$\begin{aligned}
\Big(\sum V_{\text{錐片}}+\sum V_{\text{球片}}\Big)\cdot\frac{1}{2}R &= \frac{V_{\text{柱}}}{n}\cdot\Big[\Big(1-\frac{1}{2}\Big)+\Big(2-\frac{1}{2}\Big)+\cdots+\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Big]\Delta x\\
&= \frac{V_{\text{柱}}}{n}\cdot\frac{1}{2}n^2\cdot\frac{2R}{n}=V_{\text{柱}}\cdot R,\\
\text{也即}\qquad (V_{\text{錐}}+V_{\text{球}})\cdot\frac{1}{2}R &= V_{\text{柱}}\cdot R\text{。}
\end{aligned}$$

在阿基米德之前, 人們還不知道球的表面積公式和體積公式。正如 A. 艾鮑博士在《早期數學史選篇》中所說的: “如果說歐幾里德《幾何原本》是前人工作的彙編的話, 那麼, 阿基米德的每一篇論文都爲數學知識寶庫作出了嶄新的貢獻。”

參考資料

1. 李文林, 數學史概論(第三版)[M], 北京: 高等教育出版社, 2011。
2. 紀志剛, 數學的歷史[M], 南京: 江蘇人民出版社, 2009。
3. 朱家生, 數學史(第二版)[M], 北京: 高等教育出版社, 2011。

—本文作者任教浙江師範大學教師教育學院—