數學傳播　37卷2期, pp. 49-55

Harvey Plotter 與圓上的有理點

Nathan Carter and Dan Kalman

譯者　雷豔萍

Harvey Plotter 呻吟著醒來, 雙手緊緊抱著額頭。灼熱的疼痛沿著額頭上鋸齒形根號狀的傷疤陣陣襲來。他費了九牛二虎之力, 終於打破了與 Lord Voldemorphism 的精神連結, Voldemorphism 正是多年前在他的額頭上留下傷疤的人。

「Harvey, 你還好嗎?」Hymernie 問。「你的傷疤是不是又疼了?」

隨著額頭的疼痛逐漸減弱, 腦海中的迷霧漸漸消散, Harvey 鬆開了緊握的雙手。「是的」, 他回答, 「那個人因爲某些事情非常心煩。」

Graphindor 學院的交誼廳裏, Rong 加入了他們, 在壁爐旁的椅子上坐了下來, 看起來有些擔憂。「爲什麼, 你看到了什麼?」

「一張加密的圖。」他攤開羊皮紙, 勾勒出烙印在腦中的圖像。

「這張圖有什麼意義?」Rong 問。

Hymernie 不以爲然地看著 Rong。「Rong, 老實說, 你是不是從來就沒有翻過你的課本? 那很明顯是一個 circularum unitatus。」

Rong 難爲情的蹭蹭脚。「我看起來, 就是一個單位圓。」

Hymernie 翻個白眼, 還沒來得及回答, Harvey 插進來。「請不要在文字上計較了, 時間不多。那個人正試圖找出圓周上所有的有理點。」

「有理點?」Rong 疑惑地問。

「是的, 像$(1,0)$ 和$(0,1)$ 這樣兩個座標都是有理數的點。」

「那個人爲什麼想要找出這些有理點呢?」

「不知道, 既然他這樣做, 這些點必然是要緊的。我們必須找出他這樣做的原因, 而且必須比他先找出這些有理點。」

---

*原文標題 Harvey Plotter and the Circle of Irrationality, 發表於 Math Horizons, November 2011, pp. 10-13. 本文獲得 2012 年美國數學協會 (MAA) 的寫作獎之一 Trevor Evans 獎。該獎項於 1992 年由 MAA 的董事會成立, 1996 年第一次頒發, 以 Emory 大學的傑出數學家、教師、作家 Trevor Evans 命名, 頒給前一年登載在 Math Horizon 上適合大學生閱讀的, 最出色的文章。參考網址 http://www.maa.org/awards/evans.html。

「好的, 開始行動吧!」Rong 說。「你已經找到了兩個, $(1,0)$ 和 $(0,1)$, 根據對稱性, $(-1,0)$ 和 $(0,-1)$ 是另外的兩個。這就有四個了, 還有多少個?」

「這就是問題的關鍵了, Rong,」Hymernie 搖搖頭。「就算找到了更多的點, 但怎麼確定就是全部的點呢?」

「使用魔法怎麼樣?」Harvey 問。「有沒有可以用的魔咒?」

「也許有吧,」Hymernie 回答, 「難道那個人不會已經這樣做了? 不過, 試試也無妨。」她舉起魔杖。「有理點, 現身!」

劉立寬繪圖

圓周上開始出現光點, 數量不斷增加, 亮度也不斷增強, 直到整個圓周都閃閃發亮。

Rong 對著羊皮紙, 皺起了眉頭, 「看起來圓周上每一個點都是有理點!」

「不,」Hymernie 說, 「有許多點不是, 比如, $\left(\frac{1}{2},\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$和 $\left(\frac{1}{3},\sqrt{\frac{8}{9}}\right)$。事實上, 對任意一個介於$-1$ 與1 之間的數 x, 單位圓方程 $x^2+y^2=1$ 給出

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}。$$

但是如果 x 只是一個簡單的分數, 那麼這個 y 幾乎總是無理數。我認爲魔咒所表明的是, 有理點分佈得太緊密了以至於無法區分開來。」

「那個人會不會也在找無理點?」Rong 問 Harvey。「不,」Harvey 肯定地回答。「無理點對他來說沒有用。」Applied Numerology 本來被認爲是一種黑魔法, 但是 Harvey 與 Voldemorphism 的連結給了他一種本能的直覺, 他的朋友們也信賴他的這種直覺。

Rong 難得的有想法。「兩個有理點之間連線的斜率總是有理數。」

「怎麼說?」Harvey 問。

「喔, 比如 $(0,1)$ 和 $(\frac{3}{4}, \frac{4}{5})$ 是兩個有理點, 這兩點連線的斜率是

$$\frac{\frac{4}{5}-1}{\frac{3}{5}-0}。$$

因爲這裏所有的數字都是有理數, 所以計算出來的結果一定也是有理數。」

Hymernie 看起來有點懷疑。「就算這樣, 但這又能告訴我們什麼?」

「呃‧‧‧‧‧‧」Rong 不太肯定地繼續。「也許經過圓周上一點, 例如 $(0,-1)$, 畫一條斜率爲有理數的直線, 它將會與圓周交於另一個有理點。因此, 經由畫斜率爲有理數的直線, 就可以找到許多有理點。」

Hymernie 輕歎一聲。「Rong, 你混淆了逆命題與逆否命題, 這是一個經典的謬誤。」

Rong 眨了眨眼睛, 不情願承認自己需要一個解釋。

Harvey插進來解圍。「你的意思是, 因爲兩個點是有理的, 所以它們連線的斜率就是有理數, 但是這並不意味著反過來也是對的。只是從圓上的一個有理點引出一條以有理數爲斜率的直線並不能確保能與圓交於另一個有理點。」

「正是這樣!」Hymernie 附和。

「但是 Rong 的想法很好, 如果我們能夠按照他的方法找出新的有理點, 他所陳述的事實也確保了我們能夠用這個方法找出所有有理點。而且對每一個有理數斜率來說, 剛好只能找出一個有理點。」

Rong 立即點點頭。「是的, 我正是這個意思, 謝啦!」

「那麼, 我們來對付這個問題吧,」Harvey 說。「時間可能不多。是不是每畫一條以有理數爲斜率的直線總是與圓交在*有理點*上呢? 我們試幾個例子吧!」

他剛要伸手拿鵝毛筆, Hymernie 已搶先一步。在 Harvey 陳述這個猜想時, 她眼睛一亮, 邊說邊用鵝毛筆在羊皮紙上飛快地劃著。「從 $(0,-1)$這一點引一條斜率爲 $\frac{1}{2}$ 的直線。它在 y 軸上的截距爲 -1, 因此方程爲 $y=\frac{1}{2}x-1$。直線和圓的聯立方程組

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=\frac{1}{2}x-1 \end{cases}$$

的解就產生出一個新的交點。」

當 Hymernie 開始求解時, Rong 湊過去, 指著她的第一個步驟,

$$x^2+(\frac{1}{2}x-1)^2=1 \tag{1}$$

「你怎麼得到這一步的?」

她轉過頭看著 Rong, 時間似乎定格了, 他們四目交會, 鼻子幾乎相碰。Harvey 打斷他們,「Rong, Hymernie, 專心點兒! 我們必須比 Voldemorphism 早解決這個問題。還記得凡事一經他染指的後果嗎?」

「記得,」Hymernie 轉移了視線, 低聲說,「他⋯⋯他把一切對應到⋯⋯」

「邪惡,」Harvey 接著,「而且無法逆轉。」

Hymernie 手中的筆抖了一下。自從她考完 O.W.L.[1] 的 O.D.E.[2]以後, 還從未對一個數學問題如此沒有把握。

「我猜,」Harvey 說,「你想說你用了代換, 對嗎?」

「當然,」她回過神來,「方程 (1) 恰好是一個一元二次方程, 因此我們可以展開並應用求根公式。但是這樣我們只能找出直線與圓的交點的公式, 並不能說它們是有理的。求根公式裏有一個根號, 而這通常是無理數的標誌。」她不由自主地瞥了一眼 Harvey 額頭上的疤痕。

Rong 說,「但是我們並不需要二次方程的兩個根, 我們已經知道 $(0,-1)$ 是其中的一個根, 所以只需要求出另外一個。」

Hymernie 倒吸一口氣, 眼睛瞪得幾乎像羊皮紙上的圓那麼大。「Rong, 就是這樣!」她尖叫道, 抱住 Rong, 用力太猛兩人一起摔倒在地板上。

Rong 掙脫開來面帶委屈。「爲什麼你總是在我有一個好的想法時如此大驚小怪?」

Hymernie 漲紅著臉回到椅子上, 此時, Harvey 又插進來,「記住–我們有點趕。Hymernie, 你剛剛發現了什麼?」

Hymernie 深深吸了一口氣。「Rong, 嗯⋯⋯所感興趣的二次方程的根」–她的臉又紅了–「是直線與圓的兩個交點的 x 座標。但是我們已經知道其中一點的橫坐標是 $x=0$。也就是說 $x=0$ 是二次方程的一個根, 所以二次式可以分解因式爲 $ax(x-b)$。因爲這個過程不涉及開平方, 因此另一個根也是有理數。我們已經證明了 Rong 的猜想!」

「高明!」Harvey 說,「也就是說, 經過點$(0,-1)$ 作所有斜率爲有理數的直線, 取它們與圓的交點, 就找出所有的有理點了!」

「讓我來吧, 」Rong 一反常態, 用一種正式開講的語氣說,「在化簡我的新歡 (1) 之後, 得到 $x(\frac{5}{4}x-1)=0$, 其非零解爲 $x=\frac{4}{5}$。代入直線方程 $y=\frac{1}{2}x-1$, 得到 $y=-\frac{3}{5}$。因此我們得到有理點 $(\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$。利用對稱我們得到 $(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$, 透過選擇適當的正負號可以得到這個解的所有可能形式。」他微笑著扔下鵝毛筆, 甚爲得意地朝 Hymernie 望去。卻只看到 Hymernie 緊鎖的眉頭, 笑容隨之退去。「怎麼啦? 難道有什麼不對嗎?」

Harvey 笑一笑。「當然沒錯, 但我覺得在你開始炫耀之前講得更好。」Rong 歎了口氣。「不過酷的是, 數學如何解決這個問題,」Harvey 繼續,「讓我試一試, 如果取斜率爲 5, 則直線方程

[1]O.W.L. 是 Ordinary Wizarding Level 的縮寫, 在小說中是魔法學校考試的一種等級, 即普通巫師等級。

[2]O.D.E. 是 Ordinary Differential Equation 的縮寫, 即常微分方程。

爲 $y = 5x - 1$。代入圓的方程可得

$$x^2 + (5x-1)^2 = 1,$$

化簡後得到

$$26x^2 - 10x = 0,$$

因式分解爲

$$2x(13x-5) = 0,$$

因此 $x = 0$ 或 $\frac{5}{13}$, 我們對 $\frac{5}{13}$感興趣。將它代入直線方程 $y = 5x - 1$, 可得 $y = \frac{12}{13}$。好啦!我們在圓上得到了另一個有理點 $(\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$。」

「但是如何找出所有的有理點呢?」Hymernie 問,「每一個有理數斜率對應一個不同的有理點, 而這樣的有理數斜率有無限多個。」

三人盯著羊皮紙沉默了許久。逐漸意識到這是一個驚人的無限長的代數習題, 他們近乎陷入絕望。

一個慈祥的聲音從身後傳來, 打破了沉默,「你們似乎忘記了一個最強大最古老的魔法。」

他們回過頭來, 牆上 Alphas Jumblemore 的肖像, 一雙銳利的藍眼睛正盯著他們。

「教授, 那是什麼魔法?」Hymernie 問。

「哎!代數的魔法,」他回答,「按照先前的步驟, 但不選擇某個特定的斜率, 而是用一個一般的有理數, 比如說 $\frac{p}{q}$。」

「我不知道可以這樣做呢,」Rong 嘟囔了一句。

「試一下吧,」Harvey 說,「如果斜率是 $\frac{p}{q}$, 那麼直線的方程爲 $y = \frac{p}{q}x - 1$。」

「將它代入圓的方程可得

$$x^2 + \left(\frac{p}{q}x - 1\right)^2 = 1,$$

展開後得到

$$x^2 + \frac{p^2}{q^2}x^2 - \frac{2p}{q}x + 1 = 1,$$

合併同類項可得

$$\left(1 + \frac{p^2}{q^2}\right)x^2 - \frac{2p}{q}x = 0,\text{」}$$

「這很醜, 然而我還是可以分解因式

$$x\left[\left(1 + \frac{p^2}{q^2}\right)x - \frac{2p}{q}\right] = 0,$$

爲了求出非零根, 我們必須解方程

$$\left(1 + \frac{p^2}{q^2}\right)x - \frac{2p}{q} = 0\text{」}$$

Harvey 停了一下, 對結果不如預期感到不滿,「天哪, 看起來相當複雜。」

「兩邊乘以 q^2 看看,」Hymernie 說,「這樣就可以去掉分母得到 $(q^2+p^2)x-2pq=0$, 因此

$$x=\frac{2pq}{p^2+q^2}。$$

於是, 根據直線方程可得

$$y=\frac{p}{q}x-1=\frac{2p^2}{p^2+q^2}-1=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}」$$

她看著這個結果, 臉上綻放出笑容。「大功告成!我們找到了生成單位圓上所有有理點的公式!」

「Hymernie, 你太厲害了,」Harvey 說:「我眞希望我們知道那個人爲什麼想要找出這些有理點。」

從他們開始接受 Jumblemore 的建議, Rong 一直一言不發。Harvey 回過頭來, 看到 Rong 一臉恍惚地盯著掛在壁爐上方的 Applied Numerology 橫幅,「Rong, 你沒事吧?」

「嗯? 什麼?」Rong 答,「哦, 沒事。我只是在想, 我們找到的這些有理點$\cdots\cdots$是不是讓你想到了什麼?」

「什麼意思?」Harvey 問。

「哦, 如果你注意出現在其中的整數, 那麼在第一個例子中得到 $3, 4, 5$, 在第二個例子中得到 $5, 12, 13$, 它們似曾相識。」

「Rong!」Hymernie 叫著, 抓住他的長袍搖晃。「太棒了!它們正是麻瓜[3]所謂的畢達哥拉斯三元數組!」她熱情地靠向 Rong, 但 Rong 卻一副不領情的樣子。

「我的意思是說,」她略爲平靜地繼續,「當然是你想出來的, 因爲你$\cdots\cdots$有時非常$\cdots\cdots$深思熟慮。」

「沒錯,」Rong 帶著滿足的微笑回答。「我有時也可以頗爲深思熟慮。」他把胳膊搭著 Hymernie 的肩, 轉向 Harvey, 一根指頭點著自己的太陽穴重複道,「深思熟慮。」

「但是, 我還是不明白, 麻瓜的三元組什麼的是什麼東西?」Harvey 問。

Hymernie 指向羊皮紙,「那些有理點給出了直角三角形三邊的比例。在 Mystical Numerology的第一堂課中我們學過–」

「–直角三角形有無與倫比的魔力, 」Harvey接著說, 他連前一天的課幾乎都不記得, 更不用說第一天的, 但是在內心深處他知道這是對的, 仿佛他曾經在正式的體系中驗證過一樣。「但是我仍然不懂這些三元組。」

Hymernie 回到羊皮紙。「看, $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ 伴隨著一個邊長爲 $3, 4, 5$ 的直角三角形, 而 $(\frac{5}{13},\frac{12}{13})$

[3]Muggle 在小說中指不會魔法的人。

件隨著一個邊長爲 5, 12, 13 的直角三角形。同樣的, 一般點

$$\Big(\frac{2pq}{p^2+q^2}, \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}\Big)$$

件隨著一個邊長爲 $2pq$, p^2-q^2, p^2+q^2 的直角三角形。我們有一個公式能產生每一個可以構成直角三角形邊長的三元數組。」

Harvey 對他兩個最好的朋友露出燦爛的笑容, 自從他在夢中看到 circularum unitatus 之後, 第一次有這樣的好心情。「那就是說, 無論那個人施用哪種直角三角形魔法, 我們都知道如何還擊了!」

肖像裏 Alphas Jumblemore 靜靜地微笑著俯視他三個年輕的門生,「強大的魔法三元組嗎? 我眼前就有一組魔法三人組。」

致謝: 眞誠的感謝首都師範大學數學科學學院研究生, 邵紅亮、趙潔、林開亮對本譯文的傾力校對。同時也非常感謝數學傳播審稿人對本文翻譯過程中語言邏輯以及譯文慣例提出的寶貴意見, 這對我今後的翻譯工作起著重要的作用。

—本文作者 Nathan Carter 爲本特利大學 (Bentley University) 數學副教授, Dan Kalman 爲美國大學 (American University) 數學教授, 譯者雷豔萍爲杭州育才中學數學教師—