數學傳播 37卷2期, pp. 38-48

楊振寧的一個猜想

林開亮

介紹

1961年, 楊振寧先生與伯厄斯 (Nina Byers) 提出了用量子統計力學的基本結果 —BCS 理論— 來解釋磁通量量子化的設想。這個工作引導他試圖去瞭解 BCS 理論以及庫珀對 (Cooper pairs) 的準確涵義。[1] 楊先生的這項研究導致了1962年發表的題爲《非對角長程序及液氦和超導體的量子相》這一漂亮文章 [3]。楊先生曾在其論文選集 [5]中對該文作了簡要的評論。對於這篇文章, 他本人在1987年作過更通俗的評述(見 [6]):

> 在1962年, 我把以前的一個想法和它的數學基礎重新分析了一下, 寫出了一篇文章。中間我引入了一個術語, 叫做「非對角長程序」(off-diagonal long-range order)。我認爲這是一篇非常重要的文章, 我覺得這篇文章的重要性今天還沒有完全發揮出來。最近發現了高溫超導 (high T_c superconductivity), 所以使得我對超導問題重新發生興趣, 證實了我當時的想法。超導理論中一個劃時代的貢獻, 是 BCS 理論。不過 BCS 並非唯一的超導機制, 今天的高溫超導機制很可能是 BCS 之外的。我現在正研究這個問題, 不過還沒有什麼成果可以向大家報告。1962年關於超導的這一類工作, 也是一種統計力學的工作, 不過跟我以前做的統計力學不完全一樣。以後我就做了這樣一件事情。既然我給了一個條件, 在這個條件之下, 一個運動系統就會有超流或超導現象, 這個條件就是該系統具有非對角長程序。所以從1962年開始, 我就熱衷於這樣一件事情, 即試圖找出一個運動系統, 一個模型, 對這個模型我可以嚴格證明它有非對角長程序。
>
> 我在1962年的文章中指出了 BCS 理論之所以正確的原因在於, 他們猜出了一個波函數, 而這個波函數具有非對角長程序。可是這個原來的物理問題跟這個猜出來的波函數是什麼關係, 他們不能證明。從嚴格的意義上來講, 這個波函數並非原來模型的解, 只能籠統地說「這樣一個波函數是一個很好的近似解」, 但這是不嚴格的。所

[1] BCS 是 T. Bardeen, L. N. Cooper 和 J. R. Schrieffer 三人姓名的縮寫, 他們因爲在1957年的合作工作中提出了超導性的微觀理論 (BCS 理論) 而獲得1972年的諾貝爾物理學獎。庫珀配對是指, 費米子兩兩成對, 形成一種類似於玻色子的結構, 它是 BCS 超導理論的一個基本構成。

以, 從1962年開始, 我所要做的一件事情, 就是試圖找出一個簡化的模型, 使得對這個模型我可以嚴格證明, 它的基態波函數有非對角長程序。

筆者最近半年學習了這篇文章, 漸漸體會出其中的一些精深微妙之處, 這裏僅僅選取一二與大家分享。最主要的是, 楊振寧先生在1963年發表的同一主題的姊妹篇 [4] 中提出的一個進一步的猜想似乎至今尚未被人證實, 筆者希望這一猜想能引起讀者的興趣。

爲便於讀者閱讀和理解, 筆者這裏將楊振寧先生所用的物理術語轉換成數學語言, 對於比較重要的概念, 我們會以註記的形式交代其物理背景。本文中, 定理2和定理3與楊振寧原文中的對應結果在表述上略有差異, 但這一差異只是表面上的。

1. 外代數的外乘和內乘

我們考慮向量空間爲 $\mathbb{R}^m$ 上的外代數 $\bigwedge^*(\mathbb{R}^m) = \bigoplus_{n=0}^m \bigwedge^n(\mathbb{R}^m)$, 其中 $\bigwedge^n(\mathbb{R}^m)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上的 n 次形式的空間。

通過 $\bigwedge^1(\mathbb{R}^m)$ 上的內積 $\langle \xi, \eta \rangle$ 可以誘導出 $\bigwedge^*(\mathbb{R}^m)$ 上的內積, 使得若 $\theta^1, \ldots, \theta^n$ 是 $\bigwedge^1(\mathbb{R}^m)$ 的一組標準正交基, 則 $\{\theta^J = \theta^{j_1} \wedge \theta^{j_2} \wedge \cdots \wedge \theta^{j_n}\}$ (其中 $J = \{j_1 < \ldots < j_n\}$ 取遍 $\{1, \ldots, m\}$ 的 n 元子集) 爲 $\bigwedge^n(\mathbb{R}^m)$ 的一組標準正交基。

任意給定 $\xi \in \bigwedge^n(\mathbb{R}^m)$, 則它可以定義 $\bigwedge^*(\mathbb{R}^m)$ 上的一個外乘 $e(\xi)$ 如下

$$e(\xi)\omega = \xi \wedge \omega$$

設 $i(\xi)$ 是 $e(\xi)$ 在上述內積下的伴隨。那麼對 $\xi \in \bigwedge^1(\mathbb{R}^m)$ 我們容易算出

$$i(\xi)(\theta^{j_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{j_n}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \langle \theta^{j_k}, \xi \rangle \theta^{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\theta^{j_k}} \wedge \cdots \wedge \theta^{j_n}$$

特別的,

$$i(\theta^j)(\theta^{j_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{j_n}) = \begin{cases} 0 & \text{若 } j \neq j_1, j_2, \ldots, j_n \\ (-1)^{k-1} \theta^{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\theta^{j_k}} \wedge \cdots \wedge \theta^{j_n} & \text{若 } j = j_k \end{cases}$$

由此可以得到, 對於任意的 $\xi, \eta \in \bigwedge^1(\mathbb{R}^m)$ 我們有

$$e(\xi)i(\eta) + i(\eta)e(\xi) = \langle \xi, \eta \rangle \tag{1}$$

註: 在量子物理學中, 單個粒子的狀態用某個 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$(其狀態空間) 中的向量來表示, 如果要描述 n 個全同粒子的狀態, 則依據該類粒子是 Boson 或 Fermion 分別用 $\mathcal{H}$ 的對稱或反對稱的 n 重線性函數 (反對稱的 n 重線性函數就是 n 形式) 表示, 在物理學中一般稱爲波函數。這裏我們只考慮 Fermion, 從某種程度上講, Fermion 比 Boson 更爲簡單。

以上定義的外乘和內乘在量子力學中分別對應著 Fermion 產生算符和湮滅算符, 而且上述基本關係就是 Fermion 對易關係。Fermion 對易關係通常在一組標準正交基下表達出來。設 $\{\theta^1,\ldots,\theta^m\}$ 是 $\bigwedge^1(\mathbb{R}^m)$ 的一組標準正交基, 記 $a_j = i(\theta^j), a_j^\dagger = e(\theta^j)$。則根據 (1) 我們有對易關係的下述表示

$$[a_i, a_j^\dagger]_+ = \delta_{ij} \tag{2}$$

這裏 $[a,b]_+ = ab + ba$ 是 a,b 的反對易子。將外代數乘法的反交換律

$$\xi\wedge\eta = (-1)^{\deg\xi\deg\eta}\eta\wedge\xi$$

應用於一次形式 θ^i,θ^j 得到

$$\theta^i\wedge\theta^j + \theta^j\wedge\theta^i = 0$$

由此得到

$$[a_i, a_j]_+ = [a_i^\dagger, a_j^\dagger]_+ = 0 \tag{3}$$

(2), (3) 就是物理學中的 Fermion 對易關係的通常表達。

2. 楊振寧建議的一個問題

一個體系由其哈密爾頓量完全決定, 根據量子力學的基本原理, 體系的哈密爾頓量在數學上用一個自伴算子表示, 該算子的特徵值稱爲該體系的能級。我們最爲關心的是最低能級, 也就是所謂的基態能。

對於 Fermion 體系來說, 最簡單的算子就是產生、湮滅算子。由它們可以構造出一些簡單的自伴算子, 例如可以考慮由 $a_j, a_j^\dagger$ 構成的二次型

$$H = \sum_{i,j}\left(u_{ij}a_i^\dagger a_j^\dagger + 2v_{ij}a_i^\dagger a_j + w_{ij}a_i a_j\right)$$

其中 $u_{ij} = -u_{ji}, v_{ij} = v_{ji}, w_{ij} = -u_{ij}$ 爲實數。1986年左右, S. P. Novikov 注意到, 這類二次型算子可以經過所謂的 (實)Bogolyubov 變換對角化, 從而求出其全部特徵值, 可見 [1] 或 [2, pp.271–278]。[2]但是, 這一類算子並不是 BCS 理論中的算子。

楊先生建議考慮以下一類算子

$$H(A) = A^\dagger A$$

其中 $A = A(a_1,\ldots,a_m)$ 是湮滅算子 $a_1,\ldots,a_m$ 的 k 次齊次多項式。注意到 $H(A)$ 是正定算子, 所以最大特徵值 $\lambda_{\max}H(A)$ 是正的。對於任意的 A, 要代數地求出 $H(A)$ 的最大特

[2]S. P. Novikov 當時是爲了構造流形上關於向量場的臨界點的 Morse 不等式的類似物而遇到這類算子的。

徵値幾乎是不可能的, 但是我們可以問, 假定 A 滿足某個規範化條件, 使得 $H(A)$ 的最大特徵値 $\lambda_{\max}H(A)$ 取得最大値的 A 是何種形式的? 楊先生期望, 這樣的 A 所決定的哈密爾頓算子 $H(A)$ 的基態特徵函數自動就具有庫珀配對形式, 從而爲庫珀配對提供出一個合理的數學解釋。

利用外代數的語言, 楊先生所研究這一問題可以表述如下:

設 $\xi \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^m)$, $\eta \in \bigwedge^l(\mathbb{R}^m)$, 求

$$\|e(\xi)\eta\|^2 = \|\xi \wedge \eta\|^2$$

在約束條件

$$\|\xi\| = \|\eta\| = 1$$

下的最大值。

顯然, 我們只考慮 $k + l \leq m$ 的情形。記這個最大値爲 $C^m(k,l)$, 楊振寧 [3, 4] 得到了下述結果:

定理1 ([3, p. 341], 定理5): $C^m(1,l) = 1$。

定理2([3, p. 341], 定理6, 以及[4, p. 419], 脚注):

$$C^m(2,l) = \begin{cases} \frac{(l+2)(m-l)}{2m}, & \text{若 } m \equiv 0 \pmod 2, \quad l \equiv 0 \pmod 2 \\ \frac{(l+1)(m-l-1)}{2(m-2)}, & \text{若 } m \equiv 0 \pmod 2, \quad l \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{(l+2)(m-l-1)}{2(m-1)}, & \text{若 } m \equiv 1 \pmod 2, \quad l \equiv 0 \pmod 2 \\ \frac{(l+1)(m-l)}{2(m-1)}, & \text{若 } m \equiv 1 \pmod 2, \quad l \equiv 1 \pmod 2 \end{cases} \tag{4}$$

定理1的證明非常簡單, 它其實是 Fermion 對易關係 (1) 的推論。證明如下:

證明: 設 $\xi \in \bigwedge^1(\mathbb{R}^m)$, 則

$$\begin{aligned} \|e(\xi)\eta\|^2 + \|i(\xi)\eta\|^2 &= \langle\, e(\xi)\eta, e(\xi)\eta\rangle + \langle\, i(\xi)\eta, i(\xi)\eta\rangle \\ &= \langle \eta,\, i(\xi)e(\xi)\eta\rangle + \langle \eta,\, e(\xi)i(\xi)\eta\rangle \\ &= \langle \eta,\, [i(\xi)e(\xi) + e(\xi)i(\xi)]\eta\rangle \\ &= \langle \eta,\, \langle \xi,\, \xi\rangle \eta\rangle \quad (\text{根據 } (1)) \\ &= \langle \xi,\, \xi\rangle\langle \eta,\, \eta\rangle \end{aligned}$$

因此

$$\|\xi \wedge \eta\|^2 = \langle \xi,\, \xi\rangle\langle \eta,\, \eta\rangle - \|i(\xi)\eta\|^2 \leq \langle \xi,\, \xi\rangle\langle \eta,\, \eta\rangle$$

並且等號成立當且僅當 $i(\xi)\eta=0$。證畢。 □

定理2的證明在 [3] 中是作爲附錄給出的, 楊振寧先生給出的證明非常巧妙, 我們將在下一節詳細介紹。在定理2的基礎上, 楊先生在 [4] 中進一步作出以下猜測(對於 k 爲奇數的情況, 他也給出了一個類似的猜測, 見 [4, p. 419] 第 (10) 式):

猜想3 ([4, p. 419], 第 (9) 式): 設 $m=2n$, $k=2r$, $l=2s$ 都是偶數, 則 $\|\xi\wedge\eta\|^2$ 在約束條件 $\|\xi\|=\|\eta\|=1$ 下的最大值 $C^m(k,l)$ 由

$$\xi_{\max}=\frac{\Omega^r}{\|\Omega^r\|} \quad 和 \quad \eta_{\max}=\frac{\Omega^s}{\|\Omega^s\|}$$

實現, 其中 Ω^r 是 Ω 的 r 次(外乘積) 冪, 而

$$\Omega=\theta^1\wedge\theta^2+\theta^3\wedge\theta^4+\cdots+\theta^{2n-1}\wedge\theta^{2n}$$

我們先來計算這個預見的最大值 $C^m(k,l)$。爲此, 我們計算出

$$\Omega^p=p!\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_p\le n}(\theta^{2i_1-1}\wedge\theta^{2i_1})\wedge(\theta^{2i_2-1}\wedge\theta^{2i_2})\wedge\cdots\wedge(\theta^{2i_p-1}\wedge\theta^{2i_p})$$

從而

$$\|\Omega^p\|^2=(p!)^2\binom{n}{p}$$

從而

$$\begin{aligned}\|\xi_{\max}\wedge\eta_{\max}\|^2&=\frac{\|\Omega^{r+s}\|^2}{\|\Omega^r\|^2\|\Omega^s\|^2}=\frac{[(r+s)!]^2\binom{n}{r+s}}{(r!)^2\binom{n}{r}(s!)^2\binom{n}{s}}\\&=\binom{r+s}{r}^2\binom{n}{r+s}\frac{1}{\binom{n}{r}\binom{n}{s}}\end{aligned}$$

特別的, 對於 $k=2(r=1), l=2s$ 的情況, 上式給出的值

$$C^m(2,l)=\binom{1+s}{1}^2\binom{n}{1+s}\frac{1}{\binom{n}{1}\binom{n}{s}}=\frac{(s+1)(n-s)}{n}$$

與定理2中給出的值 $\frac{(l+2)(m-l)}{2m}$ 吻合。

3. 定理2的證明

定理2的證明: 我們只考慮 $m\equiv 0 \pmod 2$, $l\equiv 0 \pmod 2$ 的情況, 其他情況類似可證。設 $m=2n$ 且 $l=2s$。我們對自然數 l 用數學歸納法證明。

命題 (A): 對於一切偶數 l 有

$$C^m(2,l) = \frac{(l+2)(m-l)}{2m}, \quad \text{對於所有的偶數 } m \geq l+2$$

首先我們驗證命題 (A) 對 $l=0$ 成立。此時 $\eta = \pm 1$, 我們要證明 $C^m(2,0)=1$, 也就是說, 對任意的 $\xi \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^m)$, 有

$$\|\xi \wedge 1\|^2 \leq \|\xi\|^2$$

而且等號可以取得。然而這是一個明顯的等式。

現在假定命題 (A) 對於一切 $l \leq N-2$ 的偶數成立, 其中 N 是一個偶數, 我們要證它對 $l=N$ 也成立。對此, 我們將在上述歸納假定下對 m 用數學歸納法證明

命題 (B): 對於任意的偶數 $m \geq N+2$ 有

$$C^m(2,N) = \frac{(N+2)(m-N)}{2m}$$

首先我們驗證 $m=N+2$ 的情況。我們要證明此時 $C^m(2,N)=1$。設

$$\begin{aligned}
\xi &= \sum_{1\leq i<j\leq m} \xi_{ij}\theta^i \wedge \theta^j, \\
\eta &= \sum_{1\leq i<j\leq m} \eta_{ij}\theta^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\theta^i} \wedge \cdots \wedge \widehat{\theta^j} \cdots \wedge \theta^{2n}
\end{aligned}$$

則

$$\xi \wedge \eta = \sum_{1\leq i<j\leq m} \xi_{ij}\eta_{ij}(-1)^{i+j-1}\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^{2n}$$

因此

$$\begin{aligned}
\|\xi \wedge \eta\|^2 &= \Big| \sum_{1\leq i<j\leq m} \xi_{ij}[(-1)^{i+j-1}\eta_{ij}] \Big|^2 \\
&\leq \Big(\sum_{1\leq i<j\leq m} |\xi_{ij}|^2 \Big)\Big(\sum_{i<j} |\eta_{ij}|^2 \Big) \quad \text{(Cauchy 不等式)} \\
&= \|\xi\|^2 \cdot \|\eta\|^2
\end{aligned}$$

等號顯然可以取得, 例如取 $\xi = \theta^1 \wedge \theta^2, \eta = \theta^3 \wedge \theta^4 \wedge \cdots \wedge \theta^m$。

現在, 我們來考慮命題 (B) 的歸納步驟。

設命題 (B) 對偶數 $m = M-2$ 成立, 我們要證明, 命題 (B) 對 $m=M$ 成立, 即我們要證明

$$C^M(2,N) = \frac{(N+2)(M-N)}{2M}$$

記 $M=2n$, $N=2s$, 我們要證的就是 $C^M(2,N)=\frac{(s+1)(n-s)}{n}$。

不妨設 $\|\xi\wedge\eta\|^2$ 的最大值 $B^M(2,N)$ 對某個 $\xi\in\bigwedge^2(\mathbb{R}^M)$ 以及某個 $\eta\in\bigwedge^N(\mathbb{R}^M)$ 取得。利用反對稱矩陣的譜定理[3], 可以不妨假定 ξ 具有以下形式:

$$\xi=\sigma_1\theta^1\wedge\theta^2+\sigma_2\theta^3\wedge\theta^4+\cdots+\sigma_n\theta^{2n-1}\wedge\theta^{2n}$$

這裏 $\theta^1,\ldots,\theta^{2n}$ 是 $\bigwedge^1(\mathbb{R}^M)$ 的一組標準正交基, $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ 是非負實數且滿足 $\sum_{i=1}^n\sigma_i^2=1$。不妨設 $\sigma_1=\max\{\sigma_1,\ldots,\sigma_n\}$, 於是 $\sigma_1^2\geq\frac{1}{n}>0$。

我們進一步將 ξ 寫成

$$\xi=\xi_0+\xi_1$$

其中

$$\begin{aligned}\xi_0&=\sigma_1\theta^1\wedge\theta^2,\\ \xi_1&=\sigma_2\theta^3\wedge\theta^4+\cdots+\sigma_n\theta^{2n-1}\wedge\theta^{2n}\end{aligned}$$

我們將 $e(\xi)$ 視爲 $V=\bigwedge^N(\mathbb{R}^M)$ 到 $W=\bigwedge^{N+2}(\mathbb{R}^M)$ 上的一個線性變換:$\eta\mapsto\ \xi\wedge\eta$。於是最大值 $C^M(2,N)$ 就可以解釋爲上述線性變換 $e(\xi)$ 的範數的平方。

爲將這個線性變換 $e(\xi)$ 在 V 上的作用看得更清楚, 將 $V=\bigwedge^N(\mathbb{R}^M)$ 作直和分解 $V=V_0\bigoplus V_1$, 其中

$$\begin{aligned}V_0&=(\theta^1\wedge\theta^2)\wedge^{N-2}(\mathbb{R}^{M-2})\bigoplus\wedge^N(\mathbb{R}^{M-2})\\ V_1&=\theta^1\wedge^{N-1}(\mathbb{R}^{M-2})\bigoplus\theta^2\wedge^{N-1}(\mathbb{R}^{M-2})\end{aligned}$$

這裏 $\bigwedge^{N-i}(\mathbb{R}^{M-2})$ 表示由 $\theta^3,\ldots,\theta^M$ 張成的 $N-i$ 次形式空間, $i=0,1,2$。如果我們對空間 $W=\bigwedge^{N+2}(\mathbb{R}^M)$ 也作類似的分解, 得到相應的子空間 W_0,W_1。那麼容易看到:$e(\xi_0)$ 將 V_0 映入 W_0, 將 V_1 映爲 0; 而 $e(\xi_1)$ 將 V_i 映入 W_i, $(i=0,1)$。所以, $e(\xi)$ 將 V 的直和分解 $V=V_0\oplus V_1$ 映射爲 W 的直和分解 $W=W_0\oplus W_1$。注意到, 這裏出現的直和分解中的直和項相互正交, 所以, $e(\xi)$ 在全空間 V 的範數平方(按照 ξ 的取法, 它必定等於 $C^M(2,N)$) 等於 $e(\xi)$ 限制在 V_0 的範數平方與 $e(\xi)$ 限制在 V_1 的範數平方這兩個數當中較大的一個。很容易證明, $e(\xi)$ 在 V 上的範數平方等於 $e(\xi)$ 限制在 V_0 上的範數平方。這是因爲 $e(\xi)$ 在 V_1 上的範數平方小於 $C^M(2,N)$。用反證法證明如下: 不然設 $\eta\in V_1,\|\eta\|=1$ 使得 $\|e(\xi)\eta\|^2=C^M(2,N)$, 於是

$$e(\xi)\eta=e(\xi_0)\eta+e(\xi_1)\eta=e(\xi_1)\eta.$$

[3]楊振寧原文中其實考慮的是複數域 $\mathbb{C}$ 上的對應問題, 但是對於複反對陣矩陣有類似的結果, 這一結果在 [3] 中是直接證明的, 見 [3, p. 348] 引理。

現在 $N \neq 0$, $M-2$, 由此容易推出 $\xi_1 \neq 0$(否則 $\xi = \theta^1 \wedge \theta^2$, 由定理1可以推出

$$\|\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \eta\|^2 = \|\eta\|^2 = 1 < \frac{(N+2)(M-N)}{2M} = \|\xi_{\max} \wedge \eta_{\max}\|^2,$$

ξ 就不可能是最大值點。) 因此, 選取單位向量$\xi' = \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}$ 則有

$$\|e(\xi')\eta\|^2 = \|e(\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|})\eta\|^2 = \frac{1}{1-\sigma_1^2}\|e(\xi)\eta\|^2 = \frac{1}{1-\sigma_1^2}C^M(2,N) > C^M(2,N)$$

這與 $C^M(2,N)$ 爲最大值矛盾。於是 $e(\xi)$ 的範數平方必定等於它限制在 V_0 的範數平方, 從而我們只需要求出 $\|e(\xi)\eta\|^2$ 在 V_0 的單位球面上的最大值。對任意的 $\eta \in V_0, \|\eta\| = 1$, 我們寫

$$\eta = \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \phi + \psi$$

這裏 $\phi \in \bigwedge^{N-2}(\mathbb{R}^{M-2})$, $\psi \in \bigwedge^{N}(\mathbb{R}^{M-2})$, 根據 $\|\eta\| = 1$ 以及定理1可以推出, $\|\phi\|^2 + \|\psi\|^2 = 1$。於是

$$\begin{aligned}
\|e(\xi)\eta\|^2 &= \|(\xi_0 + \xi_1) \wedge (\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \phi + \psi)\|^2 \\
&= \|(\xi_0 \wedge \psi + \xi_1 \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \phi) + \xi_1 \wedge \psi\|^2 \qquad (\,\xi_0 \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \phi = 0) \\
&= \|\xi_0 \wedge \psi + \xi_1 \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \phi\|^2 + \|\xi_1 \wedge \psi\|^2 \qquad (\text{勾股定理}, W_0 \perp W_1) \\
&\leq (\|\xi_0 \wedge \psi\| + \|\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \xi_1 \wedge \phi\|)^2 + \|\xi_1 \wedge \psi\|^2 \qquad (\text{三角不等式}) \\
&= (\|\sigma_1 \psi\| + \|\xi_1 \wedge \phi\|)^2 + \|\xi_1 \wedge \psi\|^2 \qquad (\; i(\theta^1 \wedge \theta^2)\psi = i(\theta^1 \wedge \theta^2)(\xi_1 \wedge \phi) = 0)
\end{aligned}$$

即

$$\|\xi \wedge \eta\|^2 \leq (\sigma_1 \|\psi\| + \|\xi_1 \wedge \phi\|)^2 + \|\xi_1 \wedge \psi\|^2 \tag{5}$$

我們對 ξ_1 和 ϕ 應用命題 (A) 在 $l = N-2$ 時的歸納假設, 有

$$\|\xi_1 \wedge \phi\|^2 \leq \frac{s(n-s)}{n-1}\|\xi_1\|^2\|\phi\|^2 = \frac{s(n-s)}{n-1}(1-\sigma_1^2)\|\phi\|^2 \tag{6}$$

對 ξ_1 和 ψ 應用命題 (B) 在 $m = M-2$ 時的歸納假設, 有

$$\|\xi_1 \wedge \psi\|^2 \leq \frac{(s+1)(n-1-s)}{n-1}\|\xi_1\|^2\|\psi\|^2 = \frac{(s+1)(n-1-s)}{n-1}(1-\sigma_1^2)\|\psi\|^2 \tag{7}$$

將 (6), (7) 代入 (5) 我們得到

$$\|\xi \wedge \eta\|^2 \leq (\sigma_1\|\psi\| + \sqrt{\frac{s(n-s)}{n-1}(1-\sigma_1^2)}\|\phi\|)^2 + \frac{(s+1)(n-1-s)}{n-1}(1-\sigma_1^2)\|\psi\|^2$$

如果我們令 $x=1-\sigma_1^2$, $y=|\psi|^2$, 則 $\sigma_1=\sqrt{1-x}$, $\|\phi\|=\sqrt{1-y}$, 那麼上式右邊成爲 (x,y) 的函數 $f(x,y)$, 這裏

$$\begin{aligned} f(x,y)=&\Big[\sqrt{(1-x)y}+\sqrt{\frac{s(n-s)}{n-1}x(1-y)}\Big]^2+\frac{(s+1)(n-1-s)}{n-1}xy\\ =&(1-x)y+2\sqrt{\frac{s(n-s)}{n-1}x(1-x)y(1-y)}+\frac{s(n-s)}{n-1}x(1-y)\\ &+\frac{(s+1)(n-1-s)}{n-1}xy \end{aligned} \tag{8}$$

如果我們能證明 $f(x,y)$ 在 $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ 上的最大值等於 $\frac{(s+1)(n-s)}{n}$, 那麼就完成了命題 (B) 的歸納步驟。

爲求解這個最大值問題, 我們先列出臨界點方程

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=&-y+2\sqrt{\frac{s(n-s)}{n-1}}\sqrt{y(1-y)}\frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}\\ &+\frac{s(n-s)}{n-1}(1-y)+\frac{(s+1)(n-1-s)}{n-1}y=0\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=&1-x+2\sqrt{\frac{s(n-s)}{n-1}}\sqrt{x(1-x)}\frac{1-2y}{2\sqrt{y(1-y)}}\\ &-\frac{s(n-s)}{n-1}x+\frac{(s+1)(n-1-s)}{n-1}x=0 \end{aligned}\right. \tag{9}$$

下面的這個觀察可以幫助我們化簡上述方程組。[4] 如果令

$$\left\{\begin{aligned} u&=\sqrt{(1-x)y}+\sqrt{\frac{s(n-s)}{n-1}x(1-y)},\\ v&=\sqrt{\frac{(s+1)(n-1-s)}{n-1}xy}, \end{aligned}\right.$$

那麼 $f(x,y)=u^2+v^2=g(u,v)$。於是, 從微分的鏈式法則

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial g(u,v)}{\partial u}\\ \frac{\partial g(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

可知, 如果 (x,y) 爲 $f(x,y)$ 的臨界點, 那麼由於在 $[0,1]\times[0,1]$ 的內部有

$$(\frac{\partial g(u,v)}{\partial u},\frac{\partial g(u,v)}{\partial v})=(2u,2v)\neq(0,0),$$

[4]這個技巧是筆者試出來的, 楊振寧先生原文中直接給出最大值點而未加推導, 見 [3, p. 349]。

從而 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}+\sqrt{\frac{s(n-s)}{n-1}}\frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}+\sqrt{\frac{s(n-s)}{n-1}}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-y}}=0$$

整理得到

$$\Big(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\Big)=\sqrt{\frac{s(n-s)}{n-1}}\Big(\frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-y}}\Big)$$

即

$$\sqrt{y(1-y)}=\sqrt{\frac{s(n-s)}{n-1}}\sqrt{x(1-x)} \tag{10}$$

將這個等式代入臨界點方程組 (9) 得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=-y+\dfrac{s(n-s)}{n-1}(1-2x)+\dfrac{s(n-s)}{n-1}(1-y)+\dfrac{(s+1)(n-1-s)}{n-1}y=0\\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=1-x+1-2y-\dfrac{s(n-s)}{n-1}x+\dfrac{(s+1)(n-1-s)}{n-1}x=0\end{cases}$$

進一步化簡就是

$$\begin{cases}x+\dfrac{1}{n-s}y=1\\ \dfrac{s}{n-1}x+y=1\end{cases}$$

求得

$$(x,y)=(\frac{n-1}{n},\frac{n-s}{n}) \tag{11}$$

這是 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 內部的唯一臨界點。容易計算出臨界值

$$f(\frac{n-1}{n},\frac{n-s}{n})=u^2(\frac{n-1}{n},\frac{n-s}{n})+v^2(\frac{n-1}{n},\frac{n-s}{n})=\frac{(s+1)(n-s)}{n}.$$

爲證明上述臨界值確實爲 $f(x,y)$ 在 $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ 上的最大值。我們只需要求出 $f(x,y)$ 在各個邊界上的最大值並與之比較。而這是比較容易驗證的, 我們留給讀者。總之, 不難證明, $f(x,y)$ 在邊界上的值嚴格小於臨界值 $\frac{(s+1)(n-s)}{n}$。這樣我們就證明了 $f(x,y)$ 在 $[0,1]$ $\times[0,1]$ 上的最大值爲 $\frac{(s+1)(n-s)}{n}$, 注意到, 前面的計算已經表明 $C^M(2,N)\geq\frac{(s+1)(n-s)}{n}$, 從而事實上等號成立, 這就完成了命題 (B) 的歸納步驟。由數學歸納法原理, 我們證明了命題 (B) 。而命題 (B) 又是命題 (A) 的歸納步驟, 所以由數學歸納法原理, 我們證明了命題 (A) 。從而完成了定理2的證明。證畢。 $\square$

致謝

在本文的準備過程中, 筆者得到了清華大學物理系劉雲朋博士、首都師範大學數學科學學院傅小虎、葛暢、邵紅亮、張寶群等同學的幫助, 特表感謝。

参考文獻

1. S. P. Novikov, *A note on the real Fermionic and Bosonic quadratic forms: their diagonalization and topological interpreation*, Arxiv preprint math-ph/0110032, 2001. arxiv.org.
2. S. P. Novikov and I. A. Taimanov, *Modern Geometric Structure and Fields*, Graduate Studies in Mathematics, Vol.**71**, A.M.S., 2006.
3. C. N. Yang, *Concept of off-diagonal long-range order and the quantum phases of liquid He and of superconductors*, Rev. Mod. Phys. **34**, 694-704 (1962).
4. C. N. Yang, *Some properties of reduced density matrix*, Journal of Math.Phys.**4**, 418–419(1963).
5. C. N. Yang, *Selected Papers, 1945–1980, with Commentary*, San Francisco: Freeman & Co, 1983.
6. 楊振寧, 我對統計力學和多體問題的研究經驗, 收入《楊振寧文集》, 張奠宙主編, 華東師範大學出版社, 1998年。

—本文作者爲中國首都師範大學數學科學院研究生—