

# 重訪重差術

張海潮

歷來討論重差術的文章很多，最具代表性的當推中研院數學所李國偉教授的兩篇論文（註一）。本文的一些觀點在李教授的論文中多已提到，談不上創新；只是想將《周髀算經》中有關測日遠近及大小的紀載與重差術連結，同時具體的點出「損益寸千里」這句話在重差術中扮演的關鍵角色（註二）。

本文的第一部分略複習重差術，並指出「重差」— 兩竿影差與兩竿距的比值 — 是測量模型的一個內在常數。只要掌握這個常數，便可測出竿子與被測物的距離。本文的第二部分詳細介紹《周髀》如何測日遠近及日徑大小，雖然《周髀》只用一根竿子（單表）（重差術要用兩根（雙表）），但是《周髀》用「勾之損益寸千里」來代替了重差術中的關鍵常數。「損益寸千里」雖然不切實際，但似乎對重差術的發明有相當啓發，這一點在李國偉的論文中也有提到（見註一，從單表到雙表一文，「表」就是立在地上的竿子）。

## （一）

重差術出於劉徽原置於《九章算術》內有關勾股如何用於測量的專章，在唐初選定算經十書時，才由九章分出，單成一部《海島算經》，重差術的方法可由下例來說明（註三）：

今有望海島，立兩表，齊高三丈，前後相去千步，令後表與前表參相直。從前表卻行一百二十三步，人目著地，取望島峰，與表末參合。從後表卻行一百二十七步，人目著地，取望島峰，亦與表末參合。問島高及去表各幾何？答曰：島高四里五十五步，去表一百二里一百五十步。術曰：以表高乘表間為實，相多為法除之，所得加表高，即得島高。求前表去島遠近者，以前表卻行乘表間為實，相多為法除之，得島去表數。

如圖一， $E, F$  是人目， $\overline{CD} = \overline{AB} = h = 3\text{丈} = 5\text{步}$  是表高， $\overline{BD} = 1000\text{步}$  是兩表間距， $\overline{BE} = 123\text{步}$ ， $\overline{DF} = 127\text{步}$ ， $\overline{PQ} = y$  是島峰之高， $\overline{QB} = x$  是前表到海島  $Q$  的距離。

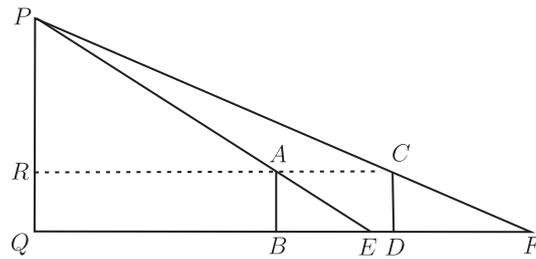


圖 1

利用兩個直角三角形  $PQE$  和  $PQF$ , 可以立下聯立方程式:

$$\begin{cases} \frac{y}{x + \overline{BE}} = \frac{h}{\overline{BE}} \\ \frac{y}{x + \overline{BD} + \overline{DF}} = \frac{h}{\overline{DF}} \end{cases} \quad (1)$$

式中  $h$  是立竿的高度,  $h = \overline{CD} = \overline{AB}$ , 由此解出  $x$  和  $y$ 。

現在, 我們要從另一個角度來看同樣的問題。為了方便說明, 將圖一中的  $P$  點想成是一個點光源,  $\overline{DF}$  和  $\overline{BE}$  分別是立竿的竿影, 我們要問:

影長  $s(= \overline{DF})$  如何隨立竿到  $Q$  點的距離  $d(= \overline{QD})$  而變化?

如圖二:

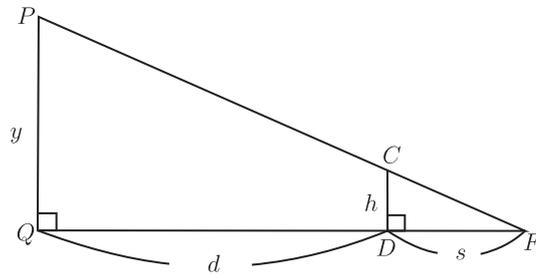


圖 2

我們有

$$\frac{s}{h} = \frac{s + d}{y}$$

或

$$\begin{aligned} ys &= hs + hd \\ s &= \frac{h}{y - h}d \end{aligned} \quad (2)$$

亦即  $s$  與  $d$  成正比。注意到 (2) 式亦可由圖一中三角形  $PRC$  和  $CDF$  相似求得:  $\overline{PR} =$

$$y - h, \overline{RC} = \overline{QD} = d, \overline{CD} = h, \overline{DF} = s.$$

因此，我們需要立第二根竿子來決定  $\frac{h}{y-h}$ ，如圖一所示，令竿距  $\overline{QB}$  為  $d'$ ，影長  $\overline{BE}$  為  $s'$ ，則同樣有：

$$s' = \frac{h}{y-h}d'$$

與 (2) 式相減得

$$s - s' = \frac{h}{y-h}(d - d')$$

從而解出

$$\frac{s}{d} = \frac{h}{y-h} = \frac{s-s'}{d-d'} \quad (3)$$

由於第一個差  $s - s'$  和第二個差  $d - d'$  都是已知，求其比值得到  $\frac{h}{y-h}$  而解  $y$  值。上述二差之比稱為重差，知道重差便可從  $s$  求  $d$ 。一個具體的說法是：

$\frac{s-s'}{d-d'}$  其實代表每當竿子移動一個單位時，影長的差額。想像我們把竿子移到圖一中的  $Q$  點，此時竿子無影，因此顯然有

$$d = \overline{QD} = \frac{s}{\frac{s-s'}{d-d'}} \quad (4)$$

以圖一來說， $s = \overline{DF} = 127$ ， $s - s' = 127 - 123 = 4$ ， $\overline{BD} = d - d' = 1000$ ，所以  $\frac{s-s'}{d-d'} = \frac{4}{1000} = \frac{1}{250}$  代表每向  $Q$  點移動 250 步影長會減 1 步，由於起始的影長是 127 步，所以

$$\overline{QD} = 127 \times 250 \text{ 步}$$

而所謂“前表去島遠近”指的是  $x = \overline{QB} = \overline{QD} - \overline{BD} = 127 \times 250 - 1000$  步。

我們作一個簡短的總結：

在重差術中，之所以要立兩根竿子，主要是想求得式 (3)，亦即每移動一個單位，影長的差額。由於  $P$  點為光源，所測之點  $Q$  處不會有影子，所以一旦得出單位影長差 (3)，即可以影長除以單位影長差而得到立竿點到所測之點的距離 (4)。

## (二)

事實上，《周髀》就是用類似的想法來測太陽的遠近，請見引文 (註四)：

夏至南萬六千里，冬至南十三萬五千里，日中立竿無影。此一者天道之數。周髀長八尺，夏至之日晷一尺六寸。髀者，股也。正晷者，勾也。正南千里，勾一尺五寸。正北

千里，勾一尺七寸。

這段話的意思是：在夏至的時候，(在洛陽)立竿見影，影長1尺6寸，但是若把竿子南移千里，影長會變成1尺5寸，少了1寸，而若將竿子北移千里，影長會變成1尺7寸，多了1寸(並見註二)。

因此，若向南方走1萬6千里，就會到達影子消失的地方，所以說日中立竿無影(註五)，這個地方當然是在太陽的正下方。

從本文第一部分的總結可知《周髀》的方法和重差術類似，只不過若是重差術就必須立兩根距離為1千里的竿子來看出影長之差為1寸。《周髀》當然不可能靠立兩根竿子來得到「勾之損益寸千里」，這是因為一則地面不是平的，二則太陽光射向地球，不能視為圖一中的點光源  $P$ 。從太陽往地球射的光線反而因為距離遙遠，應該看成是平行光線。而立於各地的竿子影長之有差異是因為地球表面緯度的關係。如果地面真的是平的，而太陽沒那麼遠，可以看成點光源的話，那麼就本文第一部分的討論，竿子之間的距離每差上千里，影長之差必定是一個常數，只是不知道是不是1寸罷了。由是觀之《周髀》對重差術一定有相當的啟發。

《周髀》接著又說：

日益表南，晷日益長。候勾六尺。即取竹，空徑一寸，長八尺，捕影而視之，空正掩日，而日應空之孔。由此觀之，率八十寸而得徑一寸。故以勾為首，以髀為股。從髀至日下六萬里而髀無影，從此以上至日，則八萬里。若求斜至日者，以日下為勾，日高為股。勾、股各自乘，併而開方除之，得斜至日。從髀所旁至日所十萬里。以率率之，八十里得徑一里，十萬里得徑千二百五十里。故曰日徑千二百五十里。

這一段的意思是說從夏至以後，太陽南移，日影越來越長。等到有一天，日影長6尺的時候，如圖：

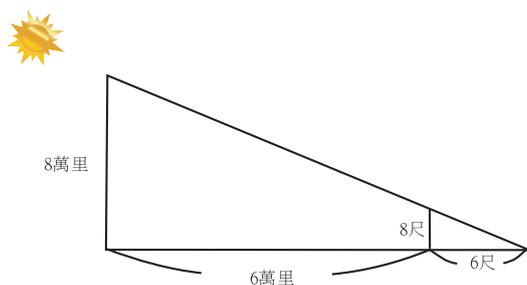


圖3

從日下量得日高是8萬里(其實是8萬里加8尺, 8尺不計), 而從立竿處看大直角三角形的斜邊, 以畢氏定理計算, 近似值是10萬里。

另外, 從立竿處用一根直徑為1寸, 長80寸的空心竹管看太陽, 剛好從管孔中看到全部的

太陽，因此由相似形縮放關係，太陽的直徑是日地距離的八十分之一。以10萬里除以80，得到1250里，所以說太陽的直徑是1250里。

從《周髀》這段文字可以看出古人對太陽的遠近和太陽的大小都非常有興趣，並且發展了幾何方法來探索這些現象。以現代的數據看來，日地距離是 $1.49 \times 10^8$ 公里，太陽直徑是 $1.39 \times 10^6$ 公里，兩者相除是107，而《周髀》所得是80，雖不中亦不遠。尤其是以空心竹管測日的視直徑 (angular size)，和古希臘的測法是一致的，只不過當時古希臘得到的是110比1，比《周髀》的80比1準得多。至於為什麼要等到「候勾6尺」才來測日之大小，可能是直角三角形三邊比中，8相應立竿的高度，斜邊的長比較好算吧。

註一、(1) 李國偉 (1984) 〈初探「重差」的內在理路〉，《科學史通訊》第三期。

(2) 李國偉 (1995) 〈從單表到雙表—重差術的方法論研究〉，《中國科技史論文集》，聯經，台北。

註二、《周髀》中言及

法曰：周髀長八尺，勾之損益寸千里。

這句話的意思是以八尺高的立竿測日影，若是將竿南（北）移千里，影長便會短（長）一寸。一般認為這個法則並不可靠，詳見本文的討論。

《周髀》約成書於秦漢之際，是一部數理天文學著作。唐朝李淳風編算經十書，《周髀》為十書之首，第二部是《九章算術》，第三部就是《海島算經》。

註三、中國古代的單位，1步等於6尺，1丈等於10尺，1尺等於10寸，1里等於300步，相當於1800尺。在秦漢之際，1尺大約是23公分，因此一里大約是414公尺。

註四、周髀一詞又指在東周時立於洛陽長8尺的表或竿子，髀是大腿骨的意思，指直立的竿子，如圖：

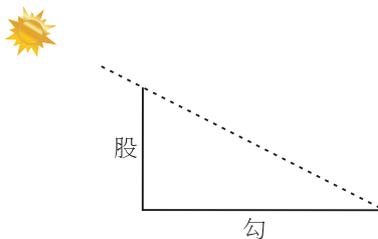


圖4

勾指日影。以下引文均出自《周髀》。

註五、至於說冬至南十三萬五千里，那是因為根據《周髀》在冬至時立在洛陽的竿子影長13尺5寸，同樣靠著「勾之損益寸千里」，將竿子南移13萬5000里，便會「日中立竿無影」。

—本文作者為台大數學系退休教授—