數學傳播 37卷1期, pp. 92-96

關於二染色 K_6 問題的一個注記

邊　欣・李忠民

由 n 個點及所有兩點之間的線段組成的圖形, 稱爲 n 點完全圖, 記爲 K_n。若 K_n 中的所有線段僅用紅色或藍色染色, 稱爲二染色。對 K_n 中由三個點連接而成的三角形, 若三條邊用相同的顏色染色, 則稱之爲同色三角形。

有關二染色的 K_n 問題是圖論與組合數學中的經典而有趣的問題, 在數學奧林匹克競賽中也經常出現相關的試題。

例 1: 任意六個人中, 必有3個人相互認識或相互不認識。(1947年第48屆匈牙利數學奧林匹克試題)。

例 2: 十七個人兩兩通信, 他們在通信中討論的僅有三個不同問題, 且任意兩個人通信時只討論一個問題。則至少有3個人互相通信時討論的是同一個問題。(1964年第6屆 IMO 試題)。

例 3: 將某個圓周上的九個不同點之間的36條邊分別用紅色或藍色染色。若其中的任意三點之間都至少有1條紅色邊, 則存在4個點, 它們之間的邊均爲紅色邊。(1976年第8屆加拿大數學奧林匹克試題)。

上述試題中, 例 1 與圖論中的 Ramsey 定理等價。

定理 1: 在二染色的 K_6 中, 必存在1個同色三角形。

1958年《美國數學月刊》將例1列爲征解問題 E1321, 引起很大反響。定理1的一個熟知的加強爲 Goodman 定理。

定理 2: 在二染色的 K_6 中, 必存在2個同色三角形。

本文將進一步探究定理2中的兩個同色三角形的性質, 給出如下結果。

定理 3: 在二染色的 K_6 中, 下面的 (1)、(2)、(3) 必有一個成立。

(1) 存在 2 個同色三角形, 這兩個三角形有一條公共邊, 從而有相同的顏色。

(2) 存在2個同色三角形, 這兩個三角形僅有一個公共的頂點, 並有不同的顏色。

(3) 僅存在2個同色三角形, 這兩個三角形沒有公共的頂點, 但是有相同的顏色。

首先證明兩個引理。

引理1: 在某個二染色的 K_6 中, 若任意的2個同色三角形均沒有公共邊, 但存在2個同色三角形, 它們有一個公共頂點, 則在這個二染色的 K_6 中, 必存在2個同色三角形, 它們有一個公共頂點, 但是有不同的顏色。

證明: 將此二染色的 K_6 中的6個頂點記爲 $A_1, A_2, \cdots, A_6$, 則存在2個同色三角形, 不妨記爲 $\triangle A_1A_2A_3$ 和 $\triangle A_3A_4A_5$, 它們有一個公共的頂點 A_3。

當 $\triangle A_1A_2A_3$ 與 $\triangle A_3A_4A_5$ 的顏色不同時, 引理1成立。

當 $\triangle A_1A_2A_3$ 與 $\triangle A_3A_4A_5$ 的顏色相同時, 不妨設 $\triangle A_1A_2A_3$ 和 $\triangle A_3A_4A_5$ 均是紅色三角形。先證明 A_1A_4, A_1A_5, A_2A_4, A_2A_5 均是藍色邊。

若 A_1A_4 是紅色邊, 則$\triangle A_1A_3A_4$ 是一個紅色三角形, 它與 $\triangle A_1A_2A_3$ 有公共邊 A_1A_3, 與 $\triangle A_3A_4A_5$ 有公共邊 A_3A_4, 矛盾。故 A_1A_4 是藍色邊。

若 A_1A_5 是紅色邊, 則$\triangle A_1A_3A_5$ 是一個紅色三角形, 它與 $\triangle A_1A_2A_3$ 有公共邊 A_1A_3, 與 $\triangle A_3A_4A_5$ 有公共邊 A_3A_5, 矛盾。故 A_1A_5 是藍色邊。

若 A_2A_4 是紅色邊, 則$\triangle A_2A_3A_4$ 是一個紅色三角形, 它與 $\triangle A_1A_2A_3$ 有公共邊 A_2A_3, 與 $\triangle A_3A_4A_5$ 有公共邊 A_3A_4, 矛盾。故 A_2A_4 是藍色邊。

若 A_2A_5 是紅色邊, 則$\triangle A_2A_3A_5$ 是一個紅色三角形, 它與 $\triangle A_1A_2A_3$ 有公共邊 A_2A_3, 與 $\triangle A_3A_4A_5$ 有公共邊 A_3A_5, 矛盾。故 A_2A_5 是藍色邊。

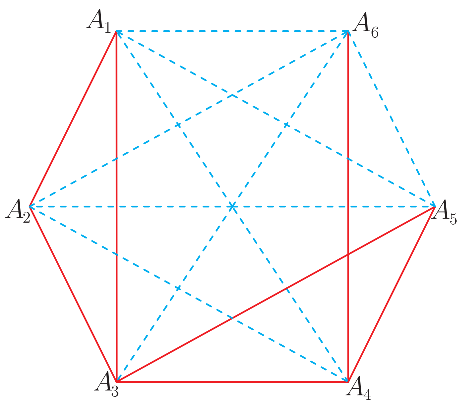

圖1

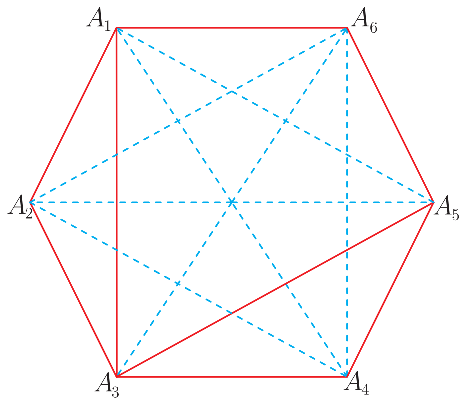

圖2

參見圖1 (圖中的實線代表紅色邊, 虛線代表藍色邊), 若 A_1A_6 是藍色邊, 則當 A_4A_6 也是藍色邊時, $\triangle A_1A_4A_6$ 是一個藍色三角形, 它與 $\triangle A_1A_2A_3$ 有公共的頂點 A_1, 與 $\triangle A_3A_4A_5$ 有公共的頂點 A_4, 引理1成立。當 A_4A_6 是紅色邊時, 必有 A_5A_6 是藍色邊 (否則, 若 A_5A_6 是紅色邊, 則 $\triangle A_4A_5A_6$ 是一個紅色三角形, 它與 $\triangle A_3A_4A_5$ 有公共邊 A_4A_5, 矛盾), 從而 $\triangle A_1A_5A_6$ 是一個藍色三角形, 它與 $\triangle A_1A_2A_3$ 有公共的頂點 A_1, 與 $\triangle A_3A_4A_5$ 有公共的頂點 A_5, 引理1成立。

同理, 若 A_5A_6 是藍色邊, 則當 A_2A_6 也是藍色邊時, $\triangle A_2A_5A_6$ 是一個藍色三角形, 它與 $\triangle A_1A_2A_3$ 有公共的頂點 A_2, 與 $\triangle A_3A_4A_5$ 有公共的頂點 A_5, 引理1成立。當 A_2A_6 是紅色邊時, 必有 A_1A_6 是藍色邊 (否則, 若 A_1A_6 是紅色邊, 則 $\triangle A_1A_2A_6$ 是一個紅色三角形, 它與 $\triangle A_1A_2A_3$ 有公共邊 A_1A_2, 矛盾), 從而 $\triangle A_1A_5A_6$ 是一個藍色三角形, 它與 $\triangle A_1A_2A_3$ 有公共的頂點 A_1, 與 $\triangle A_3A_4A_5$ 有公共的頂點 A_5, 引理1成立。

參見圖2, 當 A_1A_6 與 A_5A_6 均是紅色邊時。若 A_2A_6 是紅色邊, 則 $\triangle A_1A_2A_6$ 是一個紅色三角形, 它與 $\triangle A_1A_2A_3$ 有公共邊 A_1A_2, 矛盾。若 A_4A_6 是紅色邊, 則 $\triangle A_4A_5A_6$ 是一個紅色三角形, 它與 $\triangle A_3A_4A_5$ 有公共邊 A_4A_5, 矛盾。故 A_2A_6 與 A_4A_6 均是藍色邊。從而 $\triangle A_2A_4A_6$ 是一個藍色三角形, 它與 $\triangle A_1A_2A_3$ 有公共的頂點 A_2, 與 $\triangle A_3A_4A_5$ 有公共的頂點 A_4, 引理1成立。

綜上所述, 引理1成立, 證畢。

引理2: 在某個二染色的 K_6 中, 若任意的2個同色三角形均沒有公共的頂點, 則在這個二染色的 K_6 中, 僅存在2個同色三角形, 它們沒有公共的頂點, 但是有相同的顏色。

證明: 將此二染色的 K_6 中的6個頂點記爲 $A_1, A_2, \cdots, A_6$, 則存在2個同色三角形, 不妨記爲 $\triangle A_1A_2A_3$ 和 $\triangle A_4A_5A_6$, 它們沒有公共的頂點。

若此二染色的 K_6 中存在另一個同色三角形, 則其必分別與 $\triangle A_1A_2A_3$、$\triangle A_4A_5A_6$ 有公共的頂點, 矛盾。故此二染色的 K_6 中僅存在2個同色三角形, 即 $\triangle A_1A_2A_3$ 與 $\triangle A_4A_5A_6$。

當 $\triangle A_1A_2A_3$ 與 $\triangle A_4A_5A_6$ 的顏色相同時, 引理2成立。

當 $\triangle A_1A_2A_3$ 與 $\triangle A_4A_5A_6$ 的顏色不同時。不妨設 $\triangle A_1A_2A_3$ 是紅色三角形, $\triangle A_4A_5A_6$ 是藍色三角形。

若存在 $i = 1, 2, 3$, 使得 A_iA_4, A_iA_5, A_iA_6 中至少有2條藍色邊, 則此二染色的 K_6 中又存在一個藍色三角形, 矛盾。

否則, 對所有的 $i = 1, 2, 3$, A_iA_4, A_iA_5, A_iA_6 中均至少有2條紅色邊, 故 A_iA_j 中至少有6條紅色邊, 其中 $i = 1, 2, 3$, $j = 4, 5, 6$。從而存在 $j = 4, 5, 6$, 使得 A_1A_j, A_2A_j, A_3A_j 中至少有2條紅色邊, 故此二染色的 K_6 中又存在一個紅色三角形, 矛盾。

綜上所述, 引理2成立, 證畢。

根據定理2、引理1和引理2可知定理3成立。

下面給出三個圖例, 分別有且僅有定理3中的 (1)、(2) 或 (3) 一種情形存在。圖中的實線代表紅色邊, 虛線代表藍色邊。

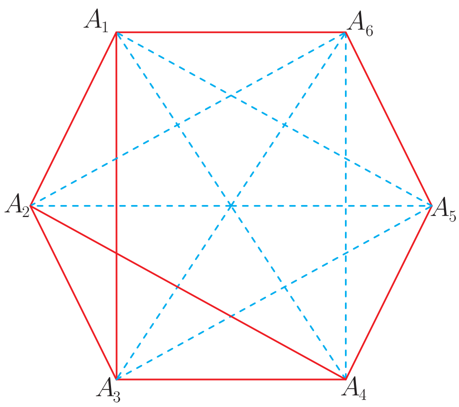

圖3

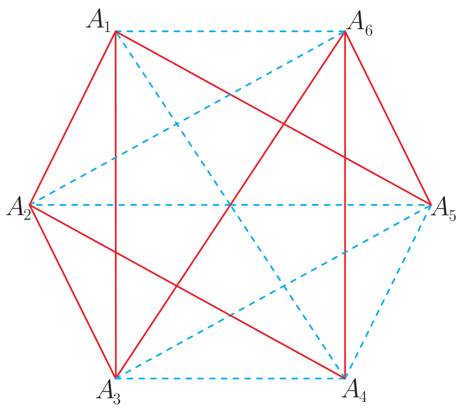

圖4

在圖3中, 只有2個同色三角形, 即 $\triangle A_1A_2A_3$ 和 $\triangle A_2A_3A_4$, 它們均是紅色三角形, 並有公共邊 A_2A_3, 即僅有定理3中的情形 (1) 成立。

在圖4中, 只有2個同色三角形, 即 $\triangle A_1A_2A_3$ 和 $\triangle A_3A_4A_5$, 其中 $\triangle A_1A_2A_3$ 是紅色三角形, $\triangle A_3A_4A_5$ 是藍色三角形, 它們的顏色不同, 且只有一個公共的頂點 A_3, 即僅有定理3中的情形 (2) 成立。

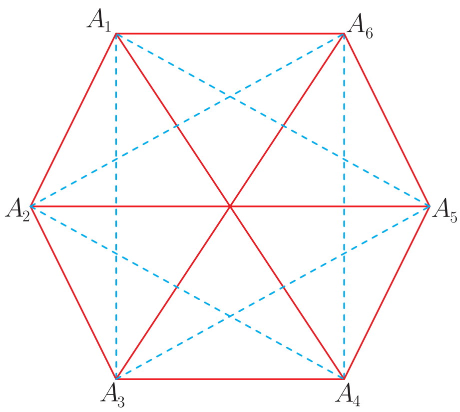

圖5

在圖5中, 只有2個同色三角形, 即 $\triangle A_1A_3A_5$ 和 $\triangle A_2A_4A_6$, 它們均是藍色三角形, 但是沒有公共的頂點, 即僅有定理3中的情形 (3) 成立。

上面的三個圖例表明, 在二染色的 K_6 中, 除了定理3中的 (1)、(2) 和 (3) 必有一個成立以外, 其它情形可以不存在。

參考文獻

1. A. W. Goodman, On Sets of Acquaintances and Strangers at any Party[J]. The American Mathematical Monthly, 1959, 66 (9), 778-783.
2. 熊斌, 田延彥。國際數學奧林匹克研究[M]。上海: 上海教育出版社, 2008。
3. 朱華偉。從數學競賽到競賽數學[M]。北京: 科學出版社, 2009。
4. 朱華偉。數學競賽中的染色問題與染色方法[J]。中等數學, 2010 (7):2-5。
5. 邊欣。一道IMO 試題的加強 [J]。數學通訊, 2010 (11下半月教師):59-60。
6. 張垚, 沈文選, 吳仁芳。初中數學競賽中的組合問題[M]。長沙: 湖南師範大學出版社, 2011。

—本文作者邊欣任教天津市天津師範大學數學系, 李忠民任教天津市天津大學管理與經濟學部—