數學傳播 37卷1期, pp. 86-91

關於劉徽不等式與祖沖之不等式

蘇化明 · 潘　杰

摘要

建立了兩個與劉徽不等式、祖沖之不等式類似的幾何不等式, 利用微分學方法及冪級數方法證明了與之對應的三角函數不等式, 還得到了類似的雙曲函數不等式及單位圓外切正 n 邊形周長與 π 之間關係的不等式。

關鍵詞: 劉徽不等式, 祖沖之不等式, 三角函數不等式, 雙曲函數不等式。

衆所周知, 劉徽、祖沖之都是中國古代偉大的數學家, 他們的突出貢獻之一就是圓周率 π 的計算[1], 劉徽計算 π 近似值的方法是利用割圓術, 而祖沖之由於其專著《綴術》的失傳, 所以關於他計算 π 的方法後人只能給出某種猜測, 例如文 [2]所述方法就是一種嘗試。文 [2]在介紹如何計算 π 的過程中分別給出了劉徽不等式和祖沖之不等式, 這裏的祖沖之不等式未必是祖沖之本人證得的, 之所以這樣命名完全是出自對這位古代數學家的尊敬。劉徽不等式和祖沖之不等式也就是下面的不等式 (1) 和 (2)。

若單位圓的內接正 n 邊形的面積爲 $S_{\text{內}}^{(n)}$, 則當 $n\geq 6$ 時,

$$S_{\text{內}}^{(2n)}<\pi<2S_{\text{內}}^{(2n)}-S_{\text{內}}^{(n)}, \tag{1}$$

$$\frac{4}{3}S_{\text{內}}^{(2n)}-\frac{1}{3}S_{\text{內}}^{(n)}<\pi<\frac{8}{3}S_{\text{內}}^{(2n)}-2S_{\text{內}}^{(n)}+\frac{1}{3}S_{\text{內}}^{(\frac{n}{2})}\qquad (n\text{ 爲偶數})。 \tag{2}$$

本文作者在 [3]中借助於微分學的方法給出了 (1), (2)的證明, 並利用類比方法給出兩個關於雙曲函數的不等式及單位圓內接正 n 邊形周長與 π 之間關係的不等式, 即

命題1: 設 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 則有

$$\sin x<x<\sin x\cdot(2-\cos x). \tag{3}$$

設 $0<x<\dfrac{\pi}{3}$, 則有

$$\sin x\cdot(4-\cos x)<3x<8\sin x-3\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x. \tag{4}$$

命題 2: 設 $x>0$, 則有

$$\sinh x > x > \sinh x\cdot(2-\cosh x), \tag{5}$$

$$\sinh x\cdot(4-\cosh x) < 3x < 8\sinh x - 3\sinh 2x + \frac{1}{4}\sinh 4x. \tag{6}$$

命題 3: 若單位圓內接正 n 邊形的周長爲 $P_{\text{內}}^{(n)}$, 則當 $n\ge 6$ 時,

$$P_{\text{內}}^{(2n)} < 2\pi < 2P_{\text{內}}^{(2n)} - P_{\text{內}}^{(n)}, \tag{7}$$

$$\frac{4}{3}P_{\text{內}}^{(2n)} - \frac{1}{3}P_{\text{內}}^{(n)} < 2\pi < \frac{8}{3}P_{\text{內}}^{(2n)} - 2P_{\text{內}}^{(n)} + \frac{1}{3}P_{\text{內}}^{(\frac{n}{2})} \qquad (n\ \text{爲偶數})。 \tag{8}$$

由於圓的面積可以通過圓的內接正 n 邊形的面積去逼近也可以通過圓的外切正 n 邊形的面積逼近, 因而我們猜測, 若將單位圓內接正 n 邊形的面積 $S_{\text{內}}^{(n)}$ 改爲單位圓外切正 n 邊形的面積 $S_{\text{外}}^{(n)}$, 應該存在與劉徽不等式 (1) 及祖沖之不等式 (2) 類似的不等式。事實上, 我們可以證明, 當 $n\ge 6$ 時, 有

$$S_{\text{外}}^{(2n)} > \pi > 2S_{\text{外}}^{(2n)} - S_{\text{外}}^{(n)}, \tag{9}$$

$$\frac{4}{3}S_{\text{外}}^{(2n)} - \frac{1}{3}S_{\text{外}}^{(n)} < \pi < \frac{8}{3}S_{\text{外}}^{(2n)} - 2S_{\text{外}}^{(n)} + \frac{1}{3}S_{\text{外}}^{(\frac{n}{2})} \qquad (n\ \text{爲偶數})。 \tag{10}$$

由於 $S_{\text{外}}^{(n)} = n\tan\dfrac{\pi}{n}$, $S_{\text{外}}^{(2n)} = 2n\tan\dfrac{\pi}{2n}$, $S_{\text{外}}^{(\frac{n}{2})} = \dfrac{n}{2}\tan\dfrac{2\pi}{n}$, 若令 $\dfrac{\pi}{n}=x$, 要證明不等式 (9), (10), 只需證明下面的

命題 4: 設 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 則有

$$2\tan\frac{x}{2} > x > 4\tan\frac{x}{2} - \tan x. \tag{11}$$

設 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$, 則有

$$\frac{8}{3}\tan\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\tan x < x < \frac{16}{3}\tan\frac{x}{2} - 2\tan x + \frac{1}{6}\tan 2x. \tag{12}$$

證明: 令 $f(x) = x - 4\tan\dfrac{x}{2} + \tan x$ $(0<x<\dfrac{\pi}{2})$, 則

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 - \frac{2}{\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{\cos^2 x},\\
f''(x) &= -\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}} + \frac{2\sin x}{\cos^3 x} = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}\cos^3 x}(2\cos^4\frac{x}{2} - \cos^3 x)\\
&= \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}\cos^3 x}(1+2\cos x+\cos^2 x - 2\cos^3 x)\\
&= \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}\cos^3 x}(1+\cos^2 x + 2\cos x\sin^2 x) > 0,
\end{aligned}$$

故當 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 時, $f'(x)$ 單調遞增。又 $f'(0)=0$, 所以 $f'(x)>0$, 從而 $f(x)$ 單調遞增。又 $f(0)=0$, 所以 $f(x)>0$, 即

$$x>4\tan\frac{x}{2}-\tan x. \tag{13}$$

又當 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 時, $\tan\dfrac{x}{2}>\dfrac{x}{2}$ 是熟知的不等式, 因此不等式 (11) 成立。

令 $g(x)=3x-8\tan\dfrac{x}{2}+\tan x$ $(0<x<\dfrac{\pi}{2})$, 則

$$\begin{aligned}
g'(x)&=3-\frac{4}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\cos^2 x},\\
g''(x)&=-\frac{4\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}}+\frac{2\sin x}{\cos^3 x}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}\cos^3 x}(4\cos^4\frac{x}{2}-4\cos^3 x)\\
&=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}\cos^3 x}(1+2\cos x+\cos^2 x-4\cos^3 x).
\end{aligned}$$

由 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\cos x<1$ 知 $g''(x)>0$, 故 $g'(x)$ 單調遞增。又 $g'(0)=0$, 所以 $g'(x)>0$, $g(x)$ 單調遞增。而 $g(0)=0$, 所以 $g(x)>0$, 即

$$\frac{8}{3}\tan\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\tan x<x. \tag{14}$$

利用文 [4]中 $\tan x$ $(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2})$ 的冪級數展開式知

$$\tan x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}B_n x^{2n-1}, \tag{15}$$

其中 $B_n>0$ 爲 Bernoulli 數:

$$B_1=\frac{1}{6},\ B_2=\frac{1}{30},\ B_3=\frac{1}{42},\ B_4=\frac{1}{30},\ B_5=\frac{5}{66},\ \ldots,$$

於是當 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 時,

$$\begin{aligned}
&32\tan\frac{x}{2}-12\tan x+\tan 2x-6x\\
&\quad=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}B_n\Big(\frac{1}{2^{2n-6}}+2^{2n-1}-12\Big)x^{2n-1}>0,
\end{aligned}$$

從而當 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 時,

$$x<\frac{16}{3}\tan\frac{x}{2}-2\tan x+\frac{1}{6}\tan 2x. \tag{16}$$

由 (15), (16) 知不等式 (12) 成立。

由於雙曲函數和三角函數有很多相似的性質, 參照命題4, 我們可以得到如下關於雙曲函數的不等式。

命題5: 設 $0<x<1$, 則有

$$2\tanh\frac{x}{2}<x<4\tanh\frac{x}{2}-\tanh x, \tag{17}$$

設 $0<x<\dfrac{\pi}{6}$, 則有

$$\frac{8}{3}\tanh\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\tanh x<x<\frac{16}{3}\tanh\frac{x}{2}-2\tanh x+\frac{1}{6}\tanh 2x. \tag{18}$$

證明: 仿文 [4]中 $\tan x$ 冪級數展開式的求法可求得雙曲正切函數 $\tanh x$ 的冪級數展開式。

因爲 $\tanh x$ 爲奇函數, 故其展開式僅含 x 的奇次冪, 於是可設

$$\tanh x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(2n-1)!}x^{2n-1}. \tag{19}$$

由定義知 $\tanh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$。而

$$e^x-e^{-x}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$
$$e^x+e^{-x}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

故

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(2n-1)!}x^{2n-1}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

易知 $H_1=1$, 比較上式兩邊 x^{2n-1} 的係數, 得

$$\frac{H_n}{(2n-1)!}+\frac{H_{n-1}}{(2n-3)!}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{H_{n-2}}{(2n-5)!}\cdot\frac{1}{4!}+\frac{H_{n-3}}{(2n-7)!}\cdot\frac{1}{6!}+\cdots=\frac{1}{(2n-1)!}.$$

由此知 H_n 滿足遞推關係式:

$$H_n+\binom{2n-1}{2}H_{n-1}+\binom{2n-1}{4}H_{n-2}+\binom{2n-1}{6}H_{n-3}+\cdots=1. \tag{20}$$

利用 (20) 可求得 $H_2=-2,\ H_3=16,\ H_4=-272,\ H_5=7936,\ \ldots$, 所以對任意實數 x, 有

$$\tanh x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9-\cdots. \tag{21}$$

當 $0<x<1$ 時,

$$\begin{aligned}\tanh\frac{x}{2}&=\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}x^3+\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{32}x^5-\cdots>\frac{x}{2}-\frac{1}{24}x^3,\\ -\tanh x&=-x+\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7-\cdots>-x+\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{15}x^5,\end{aligned}$$

所以當 $0<x<1$ 時,

$$4\tanh\frac{x}{2}-\tanh x-x=\frac{1}{6}x^3-\frac{2}{15}x^5=\frac{x^2}{30}(5-4x^2)>0,$$

從而當 $0<x<1$ 時,

$$x<4\tanh\frac{x}{2}-\tanh x. \tag{22}$$

又 $x>0$ 時 $\tanh\frac{x}{2}<\frac{x}{2}$ 爲熟知的不等式[5], 因此不等式 (17) 成立。

令 $h(x)=3x-8\tanh\frac{x}{2}+\tanh x$ $(x>0)$, 則

$$\begin{aligned}h'(x)&=3-\frac{4}{\cosh^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\cosh^2 x},\\ h''(x)&=\frac{4\sinh\frac{x}{2}}{\cosh^3\frac{x}{2}}-\frac{2\sinh x}{\cosh^3 x}\\ &=\frac{\sinh\frac{x}{2}}{\cosh^3\frac{x}{2}\cosh^3 x}(4\cosh^3 x-4\cosh^4\frac{x}{2})\\ &=\frac{\sinh\frac{x}{2}}{\cosh^3\frac{x}{2}\cosh^3 x}(4\cosh^3 x-\cosh^2 x-2\cosh x-1)\\ &=\frac{\sinh\frac{x}{2}}{\cosh^3\frac{x}{2}\cosh^3 x}(\cosh x-1)(4\cosh^2 x+3\cosh x+1).\end{aligned}$$

由於當 $x>0$ 時, $\cosh x>1$, 故當 $x>0$ 時 $h''(x)>0$, 從而 $h'(x)$ 單調遞增。又 $h'(0)=0$, 所以 $h'(x)>0$, $h(x)$ 單調遞增。而 $h(0)=0$, 所以 $h(x)>0$, 即

$$\frac{8}{3}\tanh\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\tanh x<x. \tag{23}$$

由函數 $\tanh x$的冪級數展開式 (21) 知, 當 $0<x<\frac{\pi}{6}$ 時,

$$\begin{aligned}\tanh\frac{x}{2}&>\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}x^3+\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{32}x^5-\frac{17}{315}\cdot\frac{1}{128}x^7,\\ \tanh x&<x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5,\\ \tanh 2x&>2x-\frac{8}{3}x^3+\frac{64}{15}x^5-\frac{17}{315}\cdot 128x^7,\end{aligned}$$

從而

$$\begin{aligned}32\tanh\frac{x}{2}-12\tanh x+\tanh 2x-6x &> \frac{14}{5}x^5-\frac{17}{315}\cdot\frac{513}{4}x^7\\ &=\frac{1}{5}x^5\Big(14-\frac{969}{28}x^2\Big)>0,\end{aligned}$$

所以當 $0<x<\dfrac{\pi}{6}$ 時, $$32\tanh\frac{x}{2}-12\tanh x+\tanh 2x>6x. \tag{24}$$

由(23), (24) 知不等式 (18) 成立。

和命題3類似, 還可得到

命題6: 若單位圓外切正 n 邊形的周長爲 $P_{外}^{(n)}$, 則當 $n\geq 6$ 時,

$$P_{外}^{(2n)}>2\pi>2P_{外}^{(2n)}-P_{外}^{(n)}, \tag{25}$$

$$\frac{4}{3}P_{外}^{(2n)}-\frac{1}{3}P_{外}^{(n)}<2\pi<\frac{8}{3}P_{外}^{(2n)}-2P_{外}^{(n)}+\frac{1}{3}P_{外}^{(\frac{n}{2})} \qquad (n\text{ 爲偶數})。 \tag{26}$$

證明: 由 $P_{外}^{(n)}=2n\tan\dfrac{\pi}{n}$, $P_{外}^{(2n)}=4n\tan\dfrac{\pi}{2n}$, 並利用命題4即可證得。

參考文獻

1. 李文林, 數學史概論(第二版)[M], 北京: 高等教育出版社,2002。
2. 虞言林, 虞琪, 祖沖之算 π 之謎 [M], 北京: 科學出版社,2002。
3. 蘇化明, 潘傑, 劉徽不等式與祖沖之不等式的注記[J], 數學的實踐與認識,**42**(2012), no. 8, 197-199。
4. Γ. M . 菲赫金哥爾茨著, 北京大學高等數學教研室譯, 微積分學教程 (第二卷第二分册)[M], 北京: 人民教育出版社,1954。
5. 匡繼昌, 常用不等式[M], 濟南: 山東科學技術出版社,2004。

—本文作者任教合肥工業大學數學學院—