數學傳播 37卷1期, pp. 83-85

Weitzenbock 不等式的又一推廣

趙忠華

$\triangle ABC$ 中, 設 a,b,c 分別爲 BC, CA, AB 的邊長, $\triangle ABC$ 面積記爲 S, 則有 $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S$, 當且僅當 $\triangle ABC$ 爲等邊三角形時等號成立。此即著名的 Weitzenbock 不等式, 具體見文 [1]。關於它的推廣與加強屢見於各種刊物中, 但大多數是增加不等式右邊的項數, 如著名的費-哈不等式: $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S+(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$, 具體見文 [1]。本文將從新的角度給出它的一個有趣推廣:

定理: $\triangle ABC$ 中, 設 a,b,c 分別爲 BC, CA, AB 的邊長; 相應於頂點 A,B,C 的中線長爲 m_a,m_b,m_c; 內角平分線長 w_a,w_b,w_c; 高線長爲 h_a,h_b,h_c; $\triangle ABC$ 面積記爲 S, 則有

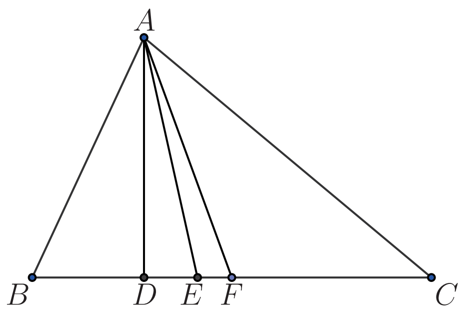
$$a^2+b^2+c^2\ge \frac{4}{\sqrt{3}}\Big(\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\Big)S\ge \frac{4}{\sqrt{3}}\Big(\frac{w_a}{h_a}+\frac{w_b}{h_b}+\frac{w_c}{h_c}\Big)S\ge 4\sqrt{3}S.$$

當且僅當 $\triangle ABC$ 爲等邊三角形時等號成立。

我們先證以下引理。

引理: $\triangle ABC$ 中, 相應於頂點 A,B,C 的中線長爲 m_a,m_b,m_c; 內角平分線長 w_a,w_b,w_c; 高線長爲 h_a,h_b,h_c; 則 $h_a\le w_a\le m_a$, $h_b\le w_b\le m_b$, $h_c\le w_c\le m_c$。

證明: 如圖: $\triangle ABC$ 中, AD 是高, AE 是內角平分線, AF 是中線, 我們分情況討論:



(1) 若 $AC\ne AB$, 不妨設 $AC>AB$, 則 $\angle B>\angle ACB$, 所以 $\angle BAD<\angle CAD$, 所以

$\angle BAC$ 的內角平分線 AE 位於 $\angle CAD$ 中, 即 E 一定在 CD 上。根據勾股定理, $BD<CD$, 所以 BC 的中點 F 一定在 CD 上, 因爲 $\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{AB}{AC}<1$, 所以 E 點在線段 DF 上, 故 $h_a<w_a<m_a$。若 $AC<AB$ 同理可證。

(2) 如果 $AC=AB$ 則 $h_a=w_a=m_a$。

由 (1)、(2) 得 $h_a\le w_a\le m_a$。同理 $h_b\le w_b\le m_b$, $h_c\le w_c\le m_c$。

下面我們來給出定理的證明:

證明: 不等式的右半部分是顯然成立的, 因爲由引理即得

$$\frac{4}{\sqrt{3}}\Big(\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\Big)S\ge\frac{4}{\sqrt{3}}\Big(\frac{w_a}{h_a}+\frac{w_b}{h_b}+\frac{w_c}{h_c}\Big)S\ge 4\sqrt{3}S$$

下面關鍵是證明不等式的左半部分。

$$\because\ \Big(\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\Big)S=\frac{1}{2}(am_a+bm_b+cm_c),$$

$\therefore$ 原不等式等價於

$$a^2+b^2+c^2\ge\frac{2}{\sqrt{3}}(am_a+bm_b+cm_c).$$

由柯西不等式得 $(a^2+b^2+c^2)(m_a^2+m_b^2+m_c^2)\ge(am_a+bm_b+cm_c)^2$, 又

$$m_a^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4},\quad m_b^2=\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4},\quad m_c^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4},$$

所以

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4},$$

所以

$$(a^2+b^2+c^2)\times\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)\ge(am_a+bm_b+cm_c)^2.$$

即

$$(a^2+b^2+c^2)^2\ge\frac{4}{3}(am_a+bm_b+cm_c)^2$$

開方即得

$$a^2+b^2+c^2\ge\frac{2}{\sqrt{3}}(am_a+bm_b+cm_c).$$

如果等號成立, 必須 $\dfrac{a}{m_a}=\dfrac{b}{m_b}=\dfrac{c}{m_c}$, 即 $\Big(\dfrac{a}{m_a}\Big)^2=\Big(\dfrac{b}{m_b}\Big)^2=\Big(\dfrac{c}{m_c}\Big)^2$, 即

$$\frac{a^2}{2b^2+2c^2-a^2}=\frac{b^2}{2a^2+2c^2-b^2}=\frac{c^2}{2a^2+2b^2-c^2}=k,$$

由等比性質得

$$k=\frac{a^2+b^2+c^2}{3a^2+3b^2+3c^2}=\frac{1}{3},\ 從而\begin{cases}4a^2=2b^2+2c^2\\4b^2=2a^2+2c^2\\4c^2=2a^2+2b^2\end{cases},\ 解得\ a^2=b^2=c^2,$$

即當且僅當 $\triangle ABC$ 爲等邊三角形時等號成立, 定理得證。

參考資料

1. O. Bottema 等著, 單墫譯, 幾何不等式, 北京大學出版社, 1993年版。

—本文作者任教安徽省旌德中學—

更正啓事

本刊第36卷第4期 (144號) 第18頁倒數第7行的公式有誤, 正確公式如下:

$$G(\chi,\sigma)=\sum\chi(x)\sigma(x),\qquad x\in\mathbb{F}_p^*$$

本刊第36卷第4期 (144號) 第29頁第11行的誘導表示有誤, 正確公式如下:

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}V=U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{g})}V$$

本刊第36卷第4期 (144號) 第30頁最後一行的公式與第31頁第1、2行中的 L_W 爲誤植, 正確應爲 L_w。

本刊第36卷第4期 (144號) 第30頁第14行「$\cdots$上同調群 $H^i(X,\mathcal{L})$ 是有理模 G。」爲誤植, 正確應爲「$\cdots$上同調群 $H^i(X,\mathcal{L})$ 是有理 G 模。」。

本刊第36卷第4期 (144號) 第30頁最後一行猜想有誤, 正確猜想如下:

$$chL_w=\sum_{y\leq w}(-1)^{\ell(w)-\ell(y)}P_{y,w}(1)chM_y,$$