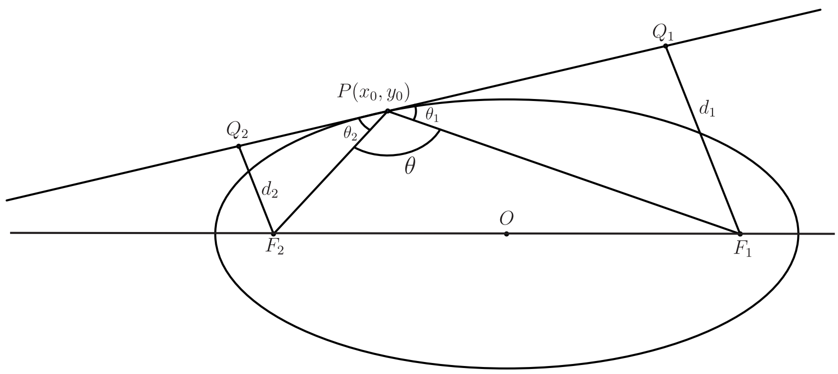
數學傳播 37卷1期, pp. 75-82

橢圓及雙曲線焦點三角形的相關幾何量

李岳洲 · 廖晟峰 · 莊健祥

近年來在臺灣區高中數學競賽、大學數學系甄試, 甚至大學學科能力測驗中, 均曾出現有關橢圓焦點三角形的題目 (其中大部分均爲求焦點三角形的面積), 例如國立臺灣師範大學數學系98學年度推甄試題中的第9題:「設 P 爲橢圓 $\Gamma: \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上一點且 F_1、F_2 爲 Γ 的兩個焦點, 若 $\angle F_1PF_2=60^\circ$, 則 $\triangle F_1PF_2$ 的面積爲何? 」所謂橢圓的「焦點三角形」係指橢圓上非長軸頂點的任一點 P 連接其左、右焦點 F_1 及 F_2 所形成的三角形 (如圖一的 $\triangle F_1PF_2$), 本文嘗試在已知橢圓的長軸長, 橢圓兩焦點的距離, 以及焦點三角形頂角 $\angle F_1PF_2$ 等三個條件下, 試著推導出橢圓焦點三角形的面積、內切圓半徑、中線長、角平分線長; 同時也將研究延伸至「雙曲線」焦點三角形的面積、內切圓半徑、中線長, 以及角平分線長, 試著推導出類似的結果。



(圖一)

壹、橢圓焦點三角形的相關幾何量

符號定義: 本文將橢圓的長軸長定爲 $2a$, 兩焦點的距離 $\overline{F_1F_2}$ 定爲 $2c$, 而焦點三角形 $\triangle F_1PF_2$ 的面積定爲 $\triangle$, 並令其頂角 $\angle F_1PF_2=\theta$; 由於長度及面積均爲平移及旋轉的不變量, 因此不

失一般性, 本文將橢圓方程式設爲標準式: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 其中 $a>b>0$, $b^2=a^2-c^2$。

定理一: 橢圓焦點三角形的面積 $\triangle=b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$。

有關橢圓焦點三角形的面積公式早有證明, 大都是利用餘弦定理及 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$ 來推導 (有興趣的讀者可參考 http://zhidao.baidu.com/question/75592337的內容), 本文利用橢圓焦點三角形的內切圓半徑爲過渡量, 發現了一個簡易且快速的證法, 現敍述如下:

證明: 設焦點三角形 $\triangle F_1PF_2$ 的內切圓半徑爲 r, 而其半周長爲 s,

$$
\begin{aligned}
\text{則}\quad s&=\frac{\overline{PF_1}+\overline{PF_2}+\overline{F_1F_2}}{2}=a+c\\
\Rightarrow r&=\frac{\triangle}{s}=(s-\overline{F_1F_2})\tan\frac{\theta}{2}\Rightarrow r=\frac{\triangle}{a+c}=(a-c)\tan\frac{\theta}{2}\\
\Rightarrow \triangle&=(a+c)(a-c)\tan\frac{\theta}{2}\\
\Rightarrow \triangle&=b^2\tan\frac{\theta}{2},
\end{aligned}
$$

得證。同時由上式亦可得橢圓焦點三角形的內切圓半徑 $r=(a-c)\tan\frac{\theta}{2}$。

若連接橢圓的中心 O 與其上非長軸頂點的任意一點 P, 則連線段 $\overline{OP}$ 的長度即爲橢圓焦點三角形 $\triangle F_1PF_2$ 中線長。故接下來, 我們想要證明:

定理二: 橢圓焦點三角形的中線長 $\overline{OP}=\sqrt{a^2-b^2\tan^2\frac{\theta}{2}}$。

證明:

(1) $\because$ 橢圓焦點三角形的面積 $\triangle=b^2\tan\frac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}\cdot\sin\theta$

$$\Rightarrow \overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}=\frac{2b^2\tan\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}=\frac{2b^2\tan\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=b^2\sec^2\frac{\theta}{2},$$

(2) 將橢圓焦點三角形的中線長 $\overline{OP}$ 設爲 m_a, 由三角形的中線定理可得:

$$\begin{aligned}
m_a &= \frac{1}{2}\sqrt{2\overline{PF_1}^2 + 2\overline{PF_2}^2 - \left(\overline{F_1F_2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2\overline{PF_1}^2 + 2\overline{PF_2}^2 - (\overline{PF_1}^2 + \overline{PF_2}^2 - 2\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}\cdot\cos\theta)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\overline{PF_1}^2 + \overline{PF_2}^2 + 2\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}\cdot\cos\theta} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\overline{PF_1} + \overline{PF_2}\right)^2 - 2\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2} + 2\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}\cdot\cos\theta} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - 2\cdot\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}\cdot(1-\cos\theta)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - 2b^2\sec^2\frac{\theta}{2}(1-\cos\theta)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - 2b^2\sec^2\frac{\theta}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - 4b^2\sec^2\frac{\theta}{2}\cdot\sin^2\frac{\theta}{2}} \\
&= \sqrt{a^2 - b^2\tan^2\frac{\theta}{2}}, \qquad \text{得證。}
\end{aligned}$$

若 P 點爲橢圓上非長軸頂點的任意點, 且過 P 點的法線與橢圓的長軸交於 D 點, 則依橢圓的光學性質可知: 線段 $\overline{PD}$ 的長即爲橢圓焦點三角形的頂角平分線長, 因此, 接下來我們想要證明:

定理三: 橢圓焦點三角形的頂角平分線長 $= \dfrac{b^2}{a}\sec\frac{\theta}{2}$。

證明: 將橢圓焦點三角形的頂角平分線長設爲 t_a, 由三角形角平分線定理可得:

$$t_a = \frac{2\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}}{\overline{PF_1}+\overline{PF_2}}\cdot\cos\frac{\theta}{2} = \frac{2b^2\sec^2\frac{\theta}{2}}{2a}\cdot\cos\frac{\theta}{2} = \frac{b^2}{a}\sec\frac{\theta}{2}.$$

現以國立臺灣師範大學數學系98學年度推甄試題爲例, 加以延伸, 以驗證上述有關橢圓焦點三角形幾何量的性質: 設 P 爲橢圓 $\Gamma : \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ 上一點且 F_1、F_2 爲 Γ 的兩個焦點, 若 $\angle F_1PF_2 = 60°$,

求下列各值: (1) $\triangle F_1PF_2$ 的面積。

(2) $\triangle F_1PF_2$ 的內切圓半徑。

(3) $\overline{OP}$; 其中 O 爲橢圓中心。

(4) 若過 P 點的法線交 x 軸於 D 點, 求 $\overline{DP}$。

(5) 若 P 點在第一象限, 求 P 點座標。

解:

(1) $\because$ $b=3$, $\tan\dfrac{60^\circ}{2}=\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore$ $\triangle F_1PF_2$ 的面積 $=b^2\tan\frac{\theta}{2}=3^2\dfrac{\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$。

(2) $\because$ $a=5$, $c=\sqrt{25-9}=4$, $\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore$ $\triangle F_1PF_2$ 的內切圓半徑 $r=(a-c)\tan\dfrac{\theta}{2}=(5-4)\cdot\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

(3) $\because$ $\overline{OP}$ 即爲焦點三角形 $\triangle F_1PF_2$ 的中線長,

$$\therefore\ \overline{OP}=\sqrt{a^2-b^2\tan^2\frac{\theta}{2}}=\sqrt{25-9\cdot\frac{1}{3}}=\sqrt{22}.$$

(4) $\because$ $\overline{DP}$ 即爲焦點三角形 $\triangle F_1PF_2$ 的頂角平分線長

$$\therefore\ \overline{DP}=\frac{b^2}{a}\sec\frac{\theta}{2}=\frac{9}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{5}.$$

(5) 設 P 座標爲 (x_0,y_0), $\because$ $\triangle F_1PF_2$ 的面積 $=3\sqrt{3}=cy_0=4y_0\Rightarrow y_0=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ 且

$$\overline{OP}=\sqrt{22}=\sqrt{x_0^2+\Big(\frac{3\sqrt{3}}{4}\Big)^2}\Rightarrow x_0=\frac{5\sqrt{13}}{4}\ \ \therefore\ P\text{點座標爲}\Big(\frac{5\sqrt{13}}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4}\Big)。$$

貳、雙曲線焦點三角形的相關幾何量

符號定義: 雙曲線的貫軸長定爲 $2a$, 兩焦點的距離 $\overline{F_1F_2}$ 定爲 $2c$, 而焦點三角形 $\triangle F_1PF_2$ 的面積定爲 $\triangle$, 令 $\angle F_1PF_2=\theta$, 雙曲線方程式設爲: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 其中 a, b 皆大於 0, $b^2=c^2-a^2$。

定理一: 雙曲線焦點三角形的面積 $\triangle=b^2\cot\dfrac{\theta}{2}$。

此定理之證明亦大都利用餘弦定理與雙曲線定義 $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a$ 即可得到, 故本文予以略過。(有興趣的讀者同樣可參考 http://zhidao.baidu.com/question/127489618 的內容)。

若連接雙曲線的中心 O 與其上非貫軸頂點的任意一點 P, 則連線段 $\overline{OP}$ 的長即爲雙曲線焦點三角形的中線長, 故接下來, 我們想要證明:

定理二: 雙曲線焦點三角形的中線長 $\overline{OP}=\sqrt{a^2+b^2\cot^2\frac{\theta}{2}}$。

證明: 首先, 在利用餘弦定理證得雙曲線焦點三角形面積的過程中, 我們可以得到雙曲線兩焦半徑的乘積 $\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}=b^2\csc^2\frac{\theta}{2}$, 然後我們將雙曲線焦點三角形的中線長 $\overline{OP}$ 設爲 m_a, 由三角形的中線定理可得:

$$
\begin{aligned}
m_a &= \frac{1}{2}\sqrt{2\overline{PF_1}^2+2\overline{PF_2}^2-\left(\overline{F_1F_2}\right)^2}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2\overline{PF_1}^2+2\overline{PF_2}^2-(\overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2-2\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}\cdot\cos\theta)}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2+2\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}\cdot\cos\theta}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right)^2+2\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}+2\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}\cdot\cos\theta}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+2\cdot\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}\cdot(1+\cos\theta)}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+2b^2\csc^2\frac{\theta}{2}(2\cos^2\frac{\theta}{2})}\\
&= \sqrt{a^2+b^2\cot^2\frac{\theta}{2}}, \qquad \text{得證。}
\end{aligned}
$$

若 P 點爲雙曲上非貫軸頂點的任意一點, 且過 P 點的切線與雙曲線的貫軸交於 D 點, 則依雙曲線的光學性質可知: 線段 $\overline{PD}$ 的長即爲雙曲線焦點三角形的頂角平分線長, 因此, 我們想證明:

定理三: 雙曲線焦點三角形的角平分線長 $=\dfrac{b^2\csc\frac{\theta}{2}\cdot\cot\frac{\theta}{2}}{\sqrt{a^2+b^2\csc^2\frac{\theta}{2}}}$。

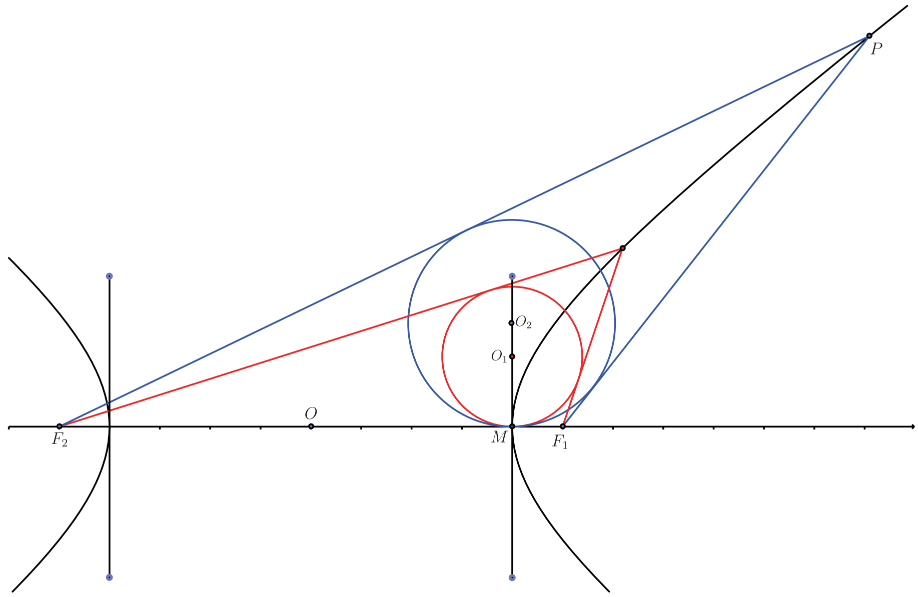
解: 將雙曲線焦點三角形的頂角平分線長設爲 t_a, 則

$$
\begin{aligned}
t_a &= \frac{2\cdot\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}}{\overline{PF_1}+\overline{PF_2}}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\\
&= \frac{2\cdot b^2\csc^2\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\left(\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right)^2+4\cdot\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}}}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\\
&= \frac{2\cdot b^2\csc^2\frac{\theta}{2}}{2\sqrt{a^2+b^2\csc^2\frac{\theta}{2}}}\cdot\cos\frac{\theta}{2}=\frac{b^2\csc\frac{\theta}{2}\cdot\cot\frac{\theta}{2}}{\sqrt{a^2+b^2\csc^2\frac{\theta}{2}}}, \qquad \text{得證。}
\end{aligned}
$$

最後, 由於雙曲線焦點三角形的周長並非定值, 故其內切圓半徑沒有特定的公式, 然而我們在研究雙曲線焦點三角形的內切圓時, 發現了一個有趣的性質, 敍述如下:

定理四: 雙曲線焦點三角形的內切圓圓心軌跡爲一過其頂點且垂直其貫軸的非封閉線段。(如圖

二)



(圖二)

首先, 證明雙曲線焦點三角形的內切圓圓心必位在過其貫軸頂點且垂直其貫軸的直線上:

(1) 設雙曲線兩焦點爲 $F_1(c,0)$ 及 $F_2(-c,0)$, $P(x_0,y_0)$ 爲 Γ 上異於頂點的任意一點, M 爲 $\triangle F_1PF_2$ 內切圓與 x 軸的交點, 我們欲證 $\overline{MF_1}$ 及 $\overline{MF_2}$ 均爲定值, 且 $\overline{MF_1}=(c-a)$, $\overline{MF_2}=(c+a)$ (如圖二)

證明: $\triangle F_1PF_2$ 的半周長

$$s=\frac{(\overline{PF_1}+\overline{PF_2}+\overline{F_1F_2})}{2}=\frac{ex_0-a+ex_0+a+2c}{2}=ex_0+c,$$

其中 $e=\dfrac{c}{a}$。

$$\Rightarrow\ \overline{MF_1}=s-\overline{PF_2}=ex_0+c-(ex_0+a)=c-a$$
$$\overline{MF_2}=s-\overline{PF_1}=ex_0+c-(ex_0-a)=c+a \qquad \text{得證。}$$

因此當雙曲線的貫軸長 $2a$ 及兩焦點間的距離 $2c$ 均已知的條件下, $\overline{MF_1}=(c-a)$, $\overline{MF_2}=(c+a)$ 均爲定值, 亦即雙曲線任一焦點三角形 $\triangle F_1PF_2$ 的內切圓與其貫軸的切點爲一定點, 而此定點爲雙曲線貫軸的頂點; 又因圓心必位於過切點且垂直切線的直線上, 故得知雙曲線任一焦點三角形 $\triangle F_1PF_2$ 的內切圓圓心必位於其過貫軸頂點且垂直其貫軸的直線上。

其次, 證明雙曲線焦點三角形的內切圓圓心軌跡爲一非封閉線段:

(2) 設雙曲線焦點三角形的內切圓圓心坐標爲 (a, y_0), 而 $P(x, y)$ 爲雙曲線上任意一點, 我們只要證明當 x 趨近無限大時, y_0 的極限值存在即可:

證明: $\because$ 雙曲線焦點三角形的內切圓圓心必位在過其頂點且垂直其貫軸的直線上, $\therefore$ 其焦點三角形內切圓圓心的 y_0 座標 $=$ 內切圓的半徑 $r = \dfrac{\triangle}{s} = \dfrac{cy}{ex + c}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} y_0 = \lim_{x\to\infty} \frac{cy}{ex+c} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{cy}{x}}{e+\frac{c}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{c\sqrt{\frac{b^2(x^2-a^2)}{a^2}}}{x}}{e+\frac{c}{x}} = \frac{c\cdot\frac{b}{a}}{e} = \frac{eb}{e} = b, \text{得證。}$$

由上述兩個性質即知: 雙曲線焦點三角形的內切圓圓心軌跡爲一過其頂點且垂直其貫軸的非封閉線段。

現舉一題爲例, 來驗證上述有關雙曲線焦點三角形的各個幾何量之性質: 設 P 爲雙曲線 $\Gamma : \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ 上一點且 F_1、F_2 爲 Γ 的右焦點以及左焦點, 若 $\angle F_1PF_2 = 60°$,

求下列各值:

(1) $\triangle F_1PF_2$ 的面積。

(2) $\overline{OP}$; 其中 O 爲雙曲線中心。

(3) 若過 P 點的切線交 x 軸於 D 點, 求 $\overline{DP}$。

(4) 若 $\triangle F_1PF_2$ 的內切圓與 x 軸的交點爲 M, 其中 P 點位於第一象限。求 $\overline{MF_1}$ 及 $\overline{MF_2}$。

解:

(1) $\because\ b = 3, \cot\dfrac{60°}{2} = \cot 30° = \sqrt{3}, \therefore\ \triangle F_1PF_2$ 的面積 $= b^2\cot\dfrac{\theta}{2} = 3^2\cdot\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$。

(2) $\because\ \overline{OP}$ 即爲焦點三角形 $\triangle F_1PF_2$ 的中線長

$$\therefore\ \overline{OP} = \sqrt{a^2 + b^2\cot^2\frac{\theta}{2}} = \sqrt{16+9\cdot 3} = \sqrt{43}.$$

(3) $\because\ \overline{DP}$ 即爲焦點三角形 $\triangle F_1PF_2$ 的角平分線長

$$\therefore\ \overline{DP} = \frac{b^2\csc\frac{\theta}{2}\cdot\cot\frac{\theta}{2}}{\sqrt{a^2+b^2\csc^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{9\cdot 2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{16+9\cdot 2^2}} = \frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{52}} = \frac{9\sqrt{39}}{13}.$$

(4) $\because\ \overline{MF_1} = (c-a), \overline{MF_2} = (c+a), \therefore\ \overline{MF_1} = 5-4 = 1, \overline{MF_2} = 5+4 = 9$。

参考資料

1. 孫文先編, 解題思路 — 如何作證明題, 九章出版社,1992年1月。
2. 許志農編, 推甄解析題本, 龍騰出版社,2010年8月。

—本文作者李岳洲、廖晟峰現爲台北市立內湖高中高三數學資優班的學生, 莊健祥爲台北市立內湖高中數學科專任老師。—