數學傳播 37卷1期, pp. 61-74

廣義 Pascal 矩陣與 Bernoulli 多項式及 Euler 多項式

廖信傑

1. 引言

在數學上, 如果一個多項式序列 $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 滿足

$$\frac{dp_n(x)}{dx} = np_{n-1}(x),\ n \geq 1$$

其中 $p_0(x)$ 爲非零常數, 則我們稱這類序列爲 Appell 序列。

在這一類序列中, 最受到矚目就是 Bernoulli 多項式、Euler 多項式、Hermite 多項式。本文將重點放在其中的 Bernoulli 多項式及 Euler 多項式。

利用生成函數, 我們可以定義 Bernoulli 多項式 $B_n(x)$ 及 Euler 多項式 $E_n(x)$ 如下:

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} \quad (|t|<2\pi)$$

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!} \quad (|t|<\pi)$$

我們稱 $B_n(0)$ 爲 Bernoulli 數, 記爲B_n。稱 $2^nE_n(\frac{1}{2})$ 爲 Euler 數, 記爲 E_n。

一個 $n\times n$ 矩陣 $P_n = [\binom{i}{j}]_{n-1\geq i,j\geq 0}$ 稱爲 Pascal 矩陣, 也即是其元素可以排列成 Pascal 三角形, 例如下列皆爲 Pascal 矩陣:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \ldots。$$

若將上述矩陣內的每一個元素 $(P_n)_{ij}$ 乘上 x^{i-j} 可以得到如下的矩陣

$$P_2[x]=\begin{bmatrix}1\,0\\ x\,1\end{bmatrix},\ P_3[x]=\begin{bmatrix}1&0&0\\ x&1&0\\ x^2&2x&1\end{bmatrix},\ P_4[x]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\ x&1&0&0\\ x^2&2x&1&0\\ x^3&3x^2&3x&1\end{bmatrix},\ldots,$$

我們稱這類矩陣爲廣義的Pascal 矩陣。

n 階廣義 Pascal 矩陣 $P_n[x]$ 定義爲

$$(P_n[x])_{ij}=\begin{cases}x^{i-j}\binom{i}{j} & 當\ 0\le j\le i\le n-1\\ 0 & 其他,\end{cases}$$

並規定 $P_n[0]=I_n$。

利用 Pascal 矩陣去證明 Stirling 數的性質已出現於許多文獻, 例如: Cheon 與 Kim [4] 及 Srivastava 與 Pintér [7]; 然而我們所了解的是文獻中並未出現利用廣義 Pascal 矩陣去處理 Bernoulli 多項式與 Euler 多項式。本文的目的在於利用廣義的 Pascal 矩陣將 Bernoulli 多項式及 Euler 多項式連結在一起。在第二節中我們介紹 Call 與 Velleman [3] 中提到的廣義 Pascal 矩陣 $P[x]$ 的一個性質, 並利用這個性質在第二節及第三節中分別導出一些 Bernoulli 多項式及 Euler 多項式的公式。第四節則利用第二和第三節的結果及 $P_n[x]$ 將 Bernoulli 多項式及 Euler 多項式連繫在一起。

2. Bernoulli 多項式及 Bernoulli 數

本文往後的討論中, 矩陣的指標皆從 0 到 $n-1$。

首先, 我們定義方陣的指數函數

$$e^A=I+A+\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{3!}+\ldots+\frac{A^k}{k!}+\ldots。$$

因爲這個矩陣的每一個元素皆收斂, 所以對所有方陣A, e^A皆收斂。

定理1: 對任意實數x, $P_n[x]=e^{xH}$, 其中H爲$n\times n$方陣

$$H_{ij}=\begin{cases}i\ 當\ n-1\ge i=j+1\ge 1\\ 0\ 其他\end{cases}$$

且

$$(H^k)_{ij}=\begin{cases}\frac{i!}{j!}\ 當\ n-1\ge i=j+k\ge k\\ 0\ \ 其他。\end{cases}$$

注意到當$k \geq n$時, $H^k = 0$。

證明: 請參閱 [3]。

註: 對任意方陣 A, e^A 具有一些和普通的指數函數 e^x 相同的性質:

(a) 對任意 s 和 t, $e^{(t+s)A} = e^{sA}e^{tA}$。

(b) e^A 可逆, 且 $(e^A)^{-1} = e^{-A}$。

(c) 令 $\frac{d}{dt}e^{tA}$ 爲對 e^tA 中每個元素對 t 取導數後所得的矩陣, 則 $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$。

故由定理 1 可知, 廣義的 Pascal 矩陣具有如同指數函數的性質, 例如: $P_n[x+y]=P_n[x]P_n[y]$。從而 $I_n = P_n[x-x] = P_n[x]P_n[-x]$, 即 $P_n[-x]$ 爲 $P_n[x]$ 之反矩陣。

例: 4 階方陣的例子

$$P_4[x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 & 0 \\ x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}。$$

爲了方便起見將 $P_n[x]$ 記爲 $P[x]$。

令 $\xi(t) = (1, t, t^2, \ldots, t^{n-1})^T$, 對任意數 x 和 y, 由二項式定理可知

$$\xi(x+y) = (1, x+y, (x+y)^2, \ldots, (x+y)^{n-1})^T = P[x]\xi(y)。$$

Bernoulli 多項式及 Bernoulli 數之間有個關係式 (Apostol[2])

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k},\ n \geq 0。$$

我們將這個式子以矩陣的形式表示, 如下

$$\begin{pmatrix} B_0(x) \\ B_1(x) \\ B_2(x) \\ \vdots \\ B_{n-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \binom{1}{0}x & \binom{1}{1} & 0 & \ldots & 0 \\ \binom{2}{0}x^2 & \binom{2}{1}x & \binom{2}{2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0}x^n & \binom{n-1}{1}x^{n-2} & \binom{n-1}{2}x^{n-3} & \ldots & \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{n-1} \end{pmatrix}。 \tag{1}$$

注意到中間的 $n\times n$ 矩陣恰好就是 Pascal 矩陣 $P[x]$。假設 $(B_0(x)\, B_1(x) \ldots B_{n-1}(x))^T$ $= b[x]$, 於是 $b[0] = \Big(B_0\ B_1 \ldots B_{n-1}\Big)^T$, 從而可將 (1) 改寫成 $b[x] = P[x]b[0]$。

這一節提到與 Bernoulli 多項式有關的性質已利用生成函數證明 (見 [2]), 而以下的討論, 我們將這些等式表示爲矩陣, 可以比較簡單地證明出這些性質。

性質 2:

$$B_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}x^{n-k}B_k(x),\ n\geq 0。$$

其對應的矩陣形式爲

$$b[0]=P[-x]b[x]。$$

證明:

$$b[0]=P[x-x]b[0]=P[-x]P[x]b[0]=P[-x]b[x]$$

比較等號兩邊向量的元素可得性質2。 □

定理 3: (加法公式)

$$B_n(y+x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(y)x^{n-k},\ n\geq 0。$$

其對應的矩陣形式爲

$$b[x+y]=P[x]b[y]。$$

證明:

$$b[x+y]=P[x+y]b[0]=P[x]P[y]b[0]=P[x]b[y],$$

比較等號兩邊向量的元素可得定理3。 □

利用$P[x]$, 我們也可以得出 Bernoulli 多項式的微分公式。

定理 4:

$$B_i'(x)=iB_{i-1}(x),\ \ i\geq 1。$$

其對應的矩陣形式爲

$$\frac{d}{dx}b[x]=Hb[x]。$$

證明: 由定理1,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}b[x]&=\left(\frac{d}{dx}P[x]\right)b[0]=\left(\frac{d}{dx}e^{xH}\right)b[0]\\&=He^{xH}b[0]=HP[x]b[0]=Hb[x],\end{aligned}$$

即 $\frac{d}{dx}b[x] = Hb[x]$, 比較等號兩邊向量的元素可得定理4。 □

同樣的方式, 也能得到 k 次微分的公式

推論 5:

$$B_i^{(k)}(x) = k!\binom{i}{k}B_{i-k}(x)。$$

其對應的矩陣形式為

$$\frac{d^k}{dx^k}b[x] = H^k b[x]。$$

證明:

$$\frac{d^k}{dx^k}b[x] = H^k P[x]b[0] = H^k b[x],$$

比較等號兩邊向量的元素可得推論5。 □

有以上的微分公式, 自然地, 我們會想去考慮 Bernoulli 多項式的積分。定義$\int_0^x f[t]dt$為對矩陣$f(t)$中每一元素由0到x積分。因為

$$\int_0^x b[t]dt = \int_0^x P[t]b[0]dt = \int_0^x P[t]dtb[0],$$

在考慮 $B_n(x)$ 的積分之前, 我們仍需要一些前置作業。

定義 $L[x] = \int_0^x P[t]dt$。由定理1,

$$L[x] = \int_0^x P[t]dt = \int_0^x e^{tH}dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(tH)^k}{k!}dt = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{H^k}{(k+1)!}x^{k+1}$$

從而, 可以得到 $L[x]$ 的所有元素

$$(L[x])_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i-j+1}\binom{i}{j}x^{i-j+1} & \text{當 } i \geq j \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

註: $L[0] = 0$, $L[1]$ 即為 Aceto 與 Trigiante [1] 中使用的 L, 後面的討論我們也沿用 $L[1] = L$。

下面將介紹一些與 $L[x]$ 有關的性質。令 $D(t) = diag(1, t, t^2, \ldots, t^{n-1})$, 定義

$$\widetilde{L}[x] = D(-1)L[x]D(-1)^{-1}。$$

注意到 $\widetilde{L}[x]$ 可改寫為

$$\widetilde{L}[x]=D(-1)L[x]D(-1)^{-1}=D(-1)L[x]D(-1)=D(-1)\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{H^k}{(k+1)!}x^{k+1}\Big)D(-1)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{D(-1)H^kD(-1)}{(k+1)!}x^{k+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-H)^k}{(k+1)!}x^{k+1}。$$

性質 6: 對任意 x 和 y, 我們有下列五個性質

(a) $HL[x]=L[x]H=P[x]-I$,

(b) $-H\widetilde{L}[x]=-\widetilde{L}[x]H=P[-x]-I$,

(c) $L[x]=P[x]\widetilde{L}[x]$,

(d) $L[y]-L[x]=P[x]L[y-x]=L[y-x]P[x]$,

(e) $D(a)L[x]D(\frac{1}{a})=\frac{1}{a}L[ax]$, 其中$a\neq 0$。

證明:

(a) 因為 $L[x]$ 為 H 的多項式, 有 $HL[x]=L[x]H$。

$$\begin{aligned}HL[x]=&H\sum_{k=0}^{n-1}\frac{H^k}{(k+1)!}x^{k+1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{H^{k+1}}{(k+1)!}x^{k+1}\\=&\sum_{k=1}^{n}\frac{H^k}{k!}x^k=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{H^k}{k!}x^k\\=&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{H^k}{k!}x^k-I=P[x]-I。\end{aligned}$$ □

(b) 證明和 (a) 類似, 故省略。

(c) 由 (b), $I-H\widetilde{L}[x]=P[-x]$。等號兩邊同乘 $P[x]$ 得

$$P[x]-P[x]\widetilde{L}[x]H=I,$$

可整理成

$$P[x]\widetilde{L}[x]H=P[x]-I=L[x]H.$$

即

$$(L[x]-P[x]\widetilde{L}[x])H=0。$$

將上式左邊展開可知, $(L[x]-P[x]\widetilde{L}[x])H=0$ 若且為若 $L[x]-P[x]\widetilde{L}[x]=0$, 即 $L[x]=P[x]\widetilde{L}[x]$。 □

(d)

$$\begin{aligned} L[y]-L[x] &= \int_0^y P[t]dt - \int_0^x P[t]dt = \int_x^y P[t]dt \\ &= \int_0^{y-x} P[t+x]dt = P[x]\int_0^{y-x} P[t]dt \\ &= P[x]L[y-x]。 \end{aligned}$$

□

(e)

$$D(a)L[x]D(\frac{1}{a}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(aH)^k}{(k+1)!}x^{k+1} = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{H^k}{(k+1)!}(ax)^{k+1} = \frac{1}{a}L(ax)。$$

□

顯然, 對任意矩陣$M[x]$只要滿足$M[x] = P[x]M[c]$, c爲某常數, 就會有

$$\int_0^x M[t]dt = \int_0^x P[t]dtM[c] = L[x]M[c]。$$

利用這些 $L[x]$ 的性質, 可以推導出一些 Bernoulli 多項式及 Euler 多項式的相關公式。

定理 7: (基底變換) $b[x] = L^{-1}\xi(x)$。

證明: 請參閱 [1]。

對任意向量 $V[x]$ 及正整數 k, 定義其差分爲 $\Delta^{k+1}V[x] = \Delta^k V[x+1] - \Delta^k V[x]$ 及 $\Delta V[x] = V[x+1] - V[x]$。

定理 8: 對任意正整數 n,

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}。$$

其對應的矩陣形式爲

$$\Delta b[x] = H\xi(x)。$$

證明: 利用性質6(a) 及定理7,

$$\begin{aligned} \Delta b[x] &= b[x+1] - b[x] = (P-I)b[x] = HLb[x] \\ &= HLL^{-1}\xi(x) = H\xi(x), \end{aligned}$$

比較等號兩邊向量的元素可得定理8。 □

$B_n(x)$ 的 k 次差分雖然不能求出一般式, 但用歸納法和定理 8 類似的方式, 我們可以得到 k 次差分的矩陣形式。

推論 9:
$$\Delta^k b[x] = H^k L^{k-1}\xi(x)。$$

定理 10:
$$B_n(x) = n\int_0^x B_{n-1}(t)dt + B_n,\ n \geq 1。$$
其對應的矩陣形式爲
$$b[x] = b[0] + H\int_0^x b[t]dt。$$

證明: 由性質6(a)
$$b[x] - b[0] = (P[x]-I)b[0] = HL[x]b[0] = H\int_0^x b[t]dt,$$
比較等號兩邊向量的元素可得
$$B_n(x) - B_n = n\int_0^x B_{n-1}(t)dt,$$
即
$$B_n(x) = n\int_0^x B_{n-1}(t)dt + B_n。$$ □

定理 11:
$$\int_x^{x+1} B_n(t)dt = x^n,\ n \geq 0。$$
其對應的矩陣形式爲
$$\int_x^{x+1} b[t]dt = \xi(x)。$$

證明: 由性質 6(d),
$$\begin{aligned}\int_x^{x+1} b[t]dt &= \int_0^{x+1} b[t]dt - \int_0^x b[t]dt = (L[x+1]-L[x])b[0]\\ &= P[x]L[1]b[0] = LP[x]b[0] = Lb[x]。\end{aligned}$$

由定理7,
$$\int_x^{x+1} b[t]dt = Lb[x] = \xi(x)。$$
從而, $\int_x^{x+1} B_n(t)dt = x^n$。 □

定理 12:
$$\int_x^y B_n(t)dt = \frac{B_{n+1}(y) - B_{n+1}(x)}{n+1},\ n \geq 0。$$

其對應的矩陣形式爲

$$b[y]-b[x]=H\int_x^y b[t]dt。$$

證明:

$$\begin{aligned} b[y]-b[x] &= (P[y]-P[x])b[0]=[(P[y]-I)-(P[x]-I)]b[0] \\ &= (HL[y]-HL[x])b[0]=H(\int_0^y P[t]dt-\int_0^x P[t]dt)b[0] \\ &= H\int_x^y P[t]dtb[0]=H\int_x^y P[t]b[0]dt=H\int_x^y b[t]dt。\end{aligned}$$

比較等號兩邊向量元素得

$$B_n(y)-B_n(x)=n\int_x^y B_{n-1}(t)dt,$$

即是

$$\int_x^y B_n(t)dt=\frac{B_{n+1}(y)-B_{n+1}(x)}{n+1}。$$ □

3. Euler 多項式及 Euler 數

Euler 多項式 $E_i(t)$ 及 Euler 數 E_i 滿足下列兩個關係式

$$E_n(1)+E_n(0)=\begin{cases}2\text{ , 當 } n=0\\ 0\text{ , 其他}\end{cases}$$

$$E_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{n-k}\frac{E_k}{2^k}。$$

Euler 數 E_n 定義爲

$$E_n=2^nE_n(\frac{1}{2}),$$

詳細請參考[7]。

令 $E[x]=(E_0(x),E_1(x),\ldots,E_{n-1}(x))^T$ 及 $E=(E_0,E_1,\ldots,E_{n-1})^T$, 則 E_n 可以表爲矩陣形式

$$E=D(2)E\left[\frac{1}{2}\right]$$

而上面兩關係式的矩陣形式則爲

$$E[1]+E[0]=2\xi(0) \tag{2}$$

$$E[x]=P\left[x-\frac{1}{2}\right]D\left(\frac{1}{2}\right)E$$

於是, 因爲$D(2)^{-1}=D\left(\frac{1}{2}\right)$,

$$E[x]=P\left[x-\frac{1}{2}\right]D\left(\frac{1}{2}\right)E=P[x]P\left[-\frac{1}{2}\right]D\left(\frac{1}{2}\right)。$$

因此, 類似於Bernoulli 多項式, 對任意 x 和 y 有

$$E[x+y]=P[x+y]E[0]=P[x]E[y]。$$

另一方面, 由(2) 得

$$E[x+1]+E[x]=P[x](E[1]+E[0])=2P[x]\xi(0)=2\xi(x), \tag{3}$$

上兩式分別比較等號兩邊的元素可得以下兩個定理

定理 13:

$$E_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k(y)x^{n-k},\ n\geq 0。$$

對應的矩陣形式爲

$$E[x+y]=P[x]E[y]。$$

定理 14:

$$E_n(x+1)+E_n(x)=2x^n,\ n\geq 0。$$

對應的矩陣形式爲

$$E[x+1]+E[x]=2\xi(x)。$$

引理:

$$PD(-1)E[1]=E[1]$$

證明: 注意到 $PD(-1)=D(-1)P[-1]$, 又 $[PD(-1)]^{-1}=D(-1)P[-1]$, 故 $[PD(-1)]^2=I$。從而

$$\begin{aligned}(PD(-1)-I)E[1]&=(PD(-1)-[PD(-1)]^2)E[1]\\&=PD(-1)(I-PD(-1))E[1]。\end{aligned}$$

整理後得$(PD(-1)-I)^2E[1]=0$。則

$$\begin{aligned}0=(PD(-1)-I)^2E[1]&=[(PD(-1))^2-2PD(-1)+I]E[1]\\&=2(I-PD(-1))E[1]。\end{aligned}$$

所以 $(PD(-1)-I)E[1]=0$, 即 $PD(-1)E[1]=E[1]$。 □

定理 15:

$$E_n(1)=(-1)^nE_n(0),\ n\geq 0。$$

其對應的矩陣形式爲

$$E[1]=D(-1)E[0]$$

證明: 由引理,

$$E[0]=P[-1]E[1]=D(-1)PD(-1)E[1]=D(-1)E[1],$$

故 $E[1]=D(-1)^{-1}E[0]=D(-1)E[0]$。 □

註: 由定理15及 (2) 可知, 對所有正偶數n, 皆有$E_n(0)=0$。

定理 16:

$$E_n(1-x)=(-1)^nE_n(x),\ n\geq 0。$$

其對應的矩陣形式爲

$$D(-1)E[x]=E[1-x]$$

證明:

$$\begin{aligned}D(-1)E[x]&=D(-1)P[x]E[0]=P[-x]D(-1)E[0]\\&=P[-x]E[1]\ (\text{由定理15})\\&=E[1-x]\ (\text{由定理13})。\end{aligned}$$

□

定理 17:

$$\int_0^1 E_n(t)dt=\frac{-2E_{n+1}(0)}{n+1},\ n\geq 0。$$

其對應的矩陣形式爲

$$H\int_0^1 E[t]dt=(D(-1)-I)E[0]$$

證明:

$$\begin{aligned}H\int_0^1 E[t]dt&=HLE[0]=(P-I)E[0]\\&=E[1]-E[0]=D(-1)E[0]-E[0]\ (\text{由定理15})\\&=(D(-1)-I)E[0]。\end{aligned}$$

比較等號兩邊向量元素可得, 對任意$n \geq 0$,

$$(n+1)\int_0^1 E_n(t)dt = -2E_{n+1}(0)$$

即

$$\int_0^1 E_n(t)dt = \frac{-2E_{n+1}(0)}{n+1}。 \qquad \square$$

定理 18:

$$\int_x^y E_n(t)dt = \frac{E_{n+1}(y)-E_{n+1}(x)}{n+1},\ n \geq 0。$$

其對應的矩陣形式爲

$$E[y]-E[x] = H\int_x^y E[t]dt。$$

證明: 與定理12類似, 故省略。

4. Bernoulli 多項式及 Euler 多項式的關聯

將 (3) 式整理爲

$$E[x] = 2(P+I)^{-1}\xi(x), \tag{4}$$

又由定理 7, 有

$$b[x] = L^{-1}\xi(x)。$$

利用這兩個式子, 我們可以將Bernoulli 多項式和 Euler 多項式連繫在一起。因爲 [1]

$$L^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{B_k}{k!}H^k,$$

比較等號兩邊的元素可以得到

$$(L^{-1})_{ij} = \begin{cases} B_{i-j}\binom{i}{j}, & \text{當 } n-1 \geq i \geq j \geq 0 \\ 0 & \text{, 其他。} \end{cases} \tag{5}$$

定理 19:

$$B_n(x) = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}E_k(2x),\ n \geq 0。$$

其對應的矩陣形式爲

$$D(2)b[x] = L^{-1}E[2x]。$$

證明: 注意到$D(2)P[x]=P[2x]D(2)$, 從而

$$\begin{aligned}D(2)b[x]&=D(2)P[x]b[0]=P[2x]D(2)b[0]\\&=P[2x]D(2)L^{-1}\xi(0)=P[2x]\left(LD\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-1}\xi(0)。\end{aligned}$$

由性質6(e), $LD\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}D\left(\frac{1}{2}\right)L[2]$。
故

$$\begin{aligned}D(2)b[x]&=P[2x]\left(LD\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-1}\xi(0)=P[2x]\left(\frac{1}{2}D\left(\frac{1}{2}\right)L[2]\right)^{-1}\xi(0)\\&=2P[2x]L[2]^{-1}D(2)\xi(0)=2P[2x]L[2]^{-1}\xi(0)。\end{aligned}$$

又由性質6(d) 有$L[2]-L=PL$, 可整理爲$L[2]^{-1}=L^{-1}(P+I)^{-1}$。則

$$\begin{aligned}D(2)b[x]&=2P[2x]L[2]^{-1}\xi(0)=2P[2x]L^{-1}(P+I)^{-1}\xi(0)\\&=P[2x]L^{-1}E[0]\ (\text{由}(4))\\&=L^{-1}E[2x]。\end{aligned}$$

利用 (5), 比較等號兩邊向量元素可得定理19。 □

定理 20:

$$E_n(x)=\frac{2^{n+1}}{n+1}\left(B_{n+1}\left(\frac{x+1}{2}\right)-B_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)\right),\ n\geq 0。$$

其對應的矩陣形式爲

$$HE[x]=D(2)\left(b\left[\frac{x+1}{2}\right]-b\left[\frac{x}{2}\right]\right)。$$

證明: 由定理19, 我們有$E[x]=LD(2)b\left[\frac{x}{2}\right]$。從而

$$\begin{aligned}HE[x]&=HLD(2)b\left[\frac{x}{2}\right]=(P-I)D(2)b\left[\frac{x}{2}\right]\\&=PD(2)b\left[\frac{x}{2}\right]-D(2)b\left[\frac{x}{2}\right]\\&=D(2)P\left[\frac{1}{2}\right]b\left[\frac{x}{2}\right]-D(2)b\left[\frac{x}{2}\right]\\&=D(2)\left(b\left[\frac{x+1}{2}\right]-b\left[\frac{x}{2}\right]\right),\end{aligned}$$

比較等號兩邊向量元素可得定理20。 □

以下的推論沒有在參考文獻中出現過。

推論 21:

$$\int_x^{x+\frac{1}{2}} 2^{n+1}B_n(t)dt = E_n(2x),\ n \geq 0。$$

其對應的矩陣形式爲

$$E[2x] = 2D(2)\int_x^{x+\frac{1}{2}} b[t]dt。$$

證明:

$$\begin{aligned}
E[2x] &= LD(2)b[x]\ (\text{由定理19}) = 2D(2)L\left[\frac{1}{2}\right]b[x]\ (\text{由性質6(e)})\\
&= 2D(2)L\left[\frac{1}{2}\right]P[x]b[0] = 2D(2)\left(L\left[x+\frac{1}{2}\right]-L[x]\right)b[0]\ (\text{由性質6(d)})\\
&= 2D(2)\int_x^{x+\frac{1}{2}} P[t]dtb[0] = 2D(2)\int_x^{x+\frac{1}{2}} b[t]dt。 \qquad \square
\end{aligned}$$

註: 推論21也可由定理20及定理12得到。

致謝

感謝中研院數學所暑期離散及組合數學專題計畫的資助, 讓筆者有機會在暑假跟隨美國內華達大學數學系薛昭雄教授做暑期研究, 也由衷感謝薛昭雄教授的指導及不辭辛勞的審稿人, 因爲薛教授的鼓勵和建議及審稿人鉅細靡遺的審稿和建議, 本文才能完稿。

参考文獻

1. L. Aceto, D. Trigiante, *The Matrices of Pascal and other Greats*, Amer. Math. Monthly 108(2001), 232-245.
2. T.M. Apostol, *A Primer on Bernoulli Numbers and Polynomials*, Mathematics Magazine, vol. 81, no.3, June 2008, 178-190.
3. G.S. Call, D.J. Velleman, *Pascal's Matrices*, Amer. Math. Monthly 100(1993) 372-376.
4. G.S Cheon, *A note on the Bernoulli and Euler Polynomials*, Appl. Math. Lett. 16(2003), 365-368.
5. G.S. Cheon, J.S. Kim, *Stirling matrix via Pascal matrix*, Linear Algebra Appl. 329 (2001), 49-59.
6. P. Maltais, T.A. Gulliver, *Pascal Matrices and Stirling Numbers*, Appl. Math. Lett. vol. 11, no.2(1998), 7-11.
7. F.W.J. Oliver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark, *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, (2010).
8. H.M. Srivastava, A. Pintér, *Remarks on Some Relationships Between the Bernoulli and Euler Polynomials*, Appl. Math. Lett. 17(2004), 375-380.

—本文作者爲交通大學應用數學系學生—