數學傳播 37卷1期, pp. 48-59

Lee-Yang 單位圓定理

林開亮

1. 引言

E. T. Bell 的《大數學家》在關於 Newton 的一章 (篇名《在海邊》) 的開頭摘引了 Newton 本人的一句話:

> 我不知道世上的人對我會怎麼看; 但自認爲我不過像一個在海邊玩耍的孩童, 不時爲拾到幾塊異乎尋常地美妙的卵石或貝殼而沾沾自喜, 對於展現在面前的浩瀚的眞理的海洋, 卻全然沒有發現。

本文將介紹李政道、楊振寧在上個世紀 50 年代發現的一顆小珍珠, 這就是統計力學中的的單位圓定理。

2. 物理背景簡介

Newton 力學的出現是物理學史上一座豐碑, 似乎此後的事情只是確定各種物體間的力和所關心的力學系統在某一時刻的狀態, 然後解出由 Newton 定律給出的方程, 物理學家們便可以像法力無邊的巫師一樣精確地預言未來發生的每一件事了。然而實際的情形並沒有那麼樂觀。Newton 力學對天體運動作出了近乎完美的解釋, 並預言了海王星的存在, 不過這些成功的背後都得益於太陽幾乎集太陽系的全部質量於一身的事實, 它是如此的重, 以至於我們可以近似地認爲它是不動的。假如沒有這樣一個重量級的大塊頭, 我們的星系又將如何呢? 我們並不清楚。事實上, 即使只考慮三個天體的相互作用, 一般來說也是非常困難的, 這就是著名的"三體問題"。假如我們要處理的對象的數目是個天文數字, 可以想見, 繼續使用牛頓力學將是多麼不現實的事情。而這樣的問題我們是很容易遇到的。比如, 我們知道二氧化碳分子之間的相互作用, 想預言壓縮一個小容器裏的二氧化碳氣體時氣體的壓力將怎樣變化。如果用牛頓力學的方法, 就要對每個二氧化碳分子列出 Newton 運動方程並求解。假設我們考慮的容器只有 1 毫升, 通常的壓力和溫度下, 大約有 3×10^{19} 個分子, 要解這樣多的二階微分方程是不可想像的事情。事實上, 我們也不需要解給出的所有信息, 因爲我們眞正關心的是這團氣體的整體性質, 例如它的內能, 壓力, 而不是其中某個分子的速度有多大, 向哪個方向跑之類的問題。

統計力學的建立爲這類重要問題的解決提供了可能。解決問題的方法正如它的名字所暗示的那樣, 統計的方法被引入力學之中。我們認爲系統的內能、壓力等物理量是某種統計下的期望值, 而放棄了知道每個分子運動的精確狀態的奢望。這樣的放棄顯然是很明智的, 因爲我們既能夠得到諸如內能、壓力等重要的宏觀物理量, 又不必爲那些細枝末節而耗費大量的時間和精力。[1]

根據統計力學的理論, 對於具有確定的溫度 T、體積 V 和粒子數 N 的系統, 它處於某一狀態 s 的概率正比於 $\exp\left(-\beta E(s)\right)$, 其中 $\beta = \frac{1}{k_B T}$, 而 k_B 是一個物理常數, 稱爲 Boltzmann 常數。設 $E(s)$ 是系統處於狀態 s 時具有的能量, 則系統的配分函數就是對系統所有可能的狀態的求和

$$Z(T, V, N) = \sum_s \exp\left(-\beta E(s)\right) \tag{1}$$

它是 T, V 和 N 的函數。只要知道了配分函數, 就可以通過統計力學的理論計算出內能、壓力等我們關心的熱力學量。

正如我們前面談到的, 系統的粒子數通常是天文數字, 而系統可能的狀態數就更是難以計數了, 因此我們總是期望把配分函數 (1) 的求和精確地或近似的做出, 從而得到一個比較簡單的可操作的形式, 或者得到它的某些重要性質, 後者正是李先生和楊先生的重要貢獻所在。他們討論了 Ising (伊辛) 模型和 lattice gas (格點氣體) 的配分函數的性質, 並揭示了兩者在數學實質上的等價性, 這裏我們將只涉及前者。

爲了使讀者不至於一開始就糾纏於物理學的術語, 我們先打一個比較直觀的比方。考慮一個圍棋的棋盤, 它有 $N = 19 \times 19$ 個交叉點 (會下棋的朋友可能更喜歡稱這些交叉點爲“目”), 用自然數標記爲 $i = 1, 2, \ldots, N$, 它們的集合記作 X。在每個交叉點上放一枚棋子, 或黑或白, 不許空缺, 所形成的圖形簡稱構形, 記作 s。設其中黑子的數目爲 $N_b(s)$, 白子的數目爲 $N_w(s)$。於是, 對每一個構形 s, 按照棋子的顏色不同自然地把集合 X 劃分爲兩個子集 $X_b(s)$ 與 $X_w(s)$, 分別有 $N_b(s), N_w(s)$ 個元素, 顯然有 $N = N_b(s) + N_w(s)$。在每一個構形 s 中, 任意黑白兩子之間用一條線段 $L_{ij}(s)$ 連接, 其中 $i \in X_b(s), j \in X_w(s)$。記 $i, j \in X$ 之間的長度爲 l_{ij}, 則構形 s 中所有如此得到的線段的長度之和爲

$$L_s = \sum_{i \in X_b(s)} \sum_{j \in X_w(s)} l_{ij} \tag{2}$$

如果假定所有可能的構形是等概率的, 那麼 L_s 以平均值 L 作爲期望。

下面我們把目光轉向物理世界的 Ising 模型。考慮 N 個位置固定的原子, 每個原子有兩種可能的狀態, 分別稱爲磁矩向上和磁矩向下。(對磁矩不瞭解的朋友不妨把每個原子想像成一塊

[1] 註: 似乎可以大致這麼理解: 我們需要知道的是微分方程的解作某種積分後得到的值, 這樣由微積分的基本定理, 先微分再積分這兩個相互抵消的過程可以用統計的方法綜合。

條形磁鐵, 一種狀態是北極朝上, 另一種是北極朝下。) 這 N 個原子的總體狀態就確定了系統的一個狀態 s。下面計算這 N 個原子構成的系統處於狀態 s 時的能量。與前面的 $X_b(s), X_w(s)$ 類似, 磁矩向上的原子的集合記作 $X_u(s)$, 磁矩向下的原子的 集合記作 $X_d(s)$。由於能量的零點是可以任意選取的, 不妨把磁矩相同的兩個原子之間的勢能取爲零, 而磁矩相反的兩個原子 i, j 之間的勢能記爲 ϵ_{ij}。由於兩個原子只能感受到對方相對於自己的狀態, 交換兩個原子的位置不會改變它們之間的勢能, 所以一個自然的要求是 $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$。此外, 我們還假設原子間的相互作用使他們更傾向於處於磁矩方向相同的狀態 (這正是鐵磁體的情形), 即 $\epsilon_{ij} \geq 0$。於是, 這 N 個原子在狀態 s 的總能量 $E_1(s)$ 就是它們兩兩之間的勢能之和, 即

$$E_1(s) = \sum_{i\in X_b(s)} \sum_{j\in X_w(s)} \epsilon_{ij}$$

當外界加一個磁場 H 時, 不同磁矩的原子也將對總能量產生相反的貢獻, 系統因爲處於磁場中而附加的能量可取爲 $E_2(s) = E_H \cdot (N_d(s) - N_u(s))$, 其中 E_H 是與外加磁場 H 有關的常數, 從而在有磁場時系統在狀態 s 時的總能量爲

$$\begin{aligned} E(s) &= E_2(s) + E_1(s) \\ &= E_H \cdot (N_d(s) - N_u(s)) + \sum_{i\in X_d(s)} \sum_{j\in X_u(s)} \epsilon_{ij} \end{aligned} \tag{3}$$

從而系統的配分函數

$$\begin{aligned} Z &= \sum_s \exp\left(-\beta E(s)\right) \\ &= \sum_s \exp\left(-\beta\left[E_H \cdot (N_d(s) - N_u(s)) + \sum_{i\in X_d(s)} \sum_{j\in X_u(s)} \epsilon_{ij}\right]\right) \\ &= \sum_s \exp\left(-\beta[E_H \cdot (N_d(s) - N_u(s))]\right) \prod_{i\in X_u(s)} \prod_{j\in X_d(s)} \exp\left(-\beta\epsilon_{ij}\right) \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} z &\equiv \exp\left(-2\beta E_H\right) \\ a_{ij} &\equiv \exp\left(-\beta\epsilon_{ij}\right) \\ n &\equiv N_d(s) \end{aligned}$$

並注意到

$$N_d(s) + N_u(s) = N$$

因此有

$$Z = \exp(\beta E_H N) \sum_s \Big(\prod_{i \in X_u(s)} \prod_{j \in X_d(s)} a_{ij} \Big) z^n$$

李政道和楊振寧 [4] 建議, 系統的物理狀態的相變點與解析函數 $\ln Z(z)$ 在正實軸上的奇點相對應, 從而只需知道多項式

$$\mathcal{P}(z) \equiv \sum_{n=0}^{N} P_n z^n \tag{4}$$

在正實軸上的零點, 其中係數

$$P_n \equiv \sum_{s}^{N_d(s)=n} \prod_{i \in X_u(s)} \prod_{j \in X_d(s)} a_{ij} \tag{5}$$

讀者如果注意到多項式 $\mathcal{P}$ 的次數 (即總粒子數 N) 是一個天文數字也許會有些失望, 因爲一個次數如此高的多項式的零點一般來說是要星羅棋布於複平面之上的, 然而彷彿造物主喜歡給我們驚喜一般, 對於 Ising 模型來說, 那些不計其數的零點竟都分布在單位圓周上! 這就是我們下面要討論的李先生與楊先生的美妙發現。

3. 單位圓定理的證明與討論

李政道和楊振寧 [4] 中發現的單位圓定理的數學表述如下。

定理 (Lee-Yang **單位圓定理**): 設 $n \geq 2$, $a_{ij} \in [-1, 1]$, $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ 且滿足 $a_{ij} = a_{ji}$。令 $\Gamma_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, 對任意的子集 $I \subseteq \Gamma_n$, 以 I' 表示它在 Γ_n 中的補集, $|I|$ 表示 I 所含元素的個數。令

$$P_I = \prod_{i \in I} \prod_{j \in I'} a_{ij}$$

對空集 $\emptyset$, 約定 $P_\emptyset = 1$。以 P_I 爲係數構造 z 的多項式

$$\wp_n(z) = \sum_{I \subset \Gamma_n} P_I z^{|I|},$$

則 $\wp_n(z)$ 的零點全部分布在單位圓周 $|z| = 1$ 上。

舉例說明。(由於後面採用的是數學歸納法, 最簡單的例 1 是必須直接考慮的。)

例 1: 對 $n = 2$, $\Gamma_2 = \{1, 2\}$ 有 $2^2 = 4$ 個子集, 分別是 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \Gamma_2$, 與之對應的係數 P_I 分別是 1, a_{12}, a_{21}, 1。於是

$$\wp_2(z) = 1 + a_{12} z + a_{21} z + z^2 = 1 + 2az + z^2$$

其中 $a=a_{12}=a_{21}\in[-1,1]$。由於 $a_{ij}\in[-1,\,1]$, 二次函數 $\wp_2$ 的判別式 $\Delta=4(a^2-1)\le 0$, 從而有一對共軛複根 α_1,α_2, 顯然有 $|\alpha_1|=|\alpha_2|=\sqrt{|\alpha_1\alpha_2|}=\sqrt{1}=1$。

例 2: 對 $n=3$, 不難寫出

$$\wp_3(z)=1+a_{12}a_{13}z+a_{21}a_{23}z+a_{31}a_{32}z+a_{13}a_{23}z^2+a_{21}a_{31}z^2+a_{12}a_{32}z^2+z^3$$

令

$$a=a_{12}=a_{21},\quad b=a_{13}=a_{31},\quad c=a_{23}=a_{32},$$

$$d=a_{12}a_{13}+a_{21}a_{23}+a_{31}a_{32}=ab+ac+bc,$$

則上式可寫成

$$\wp_3(z)=1+dz+dz^2+z^3$$

很明顯, $\wp_3(z)$ 有根 $z_1=-1$, 另兩個根 z_2,z_3 滿足二次方程

$$q(z)=\wp_3(z)/(z+1)=z^2+(d-1)z+1$$

$q(z)$ 的判別式爲 $(d-1)^2-4$。像例 1 一樣, 爲驗證 $q(z)$ 的兩根的模長都等於 1, 只需證 $(d-1)^2-4\le 0$, 即 $-1\le\ d\le 3$。由於 $d=ab+bc+ca$ 關於各個變量 (當其他變量固定時) 分別單調, 所以其最值只可能在定義域 $[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$ 的各個端點 (a,b,c 都取 ± 1) 處取得。簡單的計算表明 -1 和 3 分別是 $d=d(a,b,c)$ 在 $[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$ 的 8 個端點的取值中的最小者和最大者。於是 $-1\le\ d\le 3$。

在上面兩個例子中, 我們對 $n=2,3$ 的情況直接驗證了單位圓定理。但是, 這種樸素的證明方案對高階的多項式 $\wp_n(z)$ 行不通。不過至少有一些一般的觀察。例如, 由於 a_{ij} 關於指標 i,j 對稱, 我們得到 $P_I=P_{I'}$, 從而 $\wp_n$ 是所謂的互反多項式, 即滿足 $z^n\wp_n(z^{-1})=\wp_n(z)$。由此, $\wp_n$ 的零點分布關於單位圓是對稱性的: 若 α 是 $\wp_n$ 的一個零點, 則 α^{-1} 也是。此外, 注意到 $\wp_n$ 的係數爲實數, 所以虛根成對出現。

爲得到關於零點分布的更精確信息, 李政道和楊振寧引入 n 個變量 $z_1,z_2,\ldots,z_n$ 的多項式

$$\mathfrak{P}_n(z_1,z_2,\ldots,z_n)=\sum_{I\subset\Gamma_n}P_I\prod_{i\in I}z_i \tag{$*$}$$

注意到當所有的 $z_1,z_2,\ldots,z_n$ 取同一個 z 時有

$$\mathfrak{P}_n(z,z,\ldots,z)=\wp_n(z) \tag{$\dagger$}$$

正如李政道和楊振寧注意到的, 證明單位圓定理的關鍵是下述引理

引理: 在上述定理的條件下, 進一步假定 $a_{ij}\in(-1,0)\cup(0,1)$。設 $(z_1,\ldots,z_n)$ 滿足 $\mathfrak{P}_n(z_1,z_2,\cdots,z_n)=0$, 則

(i) 若對 $i=1,\ldots,n-1$, $|z_i|\geq 1$, 則 $|z_n|\leq 1$,
(ii) 若對 $i=1,\ldots,n-1$, $|z_i|\leq 1$, 則 $|z_n|\geq 1$.

證明: 對 n 用數學歸納法。

對 $n=2$,

$$\mathfrak{P}_2(z_1,z_2)=1+a_{12}z_1+a_{21}z_2+z_1z_2=1+az_1+az_2+z_1z_2$$

從而 $\mathfrak{P}_2(z_1,z_2)=0$ 即

$$1+az_1+az_2+z_1z_2=0$$

也就是 (注意到 $1+az_1\neq 0$)

$$\frac{1}{z_2}=-\frac{z_1+a}{1+az_1}$$

注意到當 $a\in(-1,1)$ 時, 分式線性變換

$$\varphi(z)=-\frac{z+a}{1+az}$$

作爲單位圓內部的全純自同構保持單位圓的內部和單位圓周, 從而將 $|z|\leq 1$ 映到 $|z|\leq 1$。現在 $|z_1|\leq 1$, 從而

$$\left|\frac{1}{z_2}\right|=\left|-\frac{z_1+a}{1+az_1}\right|=|\varphi(z_1)|\leq 1$$

即 $|z_2|\geq 1$, 從而 (i) 成立, 類似可證 (ii)。

現在假定命題對一切小於 n 的自然數成立。爲證明命題對自然數 n 成立, 首先我們注意到引理的下述特例是容易證明的。

引理的特例: 設 $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ 爲 $\mathfrak{P}_n$ 的零點, 其中 $|\beta_1|=\ldots=|\beta_{n-1}|=1$, 則 $|\beta_n|=1$。

這是 $\mathfrak{P}_n$ 滿足的對稱關係 (因爲 $a_{ij}=a_{ji}$)

$$z_1z_2\cdots z_n\mathfrak{P}_n(z_1^{-1},z_2^{-1},\ldots,z_n^{-1})=\mathfrak{P}_n(z_1,z_2,\ldots,z_n)$$

以及 $\mathfrak{P}_n$ 的係數爲實數的推論。具體說明如下。

現在假定

$$\mathfrak{P}_n(\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},\beta_n)=0 \tag{6}$$

從而

$$\mathfrak{P}_n(\beta_1^{-1},\ldots,\beta_{n-1}^{-1},\beta_n^{-1})=0$$

在上式中取共軛, 得到 (注意到對單位圓上的複數 z, $\overline{z}^{-1}=z$)

$$\mathfrak{P}_n(\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},\overline{\beta_n}^{-1})=0 \tag{7}$$

我們把等式 (6) 與 (7) 解讀成 β_n 與 $\overline{\beta_n}^{-1}$ 同爲關於 z 的一次方程

$$\mathfrak{P}_n(\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},z)=Az+B=0 \tag{8}$$

的零點。於是 $\overline{\beta_n}^{-1}=\beta_n$, 從而 $|\beta_n|=1$。此處我們只需說明, 方程 (8) 中 z 的係數 $A\neq 0$。容易算出這個係數是[2]

$$\begin{aligned} A=&\sum_{I\subset\{1,2,\ldots,n-1\}}\prod_{j\in I'}a_{1j}\prod_{i\in I,j\in I'}a_{ij}\prod_{i\in I}\beta_i\\ =&\sum_{I\subset\{1,2,\ldots,n-1\}}\prod_{j\in I'}\frac{a_{1j}}{\beta_j}\prod_{i\in I,j\in I'}a_{ij}\cdot(\prod_{i\in I}\beta_i\prod_{j\in I'}\beta_j)\\ =&(\prod_{j=1}^{n-1}\beta_j)\,\mathfrak{P}_{n-1}(\frac{a_{1n}}{\beta_1},\frac{a_{2n}}{\beta_2},\ldots,\frac{a_{n-1\,n}}{\beta_{n-1}}) \end{aligned}\tag{9}$$

現在若 $A=0$, 則 $(\frac{a_{1n}}{\beta_1},\frac{a_{2n}}{\beta_2},\frac{a_{n-1\,n}}{\beta_{n-1}})$ 是 $\mathfrak{P}_{n-1}$ 的零點, 這與歸納假設矛盾。因此 $A\neq 0$。於是, 我們證明了引理的特例對自然數 n 成立。

現在我們從這個特例出發, 證明引理對自然數 n 成立。基本的想法是, 將所給定的任意零點 $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ (爲不至於混淆, 我們用符號 α_i 代替引理中的 z_i) 轉化成滿足特例中條件的零點 $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$, 從而得到論證。

我們來證 (i)。於是條件是 $\mathfrak{P}_n(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=0$, 以及 $|\alpha_i|\geq 1$, $i=1,\ldots,n-1$。我們將證明 $|\alpha_n|\leq 1$。用反證法。假定 $|\alpha_n|>1$。首先, 固定 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-2}$, 構造出 β_{n-1},β_n 使得 $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-2},\beta_{n-1},\beta_n)$ 爲 $\mathfrak{P}_n$ 的零點, 且 β_{n-1},β_n 滿足 $|\beta_{n-1}|=1$, $|\beta_n|>1$。我們考察滿足以 z_{n-1},z_n 爲未知量的方程

$$\mathfrak{P}_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-2},z_{n-1},z_n)=Cz_{n-1}z_n+Dz_{n-1}+Ez_n+F=0 \tag{10}$$

的解集

$$\Omega=\{(z_n,z_{n-1})\in\mathbb{C}^2\,|\,\mathfrak{P}_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-2},z_{n-1},z_n)=0\}$$

此處, 按定義, 係數 C,D,E,F 滿足

$$C\alpha_{n-1}+E=A \tag{11}$$

$$D\alpha_{n-1}+F=B \tag{12}$$

其中 A,B 由

$$\mathfrak{P}_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},z)=Az+B \tag{13}$$

[2] 註: 其實 (9),(14) 以及 (16) 是唯一需要技巧的地方, 然而也很簡單。這都來自楊振寧的觀察。

定義, 類似於我們前面對係數 A 的計算, 可以求出 C 爲:

$$
\begin{aligned}
C &= \sum_{I:\{n-1,n\}\subset I\subset\Gamma_n} \prod_{i\in I, j\in I'} a_{ij} \prod_{i\in I-\{n-1,n\}} \alpha_i \\
&= \sum_{I\subset\Gamma_{n-2}} \prod_{i\in I, j\in I'} a_{ij} \prod_{j\in I'} (a_{n-1\,j}\cdot a_{nj}) \prod_{i\in I} \alpha_i \\
&= \sum_{I\subset\Gamma_{n-2}} \prod_{i\in I, j\in I'} a_{ij} \prod_{j\in I'} \frac{a_{n-1\,j}\cdot a_{nj}}{\alpha_j} \prod_{i\in\Gamma_{n-2}} \alpha_i \\
&= \mathfrak{P}_{n-2}(\frac{a_{n-1\,1}\cdot a_{n1}}{\alpha_1}, \ldots, \frac{a_{n-1\,n-2}\cdot a_{n\,n-2}}{\alpha_{n-2}}) \prod_{i=1}^{n-2} \alpha_i
\end{aligned} \tag{14}
$$

現在 $|\frac{a_{n-1\,j}\cdot a_{nj}}{\alpha_j}| < 1$, $j=1,\ldots,n-2$, 由於引理對 $n-2$ 成立, 所以 $C \neq 0$。於是在一般情況下, (6) 的解集 Ω 包含 $\mathbb{C}$ 上分式線性變換

$$
\varphi(z) = -\frac{Ez+F}{Cz+D} \tag{15}
$$

的圖。注意到 $C\alpha_n + D \neq 0$, 因爲它是 $\mathfrak{P}_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-2},z_{n-1},\alpha_n)$ 的 z_{n-1} 項係數, 類似於 A 關於 z_n 所處的地位。從而 $\varphi(\alpha_n) = \alpha_{n-1}$, 這就是說, φ 把單位圓外一點 α_n 映到單位圓外 (包括單位圓周) 一點 α_{n-1}。不妨設 α_{n-1} 在單位圓外。由於單位圓的外部是連通的 (去掉可能的一點之後也是如此), 所以我們只要證明, φ 限制在單位圓外的像必定與單位圓盤 $|z| \leq 1$ 有交點。事實上, 我們將證明 $\varphi(\infty) = -\frac{E}{C}$ 在單位圓的內部, 從而根據 φ 的連續性, 推出必定存在某有限值 $\varphi(z) \approx \varphi(\infty) = -\frac{E}{C}$ 在單位圓內。令 $\gamma = -\frac{E}{C}$, 則由定義關係知

$$
C\gamma + E = 0
$$

注意到

$$
C\gamma + E = \mathfrak{P}_{n-1}(\frac{a_{n1}}{\alpha_1}, \ldots, \frac{a_{n\,n-2}}{\alpha_{n-2}}, \frac{a_{n\,n-1}}{\gamma})(\prod_{i=1}^{n-2}\alpha_i)\gamma \tag{16}
$$

這裏可以不妨假定 $\gamma = -\frac{E}{C} \neq 0$, 否則 $\varphi(\infty) = -\frac{E}{C}$ 已然在單位圓內。注意到 $\frac{a_{n1}}{\alpha_1}, \ldots, \frac{a_{n\,n-2}}{\alpha_{n-2}}$ 的模長都小於 1, 由於引理對自然數 $n-1$ 成立, 所以

$$
\left|\frac{a_{n\,n-1}}{\gamma}\right| \geq 1
$$

從而

$$
|\gamma| \leq |a_{n\,n-1}| < 1.
$$

於是由 φ (限制在單位圓外) 的像集的連通性可知, 存在 β_n, $|\beta_n| > 1$, 使得 $|\varphi(\beta_n)| = 1$, 從而有 $\mathfrak{P}_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-2},\beta_{n-1},\beta_n) = 0$, 此處 $\beta_{n-1} = \varphi(\beta_n)$ 的模長等於 1。

綜上, 我們將給定零點 $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ 中的倒數第二個分量 α_{n-1} 調整爲一個模長爲 1 的 β_{n-1}, 當然 α_n 也有所變動, 但有一點沒有改變: 調整後的 α_n (即 β_n) 仍然在單位圓外。接下來依次調整 $\alpha_{n-2},\ldots,\alpha_1$ 的值, 我們最終可以得到一個零點 $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$, 它滿足 $|\beta_1|=\cdots=|\beta_{n-1}|=1$ 且 $|\beta_n|>1$, 這就與引理的特例矛盾。至此, 引理證畢。

單位圓定理的證明

證明: 如果所有 $a_{ij}\in(-1,0)\cup(0,1)$, 則由引理以及 (†), 定理自動成立。

在一般情形, 我們將利用 Hurwitz 定理 ([1] p178 定理 2, 明確陳述見下一節)。如果某個 $a_{ij}=0$ 或 ±1, 則選取序列 $\{a_{ij}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}\subset(-1,0)\cup(0,1)$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}{a_{ij}}^{(k)}=a_{ij}$。顯然, 每組 ${a_{ij}}^{(k)}$ 給出的 $\wp^{(k)}(z)$ 的係數將收斂於 $\wp(z)$ 的對應係數, 自然就有 $\wp^{(k)}$ 在閉單位圓盤 (從而在開單位圓的每個緊致集) 上一致收斂於 $\wp(z)$。現在 $\wp^{(k)}$ 在單位圓內沒有零點, 由 Hurwitz 定理, $\wp(z)$ 在單位圓內沒有零點, 由 $\wp$ 的零點分布關於單位圓的對稱性, 它在單位圓外也沒有零點。於是, $\wp(z)$ 的零點必然在單位圓周上。

4. 對證明的注記

上述證明除了參考了李政道與楊振寧的原文以外, 還參考了 D. Ruelle [6], 這裏我們對上述證明進一步作出幾點注記。

遵循 [8], 我們稱一個 n 元多項式 $\Phi(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]$ 爲 *Lee-Yang* 多項式, 如果它滿足

(i) 當 $|z_1|<1,\ldots,|z_n|<1$ 時, $\Phi(z_1,\ldots,z_n)\neq0$,
(ii) 當 $|z_1|>1,\ldots,|z_n|>1$ 時, $\Phi(z_1,\ldots,z_n)\neq0$。

注意到這類多項式有一個性質, 如果令

$$P(z)=\Phi(z,\ldots,z)$$

則 $P(z)$ 的零點分布在單位圓周 $|z|=1$ 上。

事實上, Lee-Yang 單位圓定理的證明歸結爲下述

定理: 設 $n\geq2$, 給定 $n(n-1)$ 個實數 $a_{ij},\ i,j=1,\ldots,n,\ i\neq j$, 且滿足

$$a_{ij}=a_{ji}\qquad 且\qquad a_{ij}\in[-1,1]$$

則 n 元多項式

$$\Phi_n(z_1,\ldots,z_n)=\sum_{I\subset[n]}A_IZ^I \tag{17}$$

是 Lee-Yang 多項式。其中

$$A_I=\prod_{i\in I}\prod_{j\in I'}a_{ij},\qquad Z^I=\prod_{i\in I}z_i$$

對空集 $\emptyset$, 約定 $A_\emptyset=Z^\emptyset=1$。

可以發現, 上述證明主要有以下三個要點:

第一, 單位圓內部的全純自同構具有形式[3]

$$z\mapsto\gamma\frac{z-a}{1+\overline{a}z},\quad (\text{其中 } |\gamma|=1,\ |a|<1)$$

有鑒於此, Hinkkanen [2]將上述定理推廣如下。

定理: 設 $n\geq 2$, 給定 $n(n-1)$ 個複數 $a_{ij},\ i,j=1,\ldots,n,\ i\neq j$, 且滿足

$$a_{ij}=\overline{a_{ji}}\qquad \text{且}\qquad |a_{ij}|\leq 1\qquad \forall\ i,j$$

則 (17) 是 Lee-Yang 多項式.

第二, 單位圓內部和外部的連通性以及連續映射保持連通性.

第三, Hurwitz 定理。這個定理斷言:

定理 (Hurwitz): 設區域 Ω 上的解析函數 $f_n(z)$ 處處不爲零, 且假定 $f_n(z)$ 在 Ω 的每一個緊子集上一致收斂到 $f(z)$, 則 $f(z)$ 或者恒等於零, 或者處處不爲零。

5. 歷史評注

楊振寧先生在他的論文選集 [9] 中詳細地評論了他發現單位圓定理的證明的過程 (中譯文取自 [10], 略有改動):

> 證明這個猜想的嘗試, 對我們來說是一場苦戰。我曾在 1969 年 9 月 30 日寫給 M. Kac (當時他正在編纂 George Pólya 的論文集) 的一封信裏述說過這一點, 茲摘引該信如下:
>
> *隨後, 基於耦合強度改變時沒有重根這一點, 我們做了一種物理學家式的"證明"。我們很快就認識到, 這種做法是不正確的, 至少在六個星期的時間裏, 我們都在爲試圖證明這個猜想的徒勞無功而感到沮喪。我記得, 我們查閱了 Hardy 關於不等式的書,[4] 還與 von Neumann 和 Selberg 作了討論。當然, 我還一直與您保持聯繫, 我*

[3]註: 例如, 見 H. Cartan, 《解析函數論初步》p184, 余家榮譯, 高等教育出版社, 2008年。

[4]註: (本文作者注) 這裏楊振寧的回憶可能與事實有點出入, 可能他和李政道查閱的書不是 Hardy-Littlewood-Pólya 的《不等式》, 而應該是 Pólya-Szegö 的《分析中的問題和定理》, 因爲 [5] 第二卷有一章就是討論複平面的幾何與多項式的零點分布, 而 von Neumann 作爲 Pólya 的學生對此肯定是非常熟悉的, 如果李政道和楊振寧考慮的是關於多項式的零點分布的問題, 他應該會建議參考此書。

愉快地記得, 您後來把 Wintner 的工作介紹給我們, 我們在論文中曾對您的幫助致謝。我記得在 12 月初, 您把所有耦合強度都相同這種特殊情形下的證明告知我們。這個證明正是您現在所寫的與 Pólya 的工作相關的那部分。您的證明很巧妙, 但是我們不滿足於這種特殊情形下的結果, 一心想要解決普遍情形下的問題。爾後, 12 月 20 日左右的一個晚上, 我在家裏工作, 忽然領悟到, 如果使 $z_1, z_2, \ldots$ 成爲獨立變量並研究它們相對於單位圓周的運動, 就可以利用歸納法? 通過類似於您所用的那種推理得到完整的證明。一旦有了這個想法, 只消幾分鐘就可以把論證的所有細節寫出來。

第二天早上, 我開車同李政道去弄棵聖誕樹, 在車上我把這個證明告訴了他。稍晚些時候, 我們到了研究所。我記得, 我在黑板上給您講述了這個方法。

這一切我都記得很清楚, 因爲我對這個猜想及其證明感到很得意。雖然說這算不上什麼偉大的貢獻, 但是我滿心歡喜地視之爲一件小小的傑作。

附錄: 另一個證明

D. Ruelle 在美國數學會 1988年的 Gibbs 講座 [7]的附錄中給出了歸功於 Taro Asano 的一個簡單證明, 這個證明固然簡潔, 但似乎過於巧妙了。所以根據楊振寧先生“寧拙勿巧、寧樸勿華”的建議, 我們只把它作爲附錄介紹給讀者。

考慮具有形式 $P_I(z_I)$ 的多項式的集合 $\mathcal{A}$, 其中

(i) I 是一個有限集。
(ii) $z_I=(z_i)_{i\in I}$。
(iii) $P_I(z_I)$ 是 z_I 的複係數線性組合 (換言之, $P_I(z_I)$ 各單項式中各個變量 z_i 的次數爲 1)。
(iv) 如果 $|z_i|<1$, 對 $i\in I$, 則 $P_I(z_I)\neq 0$。

注意到下述事實:

I 對任意的 $a\in[-1, 1]$, 多項式

$$P_{\{1,2\}}(z_1,z_2)=z_1z_2+az_1+az_2+1$$

在 $\mathcal{A}$ 中。(考慮由 $P_{\{1,2\}}(z_1,z_2)=0$ 定義的射影對合 $z_1\mapsto z_2$, 其不動點恰在單位圓周上。)

II 如果 $I\cap J=\emptyset$, 且 $P_I(z_I)$, $P_J(z_J)\in\mathcal{A}$, 則乘積 $P_{I\cup J}(z_{I\cup J})=P_I(z_I)P_J(z_J)\in\mathcal{A}$。

III 設 $I\cap\{\alpha,\beta\}=\emptyset$, 記

$$P_{I\cup\{\alpha,\beta\}}(z_{I\cup\{\alpha,\beta\}})=Az_\alpha z_\beta+Bz_\alpha+Cz_\beta+D,$$

此處 A, B, C, D 是 z_I 的多項式。設 $\gamma \notin I$, 定義 Asano contracted 多項式

$$P_{I\cup\{\gamma\}}(z_{I\cup\{\gamma\}}) = Az_\gamma + D$$

則 $P_{I\cup\{\alpha,\beta\}}(z_{I\cup\{\alpha,\beta\}}) \in \mathcal{A}$ 蘊含 $P_{I\cup\{\gamma\}} \in \mathcal{A}$。(設 $|z_i| < 1$ 對一切 $i \in I$, 則 $Az^2 + (B+C)z + D$ 對 $|z| < 1$ 不取零值。因此它的兩根之積 D/A 滿足 $|D/A| > 1$, 從而 $Az_\gamma + D$ 對 $|z_\gamma| < 1$ 不取零值。)

定理: 設 I 是一個有限集, 取定 $a_{\{i,j\}} \in [-1, 1]$, 對任意的 $\{i, j\} \subset I$, 則多項式

$$\mathfrak{P}_I(z_I) = \sum_{X\subset I} z^X \prod_{i\in X}\prod_{j\notin X} a_{\{i,j\}}$$

(此處 $z^X = \prod_{i\in X} z_i$) 在 $\mathcal{A}$ 中。

證明: 考慮多項式 $z_iz_j + a_{\{i,j\}}(z_i + z_j) + 1$, 由 I, 它們在 $\mathcal{A}$ 中。將這些多項式相繼相乘, 當同一個變量出現兩次時作一次 Asano contraction, 最後我們得到 $\mathfrak{P}_I$。由 II, III 知, 它在 $\mathcal{A}$ 中。證畢。

致謝: 在本文的準備過程中, 筆者曾得到首都師範大學數學科學學院孫宏偉老師的指點和邵紅亮、王麗芳、趙潔同學與清華大學物理系劉雲朋同學的幫助, 特表感謝。

参考資料

1. Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis*,(Third Edition), 北京, 機械工業出版社, 2004。
2. A. Hinkkanen, *Schur product of certain polynomials*, *Contemporary Mathematics* Vol.211 (1997), 285–295.
3. M. Kac, *Comments on Pólya's paper[93]*, in *George Pólya: Collected Papers, Vol. II: Location of Zeros*, Cambridge, The MIT Press, 1974.
4. T. D. Lee and C. N. Yang, *Statistical Theory of Equations of State and Phase transition.II. Lattice Gas and Ising Model*, Phys.Rev.**87**(1952), 410–419.
5. G. Pólya and G. Szegö, *Problems and Theorems in Analysis*, I and II, Springer, 1978.
6. D. Ruelle, *Statistical Mechanics: Rigorous Results*, Benjamin, 1969.
7. D. Ruelle, *Is our Mathematics natural? The case of equilibrium statistical mechanics*, Bull.A.M.S.(New Series)**19**(1988), 259–268.
8. D. Ruelle, *Characterization of Lee-Yang polynomials*, Annals of Mathematics **171**(2010), 589–603.
9. C. N. Yang, *Selected Papers, 1945–1980, with Commentary*, San Francisco: Freeman & Co, 1983.
10. 張奠宙, 《楊振寧文集》, 華東師範大學出版社, 1998年。

—本文作者爲中國首都師範大學數學科學學院研究生—

中研院數學所102年度暑期研習生甄選簡章

資格: 大學部在學學生 (系、所不限), 但具備各課程所要求之預備知識者。

研習日期和地點:

民國102年7月8日至8月16日。每週一至週四上午授課, 下午進行討論、演練或電腦上機等研習活動; 每週五安排客座講員演講或其它活動。

課程:

課程一: 組合數學與圖論專題

指導教授: 薛昭雄 (內華達大學數學系)、張鎮華 (國立臺灣大學數學系)。

預備知識: 微積分、線性代數。

內容綱要: 介紹計數組合 (三週)、圖論特別是圖的著色 (二週) 及代數組合 (一週) 的理論、應用和最近發展, 以綜論 (Survey) 的方式由淺入深, 瞭解其背景與進展。每階段課程介紹後, 有問題探討及參考文獻研讀及指定 project。期末繳交報告。

課程二: 數學、音樂與動畫

指導教授: 李華倫 (中華大學應用統計系)。

預備知識: 微積分。

內容綱要: 運用電腦可以將音樂旋律變成單變數函數, 圖像變成二維函數, 動畫也成爲多變數函數。本課程嘗試應用數學到音樂與動畫, 讓學生發揮想像力實驗各種可能, 每週經由網路展示作品。學員不需任何程式方面經驗, 但要熟悉數學函數觀念、邏輯思考並對製作音樂, 動畫有興趣。

課程三: 數理金融

指導教授: 顏如儀 (辛辛那提大學數學系)、彭栢堅 (靜宜大學財務與計算數學系)、吳慶堂 (國立交通大學應用數學系)、韓傳祥 (國立清華大學計量財務金融學系)。

預備知識: 微積分、線性代數, 機率論 (或數理統計學)。

內容綱要: 介紹現代金融學中所使用之一系列的數學與數量方法, 以瞭解數理金融的背景與進展。課程內容涵蓋了金融風險的機率模型, 衍生性金融商品的定價與避險理論, 量化估計的一些統計與數值計算方法, 以及數理金融的專題研究等。學員們將在此跨領域的教學環境中學習並完成專案計畫 (project)。課程期間將安排金融實務人員的專業講座或金融機構參訪。

甄選方式等其他資訊詳見中研院數學所網頁
http://www.math.sinica.edu.tw