數學傳播 37卷1期, pp. 26-40

金融中波動率的數學問題

韓傳祥

前言: 在金融中波動率 (volatility) 常被用來量化資產的風險程度。歷史波動率 (historical volatility) 是常見的一種度量, 定義爲在一段時間中, 資產價格報酬率序列的標準差。這個度量包含的是過往資料的市場訊息, 因而被視爲落後指標。相對的, 波動率指數 (Volatility Index, VIX) 是一種領先的指標度量, 它所引用的是涵蓋了資產未來風險的選擇權價格的訊息。舉例來說, 每當主要的大盤指數重挫時, 有"恐慌指數"之稱的 VIX 便經常出現在一般的媒體上, 並成爲衡量金融環境惡化程度的溫度計。當市場景氣較好時, VIX 通常維持在較溫和, 例如 10%∼30% 的水準。然而在 2008 下半年爆發的全球性金融危機, VIX 曾高達 80%; 在2011年8月初標準普爾信用評等公司 (Standard & Poor rating company) 調降美國主權評等後, 美國股票市場大跌, 而 VIX 也昇到 50%。這個恐慌指數如何產生? 爲什麼人們會如此廣泛的接受並引用它呢? 我們將在本文探索它的來龍去脈, 包括數理金融的回顧以及與波動率相關的問題。讀者或許會驚訝於該指數的編制竟與數學有如此深遠的關係。

壹、數學與金融

一、布朗運動與隨機微積分

隨機微積分是如何對現代金融市場發揮了關鍵且巨大的影響力? 文獻上可以追溯到關於物理現象 — 布朗運動的歷史背景。1827 年蘇格蘭的植物學家 Robert Brown 觀察到當花粉中的微小粒子懸浮在水面上時, 它們的運動會呈現出十分不規則的軌跡。爲了紀念這個發現, 就將此現象命名爲布朗運動 (Brownian motion)。

法國數學家 Louis Bachelier 在 1900 年所發表的博士論文中, 紀錄了他觀察到在巴黎股市交易所中, 股價的改變會呈現一些類似於布朗運動的不規則現象。此外, 他率先提出了布朗運動的數學模型以描述股價的動態行爲, 並且探討布朗運動的馬可夫性質 (Markov property)

與平賭 (martingale) 等等隨機過程 (stochastic process) 中的重要觀念。

1905 年著名的物理學家 Albert Einstein 推導出了布朗運動所對應的擴散方程式並估計分子的大小。1923 年美國數學家 Norbert Wiener 以嚴謹的數學方法建構出布朗運動, 而爲了紀念這樣的貢獻, 布朗運動亦稱之爲韋納過程 (Wiener process)。1931年俄國數學家 Kolmogorov 探討了更一般的擴散並且連續的馬可夫過程, 接著在 1944 年日本數學家 Kiyoshi Ito 提出了對布朗運動積分的一個定義, 即所謂的隨機積分, 並且利用 Ito's 公式[1] 發展出一套"隨機微積分" (stochastic calculus) 的計算方法, 以便處理一般的隨機微分方程式 (stochastic differential equation)。

根據以上的基礎, 隨機過程的研究便如火如荼的展開。1948 年法國數學家 Paul Levy 推廣了連續過程的布朗運動至有跳躍 (jump) 的 Levy 過程。直至今日, 隨機分析已自成一派, 並與不同的數學學門、自然科學與工程、社會科學等領域交流, 而且在應用層面的接軌上已十分廣泛並持續進行。

二、衍生性金融市場

然而 Bachelier 在 1900 年的博士論文並沒有停留在機率理論的發展階段, 該論文中的第二個部份是關於布朗運動在財務上的應用。同樣令人驚艷的是, 他在沒有後來發展出的隨機微積分的工具下, 居然推導了類似於現代金融最重要的理論結果: Black-Scholes 的選擇權訂價公式。關於 Bachelier 的生平介紹, 請見 Courtault et al. (2000); 而關於 Bachelier 的博士論文原文, 其英文翻譯, 以及對後來的影響等, 請進一步參閱由 Davis and Etheridge (2006) 所合著之 "Louis Bachelier's Theory of Speculation"。請注意該書之副標題 "The Origins of Modern Finance" 標示出 Bachelier 的博士論文對現代金融確實有許多原創性的啓發。

雖說 Bachelier 在機率與金融這兩個領域具有偉大的開創性, 但很可惜的是這些工作在 20 世紀初並沒有被廣泛的認可, 不難由 Levy 當時對 Bachelier 博士論文的一個註記 "Too much on finance!" 可以窺看出。很幸運的是隨著後來金融領域的發展, 才給了 Bachelier 一個正確的歷史定位。1959 年 M. Osborne 首先推薦了使用幾何布朗運動 (geometric Brownian motion) 來做爲具有風險性資產的模型, 例如股價等權益型證券 (equity security) 的價格。1965 年經濟學家 P. Samuelson[2] 推薦了利用隨機微積分的數學方法來研究金融的問題; 他同時也挖掘出 Bachelier 的工作, 並介紹給當時的學界知道。受到這些影響, F. Black 與 M. Scholes 在 1973 年發表了著名的 Black-Scholes 選擇權訂價公式; 同年芝加哥選擇權交易所 (Chicago Board of Options Exchange, CBOE) 成立。在 1997 年 Scholes 與 Merton 共同獲得了諾貝爾經濟學獎, 以表彰他們在選擇權訂價理論上開創性的工作; 而不幸的是, Black

[1]註: 關於 Ito's 公式的發現, 文獻後來指出在二次世界大戰期間的 1940 年, 法國數學家 W. Doeblin 也發展出類似的結果, 不過他在戰時不幸過世, 所以這個結果沒能及時的公諸於世。

[2]註: 1970 諾貝爾經濟學獎得主。

先生已於 1995 年逝世, 否則他也必然是諾貝爾獎的得主。

自 1970 年代以降是衍生性金融商品以及風險管理風起雲湧的世代, 選擇權理論與新金融商品市場共同的快速發展, 也愈來愈深刻的影響著我們的生活。從街井小民的個人投資理財, 保險, 貸款, 退休年金等規劃, 到一個國家的利率, 公債, 巨災保險, 及匯率等財經政策的制定, 甚至於到全球化 CO2 排放等環保議題等等, 無不與衍生性金融市場有關。

三、金融工程

爲了記念 Bachelier 的工作, 成立於 1996 年的 Bachelier Finance Society 是一個集合了從事數理金融相關領域的學者、在業界的實務工作者、以及金融政策的制定者等國際人士的社群。該學會每兩年舉辦 一次世界大會 (World Congress) 以提供一個交流的機會, 來共同分享金融上面臨的問題與數學上可能的解決方案, 金融與數學交融之深可見一斑。

在今日, 一個更廣義的名稱“金融工程”已成爲一個新興的學術領域。根據國際金融工程師協會 (International Association of Financial Engineer, IAFE) 的定義, 金融工程乃意指“運用數學方法以解決金融問題”。它也可被稱爲“數理金融” (mathematical finance)、“金融數學” (financial mathematics) 或者“計算金融” (computational finance); 甚至可以更廣泛的稱爲“計 (數) 量金融” (quantitative finance)。金融工程常使用到的專業範疇包括了機率與統計, 應用數學, 資訊科學, 以及經濟理論等, 當然目標是解決金融上的相關問題。歐美各主要的大學都提供了相關的專業課程, 並與各大金融機構合作教學與實習, 有興趣的的讀者不妨見 IAFE 的網站 http://iafe.org。

貳、選擇權與訂價理論回顧

在金融上, 選擇權是一紙契約預先規範了受益的形式, 使得契約持有人有權利, 但非義務, 在某日得以履行約定並支取所實現的報酬。舉例來說, 一個歐式買權 (European call option) 是一張契約, 它規範了持有人的權利, 但非義務, 是可以在某固定的到期日 T, 以一個預先決定好了的履約價格 K, 來購買一單位的標的資產。假若 S_T 代表標的資產在到期日的價格, 則歐式買權在到期日的價值, 亦稱之爲報酬 (payoff), 就是 $h(S_T)=(S_T-K)^+$, 其中的報酬函數定義爲 $h(x)=(x-K)^+=\max(x-K,0)$。這是由於契約持有人被允許在到期日以較低的履約價 K, 來交換較高價的資產 S_T, 並立刻在市場上賣出該資產, 以獲得 S_T-K 的利潤。當 S_T 不大於 K 時, 契約持有人沒有義務要履約並承擔損失, 因此下方 (或損失) 風險得以控制且報酬爲 0。

歐式賣權 (European put option) 與買權相仿, 它規範了契約持有人有權利, 但非義務, 可以在某固定的到期日 (maturity, expiration date) T, 以一個預先決定好了的履約價格 K,

來賣出一單位的標的資產。從數學上來看, 歐式賣權所規範的報酬就是 $h(S_T) = (K - S_T)^+$。

一般而言, 歐式選擇權的定義規範了對標的資產 S 在某一到期日 T 的報酬爲 $h(S_T)$, 其中報酬函數 $h(x)$ 是非負的。對買權來說, $h(x) = (x - K)^+$; 對賣權來說, $h(x) = (K - x)^+$。歐式選擇權是一種路徑獨立 (path-independent) 的契約, 這是由於它的報酬 $h(S_T)$ 僅是到期資產價格 S_T 的函數。若是契約報酬與到期日前的資產價格有關, 則稱爲路徑相依 (path-dependent) 的選擇權, 例如美式選擇權 (American option), 亞式選擇權 (Asian option), 以及許多其它被統稱爲新奇選擇權 (exotic option) 的契約。

期貨 (futures) 或是遠期契約 (forward contracts) 可以視爲歐式選擇權的特例, 只不過它們在市場上的交易習慣不同, 其報酬函數皆與最簡單的線性函數 $h(x) = x$ 有關。由於期貨契約淺顯易懂, 期貨市場的出現由來已久。早在 1848年芝加哥期貨交易所 (Chicago Board of Trade, CBOT[4]) 就已經成立, CBOT 對標的商品進行了標準化, 並規範投資人在集中市場的交易行爲, 在增加流動性的同時可降低交易雙方的信用風險。另外由於期貨價格的決定具有簡易的理論答案, 大幅擴張了許多非傳統標的資產的期貨市場, 例如商品 (包括黃金等貴重金屬) 期貨、股票期貨、利率期貨, 以及其它並未集中在交易所而統稱爲店頭市場 (over the counter, OTC) 等期貨交易。關於從線性契約如期貨到非線性契約如選擇權, 若以 1848年成立的 CBOT 與 1973年成立的 CBOE 作爲兩個標竿, 這段發展足足花費了一又四分之一個世紀。

一、Black-Scholes 訂價理論回顧

在選擇權到期之前, 該契約是有價值的; 也就是說, 投資人若欲擁有選擇權在未來的實現報酬, 則必須先付上代價, 這就引入了選擇權的 "訂 (評) 價問題"。由於在早期數學傳播的文章中已經介紹過相關財務數學的主題, 見陳宏與郭震坤 (2001a, b), 以下僅回顧 Black-Scholes 對於歐式選擇權訂價理論的主要結果。

考慮一個歐式選擇權的報酬 (payoff) 爲 $h(S_T)$, 其中資產價格 S_t, 譬如股價, 是由一個幾何布朗運動在歷史機率空間 (Ω, F, F_t, P) 所定義:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \qquad S_0 = x \tag{1}$$

其中模型參數 μ 表示成長 (或報酬) 率, σ 稱爲波動率, 用來描述"噪音" W_t 的大小; 而這裡的噪音由布朗運動 W_t (見李育嘉 (1985)) 來描述。假設無風險的年利率記爲 r, 利用股票與無風險債券以自我融資 (self financing) 形成一個投資組合, 並在無套利 (no arbitrage) 的條件下複製出該選擇權的履約報酬, 則在任一到期日前的某時間 t 以及當時的股票價格 $S_t = x$, 選擇權的價格函數 $P(t, x)$ 會滿足 Black-Scholes 偏微分方程式 (partial differential equation,

[4]註: 已於 2007 年併入芝加哥交易所集團 (CME groups, Inc.), 該集團主要交易期貨與選擇權契約, 商品面包括了農畜、利率、能源、天氣、股票指數、外匯及金屬等等。

PDE), 定義如下:

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t,x)+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,x)+rx\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)-rP(t,x)=0 \tag{2}$$

而期末條件 (terminal condition) 爲 $P(T,x)=h(x)$。此方程是一個線性貳階拋物型的 PDE, 其中變數 t 與 x 的定義域爲 $[0,T)\times(0,\infty)$, 至於 Black-Scholes PDE 的解, 可由偏微分方程的理論方法或透過一些數値方法, 如有限差分法, 來計算得出。

觀察到模型 (1) 中所假設的標的資產成長率 μ 並沒有出現在 Black-Scholes PDE 中, 這是 Black-Sholes 訂價理論中一個令人訝異的結果。它闡述了即使兩個交易人員對市場中某風險性資產的成長率縱使有不同的看法, 但這並不會影響到他們對選擇權的訂價方式。此結論與另外一種風險中立的訂價理論完全相符, 該理論的回顧如下。

在與原來機率測度 P 等同的 (equivalent) 風險中立 (risk-neutral) 機率測度 P^* 之下, 選擇權價格可以被定義爲折現後報酬 (discounted payoff) 的條件期望 (conditional expectation)。數學上的表示就是, 在風險中立機率空間 (Ω,F,F_t,P^*) 下, 具有報酬 $h(S_T)$ 的選擇權價格函數 $P(t,x)$ 滿足

$$P(t,x)=E^*[e^{-r(T-t)}H(S_T)\mid S_t=x] \tag{3}$$

並且股價的動態行爲改變爲

$$dS_t=rS_tdt+\sigma S_tdW_t^* \tag{4}$$

其中 W_t^* 是定義在風險中立的機率測度 P^* 下的布朗運動。

讀者必然會好奇: 原來股價 S 是定義在歷史機率測度 P 之下, 爲何當要評價選擇權價格時, S 反而要被定義在風險中立機率測度 P^* 之下? 數學上的理由牽涉到了平賭 (martingale) 性質, 以及機率測度間轉換的性質, 在此不須詳述。不過金融上的理由較容易接受, 看法是選擇權乃與未來的風險有關, 投資人需要在每單位時間, 爲每單位風險所承受的超額報酬 $(\mu-r)/\sigma$ (稱爲“市場風險價格”(market price of risk) 或“風險溢酬”(risk premium)) 支付代價, 使得 $W_t^*=W_t+((\mu-r)/\sigma)t$, 這個轉換恰好使得股價 S 的動態行爲從式 (1) 改變到式 (4), 這是一個見證金融與數學相符的例子。

注意到在歷史機率測度 P 下, S_t 的成長率爲 μ, 見式 (1); 而在風險中立機率測度 P^* 下就變成無風險利率 r, 見式 (4)。也就是說在風險中立的環境下, 模型的參數中不再有 μ 這個“主觀”的成長率了。這個事實已經反應在 Black-Scholes PDE 中, 現在利用機率表現的風險中立評價法, 如式 (3) 所述, 更可以明白的看出來。

關於式 (2) 及 (3) 都是用來定義或是描述選擇權的價格函數 $P(t,x)$, 那麼 PDE 與機率中的條件期望兩者間是否存在某種等義的關係呢? 答案是肯定的。透過 Feynman[5]-Kac 公式,

[5]註: Richard Feynman, 1965 年諾貝爾物理學獎得主。在早期美國華爾街由於急缺金融工程的人才, 便從物理學界聘請, 再自行加以訓練; 然而可以如此行的原因, 在於物理與金融共同使用了某些數學語言。

我們也能很輕易的利用式 (3) 的條件期望推導出式 (2) 的 Black-Scholes PDE, 反之亦然。

利用風險中立的評價法甚爲一般, 我們可以輕易的評價其它複雜選擇權, 例如美式選擇權或其它新奇選擇權的價格。再者, 使用隨機性 (probabilistic) 的蒙地卡羅模擬法 (Monte Carlo simulation method) 成爲一個很自然的辦法來估計式 (3) 選擇權的價格, 而不必然要使用決定性 (deterministic) 數值 PDE 的方法。這也就是說, 可以用蒙地卡羅法來求算 PDE 的數值解。此外, 蒙地卡羅法十分適用於平行運算 (parallel computing)。近十年用來處理個人電腦、工作站或遊戲機上影像運算工作的圖形處理器 (graphics processing unit, GPU) 已經相當普及, 而且 GPU 的設計架構就是平行處理, 因此在今日只要簡單的透過筆記型電腦, 就可以利用蒙地卡羅法執行個人化的超級運算 (personal super computing), 大幅增加了隨機計算法的效能與實用性。本段所述都是學習金融工程必須明瞭的內容, 由於已經超過本文範圍甚遠, 在此並不加詳述。

二、Black-Scholes 選擇權訂價公式

一個歐式買權的價格存在一個封閉解, 記爲 $C_{BS}(t,x)$, 函數型式如下:

$$C_{BS}(t,x) = xN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(x/K) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \\ N(d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-u^2/2}du. \end{aligned}$$

買權與賣權存在一個有趣的關係稱爲賣權買權的價平關係 (put-call parity)

$$C_{BS}(t,x) - P_{BS}(t,x) = x - Ke^{-r(T-t)}$$

此決定性關係可以很容易地由以下的偏微分方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + rx\frac{\partial}{\partial x} - r\right)(C_{BS}(t,x) - P_{BS}(t,x)) = 0$$

配合邊界條件 $h(x) = x - K$ 即可解出 $(C_{BS} - P_{BS})(t,x) = x - Ke^{-r(T-t)}$。

爲了對選擇權進行有效的風險控管, 市場上非常重視選擇權的敏感度 (sensitivity) 分析; 也就是價格對於各樣的變數 (例如時間 t, 標的物價格 x) 與各樣的參數 (例如無風險利率 r, 波動率 σ) 的導數, 並將這些偏微分統稱爲“希臘字母”(Greek letters)。譬如說, $\partial P/\partial t$ 叫做 Θ (Theta), $\partial P/\partial x$ 叫做 Δ (Delta), $\partial^2 P/\partial x^2$ 叫做 Γ (Gamma), $\partial P/\partial r$ 叫做 ρ (Rho), $\partial P/\partial \sigma$ 叫做 v (Vega), 其中有趣的是 Vega 非屬原有的希臘字母。

參、估計波動率的數學問題

以上談及了選擇權理論的由來以及主要的結果, 現在我們要轉個彎, 問問自己市場上選擇權的報價是否與 Black-Scholes 模型相符呢?

注意到在 Black-Scholes 公式當中, 只有一個無法直接觀察的參數, 也就是波動率 σ。由於現貨市場 (例如股票市場) 與選擇權市場 (例如股票選擇權市場) 所提供的資料形態不同, 一般在實務上就有兩種常見的方法可以從市場上估計波動率 σ。

1. 歷史法: 給定現貨市場中標的資產的一組歷史價格序列, 先計算其報酬率, 然後算出標準差, 該量稱之爲“歷史波動率” (historical volatility)。

2. 隱含法: 給定選擇權市場中關於某到期日 T 與某履約價 K 之歐式買權 (或賣權) 的成交價格, 利用 Black-Scholes 的評價公式反推出 σ, 稱作“隱含波動率” (implied volatility), 通常也記做 $\sigma_{imp}(T,K)$。

先討論波動率估計的歷史法, 圖 1 是美國 S&P 500 指數以移動窗口的方法計算 30 天期之歷史波動率。不難觀察出歷史波動率會隨著時間而有所改變, 並非全如 Black-Scholes 模型中所假設之“常數” 波動率。若考慮與時間相依的過程 σ_t, 不論是否爲隨機, σ_t 稱之爲在時間 t 的“瞬時”波動率。假設在成長率 μ 爲 0 的簡化情形下, Black-Scholes 模型爲

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma_t dW_t \tag{6}$$

如何根據觀察到的指數或股價 S_t 進而估計其瞬時波動率 σ_t 呢? 在工程上有所謂的濾波問題 (filtering problem), 其一般的形式如下。在工程實驗中, 所觀察到的訊號 Y_t, 是眞實的訊號 X_t 被以相加的方式滲入雜訊; 也就是說 $Y_t = X_t +$雜訊。如何在給定 Y_t 與在一些關於雜訊的假設下, 估計出最佳的 X_t 呢? 濾波問題有相當古典的結果, 譬如說 Kalman-Bucy 濾波器 (filter)。但注意到在式 (6) 中, 觀察值 dS_t/S_t 乃具有相乘而非相加的結構。讀著或許會考慮將式 (6) 平方後取對數, 這樣做就可將 “相乘”的訊號變爲“相加”的訊號, 不過由於雜訊的結構亦隨之改變, 以至於傳統的濾波技術仍不見得能夠用來解決瞬時波動率的估計問題。關於對 σ_t 的估計方法, 我們會在第肆節介紹完波動率指數 VIX 後的最後一段再回過來敘述。

以上所談的財務模型及選擇權定價理論都是假設時間是連續的情形下, 在文獻上平行發展著另一支著重於離散時間的模型, 且有很成功應用的學術領域是計量經濟學 (Econometrics)。1982 年 Robert Engle 提出了自我迴歸型式的條件變異數不齊一性 (autoregressive conditional heteroscedasticity, ARCH) 模型, 用以描述波動率並非常數的時變 (time-varying) 行爲, 其後產生了許多如廣義 ARCH (Generalized ARCH, GARCH) 等波動率模型, 並成爲分析經濟上時間序列的重要方法。因著 ARCH 模型的開創性工作, Engle 與從事共整合 (con-integration) 的 Clive Granger 共同分享了 2003 年諾貝爾經濟學獎的桂冠。對離散模

型及其統計分析方法有興趣的讀者, 請見 Tsai (2003) 與 Engle (2009) 的專書。以下我們仍然回到連續時間的架構。

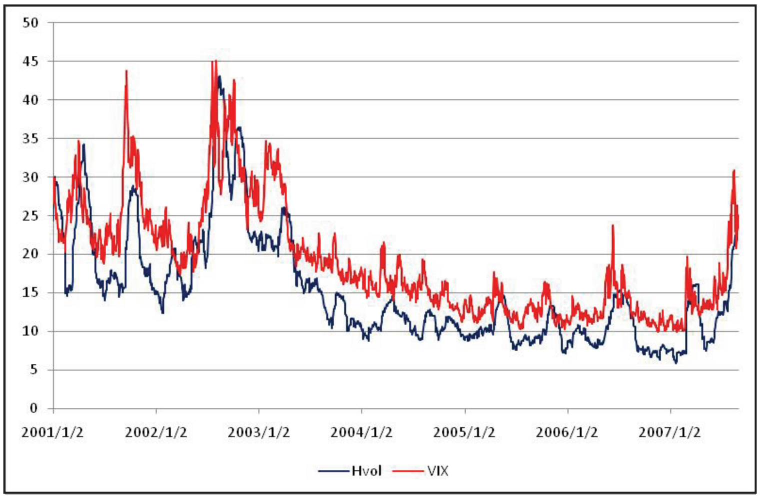


圖 1. 美國30天期歷史波動率 (記爲 Hvol) 與波動率指數 (記爲 VIX) 的比較。

接下來, 我們討論波動率估計的隱含法。回顧隱含波動率的定義是根據 Black-Scholes 之選擇權評價理論, 將選擇權的市場價格帶入評價公式, 所反推出的波動率。由於選擇權的交易是關乎標的物價格在到期日前的不確定性, 因此金融上常將隱含波動率視爲市場參與者對於標的物未來波動情況的預期。

一、微笑曲線

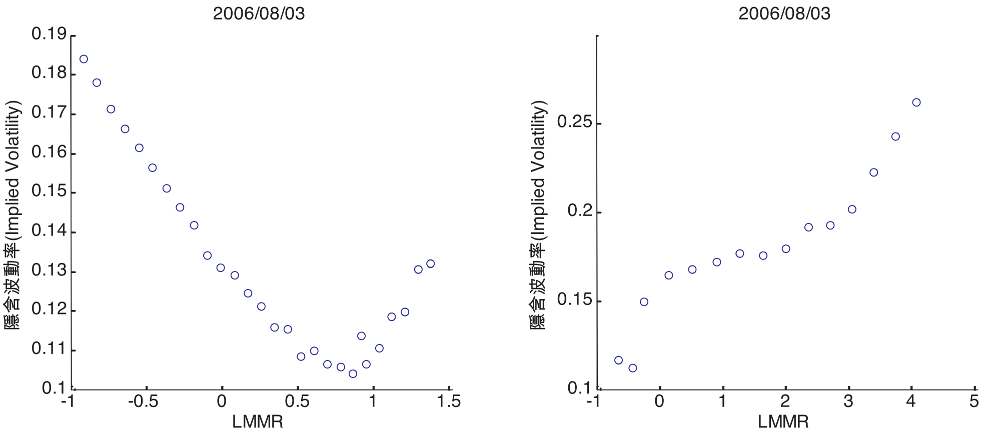
隱含波動率是否唯一呢? 注意到在到期日前給定其它的參數與變數, 歐式買權及賣權的 Vega 值相等且爲正:

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(t,x)=\frac{\partial P_{BS}}{\partial \sigma}(t,x)=Ke^{-r(T-t)}N(d_2)\sqrt{T-t}>0$$

這個性質確保了隱含波動率存在的唯一性。但注意到在任一時刻隱含波動率並不只有一個, 它是與選擇權契約中的到期日 T 及履約價 K 有關的一個函數; 嚴格來說使用 $\sigma_{imp}(T,K)$ 這個符號來表達隱含波動率才是正確的。

在金融市場上, 很多指數選擇權契約都將到期日以及月份固定, 一般來說是最近連續的3個月份, 接著每個季月 (3、6、9、12月) 的這些月份中第三週的週三或週五是到期日, 通常最遠月的到期日不會超過兩年。在給定不同的到期日 T 及履約價 K 後, 對應的隱含波動率就形成了一個離散曲面, 自然的稱之爲隱含波動率曲面 (Implied Volatility Surface)。這個曲面透露出市場對該資產在未來波動情形的看法, 因此如何解讀這個訊息成爲金融工程中的重要課題。

以下是一個波動率微笑曲線的實例。在一固定的到期日下存在許多履約價, 這些隱含波動率 (Y軸) 與在 X 軸的 LMMR (Log Moneyness to Maturity Ratio; 定義爲 $\ln(K/S_t)/(T-t)$) 往往存在著一些典型的曲線模式, 稱之爲微笑曲線如圖 2所示。若 Black-Scholes 模型中所假設之常數波動率是正確的, 則所有的隱含波動率都應該相等, 此“微笑現象”並不該出現。反之, 金融的文獻上指出, 微笑現象乃普遍存在於衍生性商品市場中, 它已被歸納爲一個典型的金融現象。如同歷史法中的結論, 再一次我們可以確認市場並不贊成波動率應該是常數的。



(a) 美國 S&P500指數選擇權　　　　(b) 台指選擇權

圖2. 隱含波動率與 LMMR 關係圖 (資料日期爲2006/08/03, 選擇權在當月份到期) 。

二、Dupire's 公式: 隱含局部波動曲面 (Implied local volatility surface)

上一節提及如何解讀隱含波動率曲面。關於試圖解決這個問題的先驅者是 Bruno Dupire 。頗令人訝異的是, 他提出了隱含波動率可以完全由 Black-Scholes 訂價 PDE 的“對偶” PDE 來描述

$$C_T(0,T,x,K)=\frac{1}{2}\sigma^2_{imp}(T,K)K^2C_{KK}(0,T,x,K)-rKC_K(0,T,x,K) \tag{7}$$

其中歐式買權價格 $C(0,T,x,K)$ 定義在當下時間 0 時股價爲 x, 且契約到期日爲 T 時履約價爲 K。這個結果說明了, 假設

(1) 波動率是時間以及價格的函數

(2) 市場上對任何到期日 T 與履約價 K 的歐式買權價格都存在交易價格

則對該 (T,K) 所對應之隱含波動率會服從 Dupire's 公式:

$$\sigma^2_{imp}(T,K)=2\frac{C_T(0,T,x,K)+rKC_K(0,T,x,K)}{K^2C_{KK}(0,T,x,K)} \tag{8}$$

由於式 (7) 中對偶 Black-Scholes PDE 的推導需要較深入的機率理論, 在此並不討論其細節。不過它所隱含的啓發如下:

一、Dupire's 公式僅僅假設了波動率在數學上較弱的局部性質, 僅與時間、價格有關, 學理上稱之爲"局部波動率" (local volatility)。注意到這局部波動率不須滿足特定的函數形式, 因此進一步具有免模型 (model free) 的特殊性質。Dupire's 公式呈現出某種數學的美, 它在較弱的條件下, 讓市場上選擇權的交易資訊自動的決定出波動率; 而非人爲的先決定波動率的動態模式, 譬如像 Engle 所提出之 ARCH 等關於波動率的參數模型 (parametric model), 再以統計的方法配適出來。

關於在某種程度上免模型的數學結果, 目前大部份是由漸進理論 (asymptotic theory) 所推導出來, 見 Fouque et al. (2011) 及內附文獻, 這樣的好處是具有對降低模型誤差 (model error) 的"強韌性"(robustness)。然而許多工作仍集中在對選擇權市場使用特定模型的最佳配適上, 例如 Heston 的隨機波動 (stochastic volatility) 模型, 這些工作統稱爲模型校準 (model calibration), 見 Gatheral (2006), 而且一般會牽涉到最佳化的問題。

二、Dupire's 公式提供一種對隱含波動曲面的插值 (interpolation) 方式。由於選擇權市場僅提供有限的到期日 T 及有限的履約價 K, 在評價另一組不同 T 與 K 的選擇權價格時, 交易員會需要知道對應的隱含波動率, 以評量出符合市場風險的價格。由式 (8) 可以看出, 若欲得到誤差小的隱含波動率插值, 吾人需要在插值附近存在許多被交易的選擇權價格, 以降低在逼近偏微分時的誤差。這件關乎插值的苦差事, 至少在目前的市場上, 尙無法滿足這樣的資料要求, 縱使以其它例如 Spline 方法進行插值。另外的做法是拉回模型校準, 想法是仍然去配適一個參數模型, 然後以數值方法計算選擇權價格。這仍不失爲一個可行的做法, 只不過要隨時小心模型所可能產生的誤差, 甚至要去規避因誤用波動率模型所可能產生的風險。

肆、VIX: 市場濾波器

上一節提到的 Dupire's 公式以 (偏) 微分方法刻畫了隱含波動率, 雖然市場交易的選擇權價格並沒有多到可支持實際的計算, 不過在觀念上 "免模型"的想法卻爲人珍賞並悄悄植入從事金融工程人士的心中, 而波動率指數 (Volatility Index, VIX) 就是最好的範例。

關於 VIX 的編制也有一段曲折的發展歷程。俗稱投資人恐慌指標 (The investor fear gauge) 的 VIX, 原先在美國芝加哥選擇權交易所 (CBOE) 於1993年1月推出, 以 S&P100 指數之近月份及次月份最接近價平[6] 的買權及賣權共八個序列的選擇權, 對隱含波動率加權平

[6]註: 履約價與標的資產價格相等。

均後所得之指數。2001年推出以 S&P500 指數爲計算基礎之 VIX, 分別計算所有近月份及次月份 S&P500指數選擇權之隱含波動率, 再予以加權平均。注意到這些以隱含波動率的平均方式, 來作爲波動率指數的定義, 純粹是出自計算上的方便, 毫無任何金融意義可言。爾後於2003年更進一步推出, 以 S&P500 指數選擇權價格, 針對其履約價加權平均後所定義出的 VIX。除了它具備金融中變異數交換 (variance swap) 的契約意義, 實用上甚有價值; 此外, VIX 也是“數學正確”, 意指它具有類似前述之 Black-Scholes 訂價理論的支持, 並提供了避險方法。不過, CBOE 仍保留原有以隱含波動率編制指數的方式, 並改稱爲 VXO。以下我們說明 VIX 的定義其金融內涵以及數學表示。

第參節已討論了財金資料中波動率的一些變動行爲, 這些難以臆測的不確定性, 就成了風險管理中的避險課題。金融市場上, 變異數交換 (variance swap) 是一紙契約, 它提供了針對波動率的風險嗜好相反的兩造雙方進行以下的交易活動。事前以一個約定好的“固定”價格 K 去交換到期“浮動”的平均變異數, 而後者在學理上稱之爲實現波動率 (realized volatility)。它的定義是波動率平方在時間 t 及 T 間的平均值, 並且好處是此浮動量完全可由市場的標的價格 S 計算得出, 如下所示:

$$\frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma_s^2 ds = \frac{2}{T-t}\Big[\int_t^T \frac{dS_0}{S_0} - \ln\frac{S_T}{S_t}\Big]$$

上式的證明如下: 假設標的資產的模型服從一個連續的擴散過程 $dS_t/S_t = \mu dt + \sigma_t dW_t$, 注意到價格 S_t 的波動率可以變動並非如 Black-Scholes 模型。將價格取自然對數後得到 $d\ln S_t = (\mu - \sigma_t^2/2)dt + \sigma_t dW_t$, 右項中的 $-\sigma_t^2/2$ 來自於 Ito's 公式的修正項。將兩式相減後取積分便可得證。

變異數交換雖然提供了關乎未來某一段期間平均變異數的風險訊息, 不過由於它的交易通常不是在交易所 (exchange) 進行, 而是在所謂的店頭市場[7] (over the counter, OTC), 一般投資人是無法取得這些重要的交易訊息, 此外交易契約也往往沒有制式化。波動率指數 VIX 的出現完全扭轉了以上的缺點, 我們詳述如下。

首先回顧上面數學結果所表達的金融上的意義: 實現波動率 $\int_t^T \sigma_s^2 ds/(T-t)$ 可以完全用動態買賣股票所累積的價值 $\int_t^T 1/S_s dS_s$, 以及靜態的賣出一個選擇權契約 $\ln(S_T/S_t)$ 的方式加以複製。不過由於此對數契約在市場上並不存在, 這個關係的實用性就下降了。所幸下面的結果進一步提供了對數報酬與期貨、買權與賣權的價平關係, 實現波動率就可由市場所交易的證券進行完美的複製了。

對一固定的履約價 $K>0$, 對任一價格 $x>0$, 我們可得如下等式

$$-\ln\frac{x}{K} + \frac{x}{K} - 1 = \int_K^\infty (x-k)^+\frac{dk}{k^2} + \int_0^K (k-x)^+\frac{dk}{k^2} \tag{9}$$

[6]註: 通常由某證券市場的掮客 (broker) 直接搓和買賣雙方, 因此交易訊息甚少是公開的。

從上述的結果可知, 一個對數契約 (Log contract) 可由一些期貨 (x 項), 買權 ($(x-k)^+$ 項) 及賣權 ($(k-x)^+$ 項) 的投資組合所合成。這裡很有趣的觀察乃是它們的權重, 依序為 $1/K$, $1/k^2$, $1/k^2$。大寫的 K 指的是固定的履約價而小寫的 k 則為一變數。上式的證明如下: 首先觀察到右式等同於 $\int_K^x (x-k)\dfrac{dk}{k^2}$ 若 $x>K$, 或者 $\int_x^K (k-x)\dfrac{dk}{k^2}$ 若 $x<K$, 然後利用部份積分法即可證明出, 在任何一個情形右式都會等於左式。

運用第貳之一節中風險中立的評價法, 將式 (9) 中等式先折現, 後取條件期望便可得

$$E^*\Big[e^{-r(T-t)}\Big(-\ln\frac{S_T}{K}+\frac{S_T}{K}-1\Big)\Big]=\int_K^\infty C(t,S_t;T,k)\frac{dk}{k^2}+\int_0^K P(t,S_t;T,k)\frac{dk}{k^2}$$

其中將左項加以計算

$$\ln\frac{S_T}{K}=\ln\frac{S_T}{S_t}+\ln\frac{S_t}{K}\quad 且\quad \ln\frac{S_T}{S_t}=\Big(r(T-t)-\frac{1}{2}\int_t^T\sigma_s^2ds\Big)+\int_t^T\sigma_s dW_s^*$$

帶回原式後, 移項可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{T-t}E^*\Big[\int_t^T\sigma_s^2ds\Big]=&\frac{2}{T-t}\Big(r(T-t)+\ln\frac{S_t}{K}-\frac{e^{r(T-t)}S_t}{K}+1\\&+\int_K^\infty e^{r(T-t)}C(t,S_t;T,k)\frac{dk}{k^2}+\int_0^K e^{r(T-t)}P(t,S_t;T,k)\frac{dk}{k^2}\end{aligned}$$

在距離到期日 $T-t$ 固定為 30/365 之下, K 選在 S_t 附近時, 上述結果即是 VIX 平方的數學定義。

CBOE 在編製 VIX 時加上一些技術上的修正, 主因是由於並非所有履約價的買賣權價格存在市場上, 以有限的黎曼和來逼近上式的積分是不可避免的。CBOE 使用30個天 (日曆日) 前後兩個到期日的選擇權價格, 進行適當的權重後, 再以內外差分法估算 30 天期的未來實現波動率 (future realized volatility) 的期望值。進一步編製 VIX 的技術細節可見韓傳祥 (2012)。注意到這些定義與波動率的模型完全無關, 並且可被避險複製, 因此具強韌性。另外由於 VIX 可視為未來市場景氣的指標, 在金融實務上善用 VIX 作為歷史資料模擬的情境測試 (scenario test) 與壓力測試 (stress test), 乃不失為一簡便的辦法。

VIX 的成功除了在數學上的正確性之外, 它能夠在金融市場上成為一個領先指標實為關鍵。一般而言, VIX 可反應市場參與者對於標的物未來波動風險的期望。當股價持續重挫時, 因著期望風險高, VIX 會攀升; 反之, 當股市穩定股價持續上漲時, VIX 則會降低。這不難用“肉眼”觀察到圖 3 中 VIX 與其標的 S&P 500 指數的關係, 二者呈現了強烈的負相關, 也就是金融上所謂的槓桿效應 (leverage effect)。事實上, 在樣本期間中 S&P 500 指數與 VIX 的相關係數高達 -0.75。

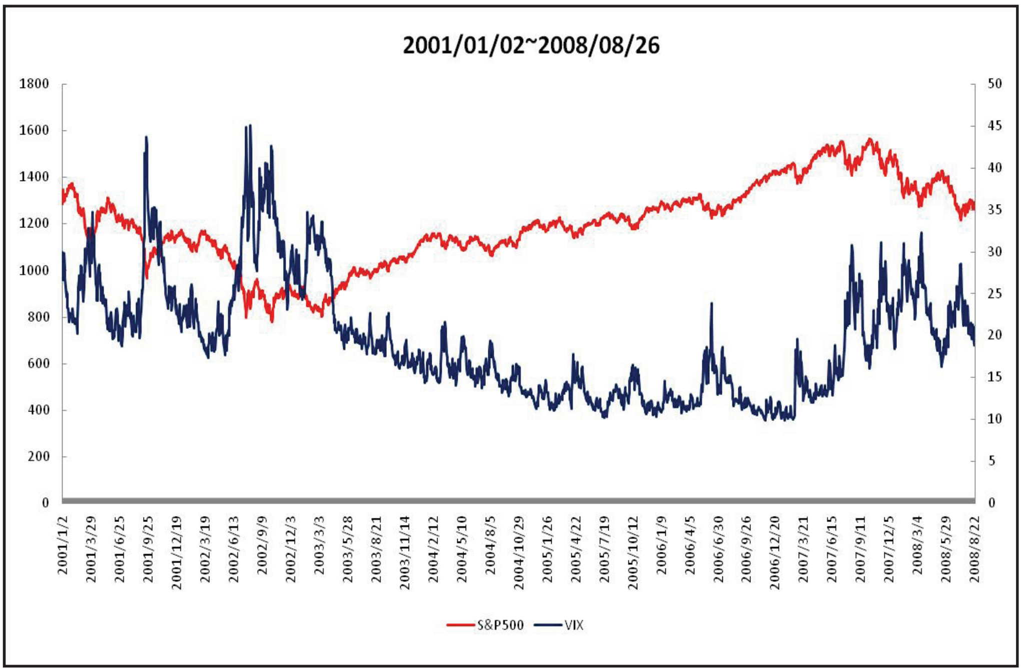


圖 3. 美國 S&P500與波動率指數 (VIX) 的比較。

總之, 與其分析許多不同到期日與履約價的選擇權價格, 現在由單一指數, 也就是 VIX 波動率指數, 可立即、明確的反映出選擇權市場參與者對於大盤後勢波動程度的看法, 這對風險管理當然有重要的影響。

另外從 VIX 的行爲來觀察, 回見圖 1, 可以看出波動率具叢聚效應 (cluster effect), 高波動率之後的波動率通常也是較高的, 反之亦然。將 VIX 與30 天期的歷史波動率相比較, 亦不難看出 VIX 是一個領先的指標。

VIX 自從 2001年的採用了“數學正確”的定義之後, 便不斷受到金融市場與學術研究上的重視。在市場上, 它甚至衍生出次一級的“波動率市場”以供轉嫁波動率之風險。對金融機構投資人, 例如投資銀行, 由於他們在選擇權上的曝險部位需要被控制, 交易波動率成爲一種有效的風險管理的辦法。以 VIX 爲標的物之期貨於2004年3月26日在 CFE (CBOE 的期貨交易所) 開始交易, VIX 選擇權於2006年3月24日在 CFE 開始交易, 三個月期的波動率指數, 代號爲 VXV, 於2007年11月12日 開始公佈, 此外與 VIX 的期限結構等都是有趣的議題, 相關發展可詳見 CBOE 網頁 `www.cboe.com` 上的介紹。學術上也提到, 例如相較歷於史波動率, VIX 擁有較佳的資訊內涵, 且對實現波動率有比較好的預測能力, 不過 VIX 的動態行爲仍呈現相當複雜的模式。見 Jiang and Tian (2005) 及其內附文獻。

關於波動率的估計至今並沒有公認的最佳方法, 然而 VIX 的實用性就像是一個市場上的濾波器, 它不倚賴於任何特別的隨機模型, 自成一個簡易的指標來衡量市場風險。在第貳節選擇

權訂價理論的基礎上, 我們從本節前面的部份已經看到了 VIX 的推導並不困難, 可是它的使用卻如此頻繁, 甚至於出現在一般的報章雜誌上了。

讀者或許會關心臺灣金融市場的發展狀況。與歐美等成熟的市場相較, 臺灣是相當年輕的。台灣證券交易所從1962 年開始營運, 1998年臺灣期貨交易所開始營運, 且在 2001 年 12 月推出「臺指選擇權」。直至今日, 台指選擇權的交易量雖然很大 (單一指數選擇權名列全球第四) , 然而對很多廣大的股票投資人來說選擇權的觀念仍然很陌生。至於臺灣 VIX 的編制雖是參考 CBOE 的方式, 不過它的使用情形爲何呢?

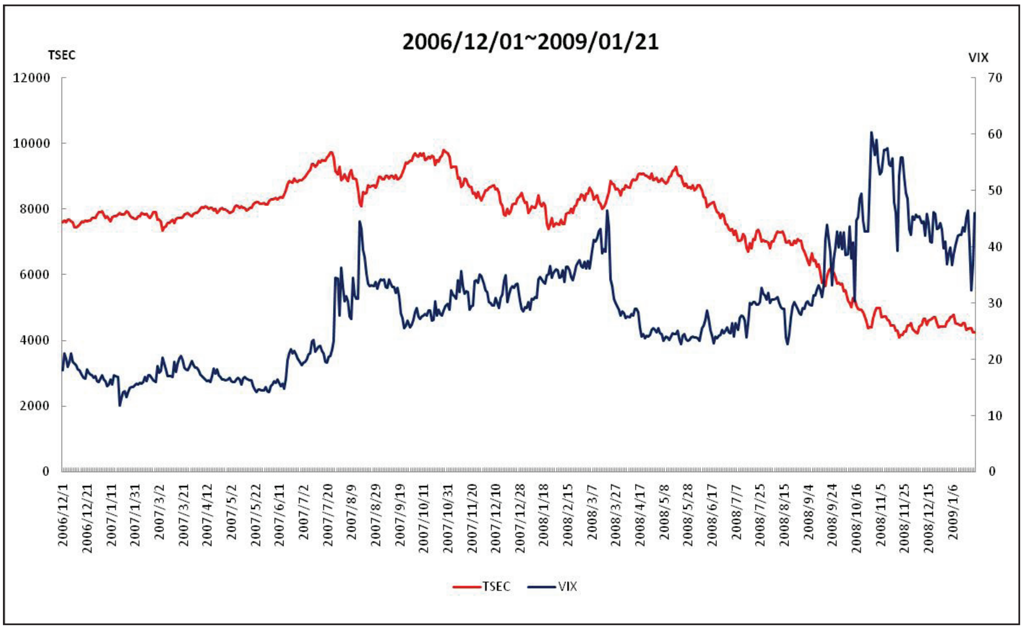


圖 4. 台灣加權股價指數 (TAIEX) 與台指選擇權波動率指數 (VIX)。

我們已經從圖 3 美國 S&P500 與美國 VIX 的關係圖, 清楚看見股價指數與波動率指數間的負向關係。然而在圖 4 中台灣加權股價指數 (TAIEX) 與臺灣 VIX 的關係圖, 資料期間爲 2006/12/01 ∼ 2009/01/21, 觀察到在 2007/08 前, 台指與其 VIX 並沒有很明顯的負向關係。事實上, 在2006/12/01 ∼ 2007/08/07年間, 其相關係數爲正的 0.5462; 而在 2007/08/08 ∼ 2008/12/31年間, 其相關係數才成爲負的 0.7362。關於台指選擇權波動率指數至今仍不普及的原因, 我們則留給讀者進一步思考與探索。

關於估計波動率的方法一直都有進展, 最近的一個免模型法的突破結果是由 Malliavin and Mancino (2009) 所提出來以無母數傅立葉轉換法 (nonparametric Fourier transform method) 來估計瞬時波動率 (instantaneous volatility), 並用來估計與 VIX “對偶”的實現波動率。不過由於這個結果的介紹尚須較深入隨機分析的工具, 本文就在此停住; 然而對有興趣繼續探索波動率這座寶山的讀者, 當然不可向隅, 或可見韓傳祥 (2012)。

伍、結論

本文以現代金融中最重要的 Black-Scholes 選擇權訂價理論爲中心, 向上回顧了金融與機率的交錯發展, 向下談及微笑曲線的解讀與波動率指數的進展等。無疑的, 波動率仍然是金融與數學的一個重要聯索, 其實務應用包括了交易策略與風險管理, 這些關係我們已經在本文許多的例子看出。實則一旦龐大且複雜的金融系統被建立之後, 其衍生出來的法律, 資訊, 管理, 行銷等等領域皆隨之而來, 數理金融巨大的影響力已然呈現在我們面前, 相關數學問題的發現與解決有待更多的投入。

参考資料

1. 陳宏與郭震坤 (2001a). 財務數學 (上), 數學傳播, 26卷 第一期。
2. 陳宏與郭震坤 (2001b). 財務數學 (下), 數學傳播, 26卷 第二期。
3. Courtault, J.-M., Kabanov, Y., Bru, B., Crepel, P., Lebon, I., and Marchand, A. L. (2000). Louis Bachelier: On the Centenary of Theorie de la Speculation, *Mathematical Finance* **10** (3), 341-353.
4. Davis, M. and Etheridge, A. (2006). *Louis Bachelier's Theory of Speculation: The Origins of Modern Finance*, Princeton University Press.
5. Engle, R. (2009). *Anticipating Correlations: A New Paradigm for Risk Management*, Princeton University Press.
6. Fouque, J. P., Papanicolaou, G., Sircar, R. and Solnar, K. (2011). *Multiscale Stochastic Volatility for Equity, Interest Rate, and Credit Derivatives*, Cambridge University Press.
7. Gatheral , J. (2006). *The Volatility Surface*, Wiely.
8. 韓傳祥 (2012). 隨機金融計算, 新陸書局。
9. Heston, S. (1993). A closed-form solution for option with stochastic volatility, with application to bond and currency options, *Review of Financial Studies*, **6**, 327-343.
10. 李育嘉 (1985). 漫談布朗運動, 數學傳播, 9卷 第三期。
11. Jiang, G. J. and Tian, Y. S. (2005). The model—free implied volatility and its information content, *Review of Financial Studies*, **18**, 1305-342.
12. Malliavin, P. and Mancino, M. E. (2009). A Fourier Transform Method for Nonparametric Estimation of Multivariate Volatilities, *The Annals of Statistics*, **37**, 1983-2010.
13. Tsay, R. S. (2005). *Analysis of Financial Time Series*, Second Edition, Wiley-Interscience.

—本文作者任教清華大學計量財務金融學系—