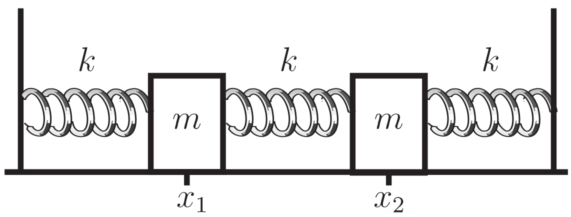
數學傳播 36卷4期, pp. 62-68

與簡單彈簧系統相關的一些數學

楊大緯

前言: 身爲數學系的學生, 大部分數學證明的訓練, 都十分抽象, 我想去尋找一些數學的應用面, 所以就去修物理系的"力學", 其中有一堂課的作業讓我十分感興趣, 是一個有關於兩個和三個彈簧串聯起來的運動方程問題, 解決這份作業的過程讓我發現一些規律, 並且做了一些推廣和其他相關的延伸, 這個過程告訴著我們有趣的發現常常來自不同領域的結合且需要簡單特例的觀察和歸納, 而我在這之中找到了數學的樂趣。

首先我們先從一道物理問題出發, 我們要解一個有兩個方塊串聯的彈簧系統, 舉 2×2 的例子:



其中 x_1 和 x_2 所代表的是方塊離開平衡點的位移

$$mx_1'' = -kx_1 - k(x_1 - x_2) = -2kx_1 + kx_2$$
$$mx_2'' = -k(x_2 - x_1) - kx_2 = kx_1 - 2kx_2.$$

將上面兩個式子整理得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}'' = -\frac{k}{m} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

對 matrix $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 做對角化, 可得 $A = PDP^{-1}$。

將原運動方程式改寫成

$$p^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -3\omega^2 \end{pmatrix} P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ 其中\ \omega^2 = \frac{k}{m},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix},$$

將 p^{-1} 帶入可以整理成

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2)'' &= -\omega^2(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2) \\
(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2)'' &= -3\omega^2(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2),
\end{aligned}$$

然後解常微分方程式得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 &= c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t) \\
\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 &= c_3\cos(\sqrt{3}\omega t) + c_4\sin(\sqrt{3}\omega t)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t) + c_3\cos(\sqrt{3}\omega t) + c_4\sin(\sqrt{3}\omega t) \\
x_2 &= c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t) - c_3\cos(\sqrt{3}\omega t) - c_4\sin(\sqrt{3}\omega t)
\end{aligned}$$

我們想要把結果推廣到 $n \times n$ 的情況, 將計算過程歸納成幾個重要的步驟:

1. 列出 n 條運動方程式。
2. 將 n 條方程式寫成矩陣的形式。
3. 對這個矩陣 A 做對角化, 使它可以寫成 $A = PDP^{-1}$。
4. 將 $X'' = -\omega^2 AX$ 改寫成 $(P^{-1}X)'' = -\omega^2 D(P^{-1}X)$。
5. 將方程組 $(P^{-1}X)'' = -\omega^2 D(P^{-1}X)$ 乘開可以列出 n 條常微分方程。
6. 解完 ODE 之後, 假設 $P^{-1}X = Y$ 則 $X = PY$ 運動方程組的解就全部找到了。

這個矩陣 A 寫出來如下,

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & \ddots & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{n\times n} \quad .(這類型的矩陣通常被叫做帶狀矩陣)$$

如何將 A_n 對角化?

我們先對特徵方程式動一些手脚來簡化計算,

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & \ddots & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}_{n\times n} = 0,$$

令 $2-\lambda = x$ 則在 $n=2,3,4$ 時解得

$n=2,\ x=1,-1$

$n=3,\ x=\sqrt{2},0,-\sqrt{2}$

$n=4,\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2},$

如果我們將這些求得的 x 除以 2 並換成弧度制

$$\begin{aligned} n=2,\ \frac{x}{2} &= \cos(\frac{\pi}{3}),\ \cos(\frac{2\pi}{3}) \\ n=3,\ \frac{x}{2} &= \cos(\frac{\pi}{4}),\ \cos(\frac{2\pi}{4}),\ \cos(\frac{3\pi}{4}) \\ n=4,\ \frac{x}{2} &= \cos(\frac{\pi}{5}),\ \cos(\frac{2\pi}{5}),\ \cos(\frac{3\pi}{5}),\ \cos(\frac{4\pi}{5}), \end{aligned}$$

這下子就一目了然了。

我們猜測: A_n 的特徵值爲

$$2-2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right), 2-2\cos\left(\frac{2\pi}{n+1}\right), \ldots, 2-2\cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right)$$

由前面的計算我們猜測

$$\det\begin{pmatrix} 2\cos\theta & -1 & 0 \\ -1 & \ddots & -1 \\ 0 & -1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}_{n\times n} \quad \text{有 } \sin((n+1)\theta) \text{ 的因子}$$

我們先考慮一個行列式的計算

$$\text{令} \qquad B_n = \begin{pmatrix} a & c & \mathbf{0} \\ b & \ddots & c \\ \mathbf{0} & b & a \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

這個矩陣所對應的行列式值有如下的遞迴關係

$$\det B_n = a\cdot\det B_{n-1} - bc\cdot\det B_{n-2}.$$

設 $\det B_n = p^{n+1}$,

得方程式 $p^2-ap+bc=0$,

解方程式得 $p=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2},\ \dfrac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2}$,

則 $\det B_n=\alpha\Big(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2}\Big)^{n+1}+\beta\Big(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2}\Big)^{n+1}$,

帶入初始值 $\det(B_2)=a^2-bc$, $\det(B_3)=a^3-2abc$

得 $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-4bc}}$, $\beta=\dfrac{-1}{\sqrt{a^2-4bc}}$, 故

$$\det(B_n)=\frac{1}{\sqrt{a^2-4bc}}\Bigg(\Big(\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2}\Big)^{n+1}-\Big(\frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2}\Big)^{n+1}\Bigg). \qquad (*)$$

令 $a=2\cos(\theta)$, $b=c=-1$, 得

$$\begin{vmatrix} 2\cos\theta & -1 & 0 \\ -1 & \ddots & -1 \\ 0 & -1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{n\times n}=\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)},$$

當 $\theta_k=\dfrac{k\pi}{n+1}$, $k=1,2,\ldots,n$, 則

$$\begin{vmatrix} 2\cos\theta_k & -1 & 0 \\ -1 & \ddots & -1 \\ 0 & -1 & 2\cos\theta_k \end{vmatrix}_{n\times n}=0,$$

換句話說,

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ -1 & \ddots & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}_{n\times n}=0 \text{ 的根為 } x_k=2\cos(\frac{k\pi}{n+1}),\ k=1,2,\ldots,n.$$

至此我們就證明了我們的猜測。

再來我們想要找出型如 $\begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & \ddots & c \\ 0 & b & a \end{pmatrix}_{n\times n}$ 的矩陣的特徵值, 而我們將發現這個過程與前面提及的方法如出一轍。首先,

$$\begin{vmatrix} 2\sqrt{bc}\cos\theta & c & \mathbf{0} \\ b & \ddots & c \\ \mathbf{0} & b & 2\sqrt{bc}\cos\theta \end{vmatrix}_{n\times n}=\frac{(bc)^{\frac{n}{2}}\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

這條公式可由令 $a=2\sqrt{bc}\cos(\theta)$ 代入式子 $(*)$ 得到。

因此 $\begin{vmatrix} a & c & \mathbf{0} \\ b & \ddots & c \\ \mathbf{0} & b & a \end{vmatrix}_{n\times n}$ 的特徵根爲 $\lambda_k=a-2\sqrt{bc}\cos(\dfrac{k\pi}{n+1}),\ k=1,2,\ldots,n.$

接下來我們要進行一些跟這個結果相關的延伸, 導出費伯那契數列的另一種表達式。

對於 B_n 當取 $a=1,\ b=1,\ c=-1$

$$\begin{aligned}
\det(B_1) &= =|\ 1\ |=1,\\
\det(B_2) &= =\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2,\\
\det(B_3) &= =\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3,\\
\det(B_4) &= =1\cdot\det(B_3)-(-1)B_2=3+2=5.
\end{aligned}$$

當 $n\geq 3$ 時, 行列式值滿足 $\det(B_{n+1})=\det(B_n)+\det(B_{n-1})$。

將這些行列式值依序列出 $1,2,3,5,8,13,\ldots$。不難發現他就是赫赫有名的費伯那契數列:

$$\begin{aligned}
&F_1=1,\ \ F_2=1,\ \ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n,\\
&F_{n+1}=\det(B_n),\ \ n\geq 1,\\
&\det(B_n)=\prod_{k=1}^{n}\Big(1-2i\cos(\frac{k\pi}{n+1})\Big).
\end{aligned}$$

兩邊取絕對值

$$\begin{aligned}
|\det(B_n)| &= \left|\prod_{k=1}^{n}\Big(1-2i\cos(\frac{k\pi}{n+1})\Big)\right| = \prod_{k=1}^{n}\left|\Big(1-2i\cos(\frac{k\pi}{n+1})\Big)\right|\\
&= \prod_{k=1}^{n}\sqrt{1+4\cos(\frac{k\pi}{n+1})^2}\\
\Rightarrow\ |\det(B_n)| &= \det(B_n)=\prod_{k=1}^{n}\sqrt{1+4\cos(\frac{k\pi}{n+1})^2}.
\end{aligned}$$

因爲 $F_{n+1}=\det(B_n)$, 所以我們就得到了費伯那契數列的另一種表達式

$$F_{n+1}=\prod_{k=1}^{n}\sqrt{1+4\cos(\frac{k\pi}{n+1})^2},$$

原本較常見的版本是

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),$$

應用這兩種不同的表達式可以做如下的積分:

$$\int_0^{\pi} \ln(1+4\cos^2(x))dx = 2\pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

証明:

$$\begin{aligned}
&F_{n+1} = \prod_{k=1}^{n}\sqrt{1+4\cos(\frac{k\pi}{n+1})^2}\\
&\Rightarrow \ln(F_{n+1}) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\sqrt{1+4\cos(\frac{k\pi}{n+1})^2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\ln\left(1+4\cos(\frac{k\pi}{n+1})^2\right)\\
&\Rightarrow \frac{2\pi\ln(F_{n+1})}{n+1} = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+4\cos(\frac{k\pi}{n+1})^2\right)\frac{\pi}{n+1},
\end{aligned}$$

其中左式的極限

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi\ln(F_{n+1})}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\pi\ln\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)\right)}{n+1}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{-\pi\ln(5) + 2\pi\left((n+1)\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \ln\left(1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right)\right)}{n+1}\\
&= 2\pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),
\end{aligned}$$

(右式)

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+4\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)^2\right)\frac{\pi}{n+1}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+4\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)^2\right)\frac{\pi}{n+1}\right)\\
&= \int_0^{\pi}\ln(1+4\cos^2(x))dx \quad \text{(黎曼積分)},
\end{aligned}$$

所以我們得到了

$$\int_0^{\pi} \ln(1+4\cos^2(x))dx = 2\pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

結論

很多發現都需要靠簡單特例的觀察, 以及在不同的領域中找到連結, 我們常常會一直待在自己喜好或擅長的領域, 然後忽視或迴避其他不甚了解的領域, 只因爲害怕挫折和犯錯, 但這裡頭可能埋藏著許多寶藏或是糾纏你已久的難題的鑰匙, 我們應該多多去嘗試, 不要害怕挫折和犯錯。

—本文作者投稿時是國立成功大學數學系學生—

SINICA-NCTS/TPE Mini-Course on Geometry

Nonlinear partial differential equations in conformal and CR geometries

講　　者：Professor Alice Chang 張聖容院士 (Princeton University)

時　　間：10:30 am ∼ 12:00 pm

2013年01月17日 (四) — Conformally compact Einstein Spaces
2013年01月18日 (五) — Renormalized volume

講　　者：Professor Paul Yang 楊建平教授 (Princeton University)

時　　間：10:30 am ∼ 12:00 pm

2013年01月24日 (四) — CR Geometry: Introduction to CR structure, contact structure, and almost complex structure
2013年01月25日 (五) — The P-mean curvature equation
2013年01月31日 (四) — Embedding problem
2013年02月01日 (五) — The CR Yamabe problem

地　　點：台北市大安區羅斯福路四段1號　天文數學館6樓中研院數學所演講廳 (639研討室)

詳見中研院數學所網頁 http://www.math.sinica.edu.tw