數學傳播 36卷4期, pp. 48-61

平面凸五邊形的最大面積與圓內接 $(2n+1)$ 邊形的正弦公式

李輝濱

I. 前言

對平面上的任意凸多邊形作適當的圖形分割, 可以求出此凸多邊形面積的一般公式。分割一個給定的凸多邊形時, 不同的分割方法, 所求得的面積公式也不盡相同; 其最大差異在於所求得的公式中項數的多寡, 而最佳的策略就是要設法尋求出最少項數的面積公式。策略上分割的要領有兩種; 一是將偶數邊數的多邊形分割成兩個有相等邊數的小多邊形, Bretschneider 的四邊形面積公式即能以此分割方法求得。其次是將奇數邊數的多邊形分割成兩個邊數只差一個邊的小多邊形, 凸五邊形的面積平方式公式就是以此分割法求證出的。

求出了一般形的面積公式後, 接著總要問起: 圖形在何種情況下會有最大的面積? 而此最大面積的公式形式又如何? 會簡潔到何種程度? 在探討凸五邊形的最大面積問題時, 發現到圓內接奇數邊形的多邊形有一特殊性質, 此性質是其各頂角與相對應的各邊長相關聯的的一個正弦公式!

三角形的正弦定理公式非常簡潔完美; 其所以如此, 是因每一邊都只面對一個頂角, 而且三角形的三頂點必共圓, 使得每一邊長與對面頂角的正弦值的比值等於共圓圓周的直徑。根據這樣的特徵, 檢視圓內接多邊形的各種情形, 發現圓內接奇數角的多角星形具有這種特徵性質, 連接此多角星形的各頂點即形成一圓內接奇數邊形的多邊形, 此種圓內接奇數邊形的多邊形, 才能有類似三角形那樣美妙的恒等式正弦公式!

II. 本文

首先從圓內接五角星形分析起, 逐次推導到圓內接五邊形的正弦公式, 由此正弦公式才得

以證出平面凸五邊形的最大面積平方式, 最後再推廣到圓內接奇數邊形的多邊形正弦公式。此處奇數角多角星形的各頂角角度總和等於 π。

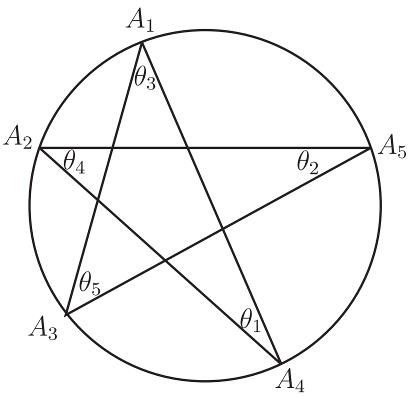

圖 1

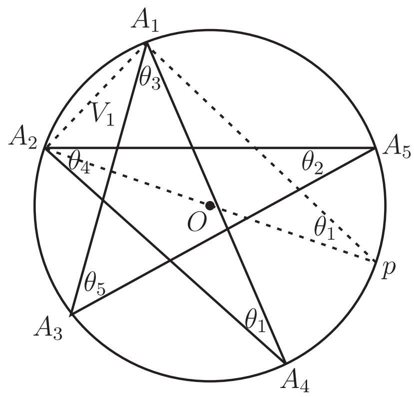

圖 2

A. 圓內接五角星形

在平面上給定一個圓內接五角星形 $A_1A_2A_3A_4A_5$, 並連接五頂點使成五邊形, 令 $\overline{A_1A_2}=V_1$, $\overline{A_2A_3}=V_2$, $\overline{A_3A_4}=V_4$, $\overline{A_4A_5}=V_4$, $\overline{A_5A_1}=V_5$, V_1 的對角爲 θ_1, V_2 的對角爲 θ_2, $\cdots$, V_5 的對角爲 θ_5, 如圖 1、圖 2、圖 3, 令圓的半徑爲 R, 今仿照三角形的正弦定理並由圓周角與弦的性質, 可得

$$\frac{\sin\theta_1}{V_1}=\frac{\sin\theta_2}{V_2}=\frac{\sin\theta_3}{V_3}=\frac{\sin\theta_4}{V_4}=\frac{\sin\theta_5}{V_5}=\frac{1}{2R} \tag{1}$$

而 $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5=\pi$ 方程式 (1) 恰完全符合類似於三角形的正弦定理公式。

B. 圓內接五邊形的正弦公式

1. 圓內接五邊形各頂角與 θ 角的關係

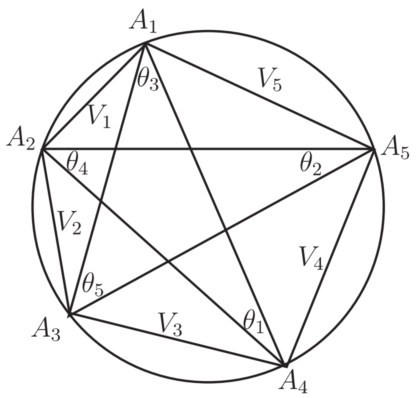

圖 3

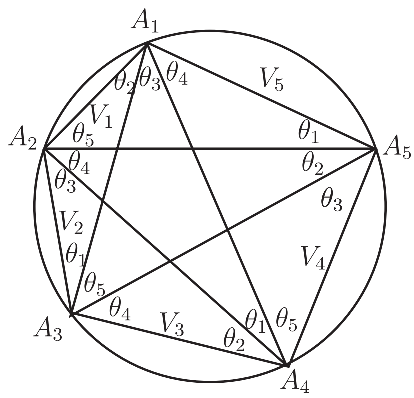

圖 4

如圖 4, 利用圓周角與弦的性質知; 頂角 $A_1 = \theta_2+\theta_3+\theta_4$, $A_2 = \theta_3+\theta_4+\theta_5$, $A_3=\theta_4+\theta_5+\theta_1$, $A_4=\theta_5+\theta_1+\theta_2$, $A_5=\theta_1+\theta_2+\theta_3$, 觀察這五個頂角可得; $A_1+A_4=\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5+\theta_1+\theta_2=\pi+\theta_2$, 同理 $A_2+A_5=\pi+\theta_3$,

$$A_3+A_1=\pi+\theta_4,\quad A_4+A_2=\pi+\theta_5,\quad A_5+A_3=\pi+\theta_1 \tag{2}$$

2. 圓內接五邊形的正弦公式

將 (2) 式的五個 θ 角分別代入方程式 (1) 中, 得

$$\frac{\sin(A_5+A_3)}{V_1}=\frac{\sin(A_1+A_4)}{V_2}=\frac{\sin(A_2+A_5)}{V_3}=\frac{\sin(A_3+A_1)}{V_4}=\frac{\sin(A_4+A_2)}{V_5}=-\frac{1}{2R} \tag{3}$$

再由五邊形的內角和等於 3π, (3) 式又可化成下式

$$\begin{aligned}\frac{\sin(A_4+A_1+A_2)}{V_1}&=\frac{\sin(A_5+A_2+A_3)}{V_2}=\frac{\sin(A_1+A_3+A_4)}{V_3}=\frac{\sin(A_2+A_4+A_5)}{V_4}\\&=\frac{\sin(A_3+A_5+A_1)}{V_5}=-\frac{1}{2R}\end{aligned} \tag{4}$$

此方程式 (3) 與 (4) 即爲圓內接五邊形的正弦公式。

3. 定理1: 設 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 爲平面上的五邊形, 則它是圓內接五邊形的充要條件爲方程式 (3) 與 (4) 必成立。

證明:

(1) 充分條件: 由上述 B 之 1 與 2 的演繹過程, 完成充分條件的證明。

(2) 事實上, 觀察方程式 (3) 與圓內接五邊形的圖形關係, 發現只需三個 相鄰連續邊長與五個頂角恰滿足方程式 (3) 與 (4), 則此五邊形的五個 頂點必共圓。所以必要條件的敍述如下; 必要條件: 若平面上的一個五邊形, 其三個相鄰連續邊長與五個頂角恰滿足方程式 (3) 與 (4), 則此五邊形的五個頂點必共圓。利用反證法 (歸謬法) 來證明此必要條件如下: 假設有一頂點 (設爲 A_2) 不在圓周上, 其可能在圓的內部或外圍; 現在 (a) 先設定 在外圍, 則由圖 5 可得

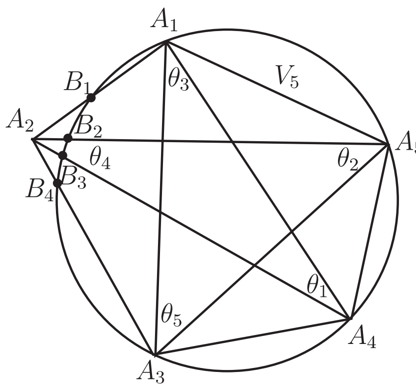

圖 5

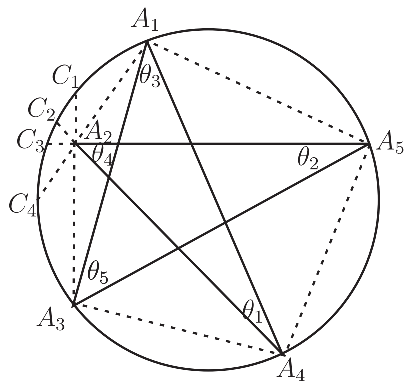

圖 6

$$A_3 + A_1 = \pi + \theta_4 + \frac{1}{2}(\text{弧長}B_1B_4 + \text{弧長}B_2B_3)$$

$$A_4 + A_2 = \pi + \theta_5 - \frac{1}{2}(\text{弧長}B_1B_4), \qquad A_2 + A_5 = \pi + \theta_3 - \frac{1}{2}(\text{弧長}B_1B_4)$$

則

$$\frac{\sin(A_2 + A_5)}{V_3} \neq \frac{\sin(A_3 + A_1)}{V_4} \neq \frac{\sin(A_4 + A_2)}{V_5} \neq -\frac{1}{2R}$$

(b) 其次設定 A_2 在圓周內部, 見圖 6 並仿照步驟 (a) 亦可得出

$$\frac{\sin(A_2 + A_5)}{V_3} \neq \frac{\sin(A_3 + A_1)}{V_4} \neq \frac{\sin(A_4 + A_2)}{V_5} \neq -\frac{1}{2R}$$

由 (a)、(b) 兩情況知, 假設的條件所證出的結果與已知不合, 故假設錯誤, 此頂點應與其餘四頂點共圓。

(c) 同理, 若有兩頂點不在共圓圓周上, 還要能使三個相鄰連續邊長與五個頂角恰滿足方程式 (3) 與 (4) 的情形, 仿照 (a)、(b) 的圖示證明, 可知悉由此假設所證出的結果必與已知矛盾, 假設誠屬錯誤!因此, 此兩頂點應與其餘三頂點共圓。

由上述 (a)、(b)、(c) 的證明, 必要條件成立。

以上綜合 (1) 與 (2) 的敘述推理過程, 完成定理1. 的證明。

C. 平面凸五邊形的最大面積

1. 平面凸五邊形面積平方式的一般公式

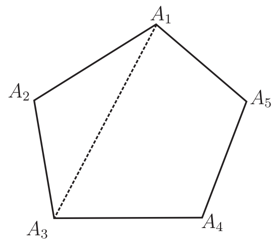

圖 7

在平面上給定一個凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$, 令 $\overline{A_1A_2}=V_1$, $\overline{A_2A_3}=V_2$, $\overline{A_3A_4}=V_3$, $\overline{A_4A_5}=V_4$, $\overline{A_5A_1}=V_5$, 如圖 7, 則利用圖形分割法, 並令凸五邊形面積爲 $S(5)$, 如圖 7 的分割法可得下列兩關係式; (*註1)

$$\begin{aligned}&(V_3^2+V_4^2+V_5^2-V_1^2-V_2^2)/2\\ &\quad=V_3V_4\cos A_4+V_4V_5\cos A_5-V_3V_5\cos(A_4+A_5)-V_1V_2\cos A_2\end{aligned}\tag{5}$$

$$2S(5)=V_3V_4\sin A_4+V_4V_5\sin A_5-V_3V_5\sin(A_4+A_5)+V_1V_2\sin A_2\tag{6}$$

聯立上列 (5)、(6) 兩式的運算, 可得出此平面凸五邊形面積的平方式爲

$$\begin{aligned}[S(5)]^2=&\frac{1}{16}(V_2+V_3+V_4+V_5-V_1)\times(V_3+V_4+V_5+V_1-V_2)\\ &\times[(V_1+V_2)^2-(V_3-V_4)^2-(V_3-V_5)^2-(V_4-V_5)^2+V_3^2+V_4^2+V_5^2]\\ &-V_1V_2V_3V_5\sin^2\Big(\frac{A_2+A_4+A_5}{2}\Big)-V_1V_2V_3V_4\cos^2\Big(\frac{A_2+A_4}{2}\Big)\\ &-V_1V_2V_4V_5\cos^2\Big(\frac{A_2+A_5}{2}\Big)-V_3V_4V_5^2(\cos^2\frac{A_4}{2})-V_3^2V_4V_5(\cos^2\frac{A_5}{2})\\ &-V_3V_4^2V_5\sin^2\Big(\frac{A_4-A_5}{2}\Big)\end{aligned}\tag{7}$$

此方程式 (7) 即爲平面凸五邊形面積平方式的一般公式。

2. 平面凸五邊形出現最大面積的條件

(a) 由方程式 (7) 可知此凸五邊形的最大面積是由三個頂角 A_2、A_4、A_5 的關係來決定, 這三個頂角又被限制在方程式 (5) 中, 故需要用到 Lagrange multiplier method 來求取面積的極値;

$$\text{令 } f=S(5)=\frac{1}{2}\Big[V_3V_4\sin A_4+V_4V_5\sin A_5-V_3V_5\sin(A_4+A_5)+V_1V_2\sin A_2\Big]$$

$$\Phi=V_3V_4\cos A_4+V_4V_5\cos A_5-V_3V_5\cos(A_4+A_5)-V_1V_2\cos A_2$$

$$-\frac{1}{2}(V_3^2+V_4^2+V_5^2-V_1^2-V_2^2)=0$$

取 $F(A_2,A_4,A_5)=f+\lambda\Phi$, λ 爲不等於零的實數。今對 F 作微分運算, 並使微分式爲零, 則

$$\frac{\partial F}{\partial A_2}=\frac{1}{2}V_1V_2\cos A_2+\lambda V_1V_2\sin A_2=0 \;\Rightarrow\; -2\lambda=\frac{\cos A_2}{\sin A_2} \tag{8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_4}=0 \quad\Rightarrow\quad -2\lambda=\frac{V_4\cos A_4-V_5\cos(A_4+A_5)}{-V_4\sin A_4+V_5\sin(A_4+A_5)} \tag{9}$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_5}=0 \quad\Rightarrow\quad -2\lambda=\frac{V_4\cos A_5-V_3\cos(A_4+A_5)}{-V_4\sin A_5+V_3\sin(A_4+A_5)} \tag{10}$$

由 (8) 式與 (9) 式, 得 $\dfrac{\cos A_2}{\sin A_2}=\dfrac{V_4\cos A_4-V_5\cos(A_4+A_5)}{-V_4\sin A_4+V_5\sin(A_4+A_5)}$ 經化簡, 得

$$V_4\sin(A_2+A_4)=V_5\sin(A_2+A_4+A_5) \tag{11}$$

由 (8) 式與 (10) 式, 得 $\dfrac{\cos A_2}{\sin A_2}=\dfrac{V_4\cos A_5-V_3\cos(A_4+A_5)}{-V_4\sin A_5+V_3\sin(A_4+A_5)}$ 經化簡, 得

$$V_4\sin(A_2+A_5)=V_3\sin(A_2+A_4+A_5) \tag{12}$$

由 (9) 式與 (10) 式, 得 $\dfrac{V_4\cos A_4-V_5\cos(A_4+A_5)}{-V_4\sin A_4+V_5\sin(A_4+A_5)}=\dfrac{V_4\cos A_5-V_3\cos(A_4+A_5)}{-V_4\sin A_5+V_3\sin(A_4+A_5)}$
經化簡, 得

$$V_4\sin(A_5-A_4)-V_3\sin A_5+V_5\sin A_4=0 \tag{13}$$

再由 (11)、(12) 式的共同項, 整理成下式;

$$\frac{\sin(A_2+A_5)}{V_3}=\frac{\sin(A_2+A_4+A_5)}{V_4}=\frac{\sin(A_4+A_2)}{V_5} \tag{14}$$

(14) 式又可化成

$$\frac{\sin(A_2+A_5)}{V_3}=\frac{\sin(A_3+A_1)}{V_4}=\frac{\sin(A_4+A_2)}{V_5} \tag{15}$$

得到的 (15) 式 與定理 1 完全符合! 即 平面上一個給定各個邊長的凸五邊形, 其出現最大面積的條件是; 此凸五邊形的五個頂點必須共圓!

註2: 各邊長已給定的平面凸五邊形, 意指此凸五邊形的五個邊長爲已知固定值, 而各邊的順序位置亦是固定, 所以現在對其五個頂點 (角) 做適當的調整配置, 即可得到由此五邊長所圍起的最大面積; 是在於 此凸五邊形的五個頂點必須共圓。

(b) 恆等式 (13) 式表示的幾何意義是; 四個頂點 A_3, A_4, A_5, A_1 必共圓。理由如下;

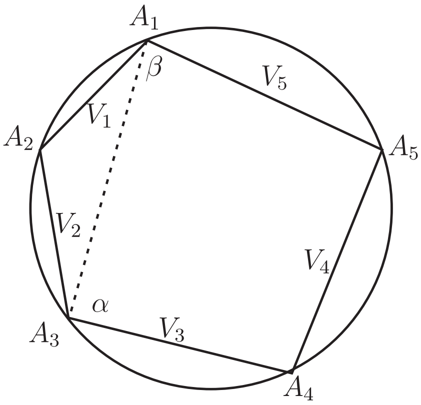

圖 8

見圖 8, 考慮一個圓內接四邊形 $A_3A_4A_5A_1$, 由凸四邊形的邊長型正弦公式 (利用封閉圖形的向量性質), 可得 (*註1) $V_3\sin\alpha - V_4\sin(\alpha + A_4) - V_5\sin\beta = 0$ 將 $\alpha = \pi - A_5$, $\beta = \pi - A_4$, 代入上式, 再化簡, 整理, 即得相同的下式;

$$V_4\sin(A_5 - A_4) - V_3\sin A_5 + V_5\sin A_4 = 0 \tag{13}$$

反之; 若平面凸四邊形 $A_3A_4A_5A_1$, 其邊長與頂角滿足方程式 (13), 則此凸四邊形內接於一圓。這很容易利用歸謬證法, 仿照 B 之 3 的過程證明出來 (證明略)。因此, 恆等式 (13) 式與 (14) 式、(15) 式的關係是契合的, 使五個頂點共圓!

3. 平面凸五邊形的最大面積

各邊長給定之平面凸五邊形的五頂點共圓時, 恆等式 (13) 式與 (14) 式、(15)式必然存在, 此時的凸五邊形其面積為最大值。現在要推導出此最大面積; 回頭察看方程式 (7), 見此方程式中有牽涉到頂角的是後面六個項, 令函數 g 表示此六項的前三項, 函數 h 表示此六項的末三項, 如下;

$$\begin{aligned} g = &-V_1V_2V_3V_5\sin^2\left(\frac{A_2+A_4+A_5}{2}\right) - V_1V_2V_3V_4\cos^2\left(\frac{A_2+A_4}{2}\right) \\ &-V_1V_2V_4V_5\cos^2\left(\frac{A_2+A_5}{2}\right) \\ h = &-V_3V_4V_5^2\left(\cos^2\frac{A_4}{2}\right) - V_3^2V_4V_5\left(\cos^2\frac{A_5}{2}\right) - V_3V_4^2V_5\sin^2\left(\frac{A_4-A_5}{2}\right) \end{aligned}$$

現在分別整理 g, h 兩函數;

$$g = -V_1V_2V_3V_5\cos^2\left(\frac{A_1+A_3}{2}\right) - V_1V_2V_3V_4\cos^2\left(\frac{A_2+A_4}{2}\right)$$

$$-V_1V_2V_4V_5\cos^2\left(\frac{A_2+A_5}{2}\right) \tag{7-1}$$
$$=-V_1V_2V_3V_4V_5\Big[\frac{1}{V_3}\cos^2\left(\frac{A_2+A_5}{2}\right)+\frac{1}{V_4}\cos^2\left(\frac{A_3+A_1}{2}\right)+\frac{1}{V_5}\cos^2\left(\frac{A_4+A_2}{2}\right)\Big]$$

$$\begin{aligned}
h&=-V_3V_4V_5^2\Big(\cos^2\frac{A_4}{2}\Big)-V_3^2V_4V_5\Big(\cos^2\frac{A_5}{2}\Big)-V_3V_4^2V_5\sin^2\left(\frac{A_4-A_5}{2}\right)\\
&=-V_3V_4V_5^2\Big(\frac{1+\cos A_4}{2}\Big)-V_3^2V_4V_5\Big(\frac{1+\cos A_5}{2}\Big)-V_3V_4^2V_5\Big[\frac{1-\cos(A_4-A_5)}{2}\Big]\\
&=-\frac{V_3V_4V_5}{2}(V_3+V_4+V_5)+\frac{V_3V_4V_5}{2}[V_4\cos(A_4-A_5)-V_5\cos A_4-V_3\cos A_5]
\end{aligned} \tag{7-2}$$

接下來又要利用圓內接四邊形的性質, 仿照上述2之 (b) 的結果, 並參照圖 8; 可得

$$\text{直線段 } \overline{A_1A_3}=V_3\cos\alpha-V_4\cos(\alpha+A_4)+V_5\cos\beta$$

將 $\alpha=\pi-A_5$, $\beta=\pi-A_4$, 代入上式, 再化簡, 整理, 即得下式;

$$\overline{A_1A_3}=-V_3\cos A_5+V_4\cos(A_4-A_5)-V_5\cos A_4 \tag{7-3}$$

而圖 8 中三角形 $A_1A_2A_3$ 的直線段

$$\overline{A_1A_3}=V_1\cos(A_1-\beta)+V_2\cos(A_3-\alpha) \tag{7-4}$$

再將 $\alpha=\pi-A_5$, $\beta=\pi-A_4$, 代入上列 (7-4) 式, 即可得

$$\overline{A_1A_3}=-V_1\cos(A_4+A_1)-V_2\cos(A_3+A_5) \tag{7-5}$$

再以倍角公式將 (7-5) 式 化成下式;

$$\begin{aligned}
\overline{A_1A_3}&=-V_1\Big[2\cos^2\left(\frac{A_4+A_1}{2}\right)-1\Big]-V_2\Big[2\cos^2\left(\frac{A_4+A_5}{2}\right)-1\Big]\\
&=V_1+V_2-2V_1\cos^2\left(\frac{A_4+A_1}{2}\right)-2V_2\cos^2\left(\frac{A_3+A_5}{2}\right)
\end{aligned} \tag{7-6}$$

再由 (7-3) 式 與 (7-6) 式 代入 (7-2) 式中, 即得

$$\begin{aligned}
h=&\frac{V_3V_4V_5}{2}(V_1+V_2-V_3-V_4-V_5)\\
&-V_1V_2V_3V_4V_5\Big[\frac{1}{V_2}\cos^2\left(\frac{A_4+A_1}{2}\right)+\frac{1}{V_1}\cos^2\left(\frac{A_3+A_5}{2}\right)\Big]
\end{aligned} \tag{7-7}$$

以上已將 g, h 兩函數整理完成, 最後將 (7-1) 式 與 (7-7) 式 代入 (7) 式中, 即得到盼望已久的平面凸五邊形的最大面積平方式公式, 也是圓內接五邊形的面積平方式公式!現在將它完整的敘述成下列定理2:

定理2: 在平面上給定一個凸五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$, 令 $\overline{A_1A_2}=V_1$, $\overline{A_2A_3}=V_2$, $\overline{A_3A_4}=V_3$, $\overline{A_4A_5}=V_4$, $\overline{A_5A_1}=V_5$, 如圖 7, 則此各邊長已給定的平面凸五邊形的最大面積, 是出現在其五個頂點必須共圓, 而此平面凸五邊形的最大面積平方式公式, 也是圓內接五邊形的面積平方式公式爲下式:

令其最大面積爲 $S(5)\max$,

$$\begin{aligned}[S(5)\max]^2=&\frac{1}{16}(V_2+V_3+V_4+V_5-V_1)\times(V_3+V_4+V_5+V_1-V_2)\\&\times\Big[(V_1+V_2)^2-(V_3-V_4)^2-(V_3-V_5)^2-(V_4-V_5)^2+V_3^2+V_4^2+V_5^2\Big]\\&+\frac{V_3V_4V_5}{2}(V_1+V_2-V_3-V_4-V_5)-V_1V_2V_3V_4V_5\Big[\frac{1}{V_1}\cos^2\Big(\frac{A_3+A_5}{2}\Big)\\&+\frac{1}{V_2}\cos^2\Big(\frac{A_4+A_1}{2}\Big)+\frac{1}{V_3}\cos^2\Big(\frac{A_5+A_2}{2}\Big)+\frac{1}{V_4}\cos^2\Big(\frac{A_1+A_3}{2}\Big)\\&+\frac{1}{V_5}\cos^2\Big(\frac{A_2+A_4}{2}\Big)\Big]\end{aligned}\tag{16}$$

此方程式 (16) 式的完美迷人之處是其涵蓋了 Brahmagupta 的圓內接四邊形面積的平方式公式, 以及三角形的 Heron 面積平方式公式! 情形如下; 見圖 7

(a) 若令頂點 A_5 趨近於 A_1, 使 $V_5=0$, 則圓內接五邊形即退化成圓內接四邊形。因此, 將 $V_5=0$ 代入方程式 (16) 式內, 即可得下式;

$$[S(5)\max]^2=\frac{1}{16}(V_2+V_3+V_4-V_1)(V_3+V_4+V_1-V_2)(V_4+V_1+V_2-V_3)(V_1+V_2+V_3-V_4)\tag{17}$$

此 (17) 式即爲 Brahmagupta 面積平方式公式!

(b) 再令 $V_4=0$, (17) 式就蛻變成 Heron 面積平方式公式!

(16) 式的公式內容確實不精簡, 但其中含有內角的最後五項卻是完全的具規律性! 可見頂點共圓的圖形, 其面積表示式是會具簡潔、規律或對稱性的!

D. 圓內接 $2n+1$ 邊形的正弦公式

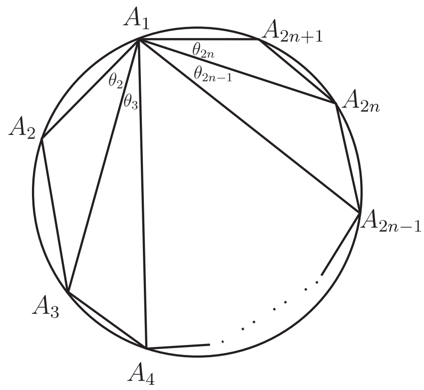

圖 9

圖 9 是一個圓內接 $2n+1$ 邊形, 其中 $\overline{A_1A_2}=V_1$, $\overline{A_2A_3}=V_2$, $\overline{A_3A_4}=V_3$, $\ldots$, $\overline{A_{2n}A_{2n+1}}=V_{2n}$, $\overline{A_{2n+1}A_1}=V_{2n+1}$; V_1 所面對的圓周角爲 θ_1, V_2 所面對的圓周角爲 θ_2, $\ldots$, V_{2n+1} 所面對的圓周角爲 θ_{2n+1}。仿照 B 之 1 並利用圓周角性質知;

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \theta_2+\theta_3+\theta_4+\cdots+\theta_{2n-2}+\theta_{2n-1}+\theta_{2n}\\
A_2 &= \theta_3+\theta_4+\cdots+\theta_{2n-2}+\theta_{2n-1}+\theta_{2n}+\theta_{2n+1}\\
A_3 &= \theta_4+\theta_5+\theta_6+\cdots+\theta_{2n}+\theta_{2n+1}+\theta_1\\
A_4 &= \theta_5+\theta_6+\theta_7+\cdots+\theta_{2n+1}+\theta_1+\theta_2\\
A_5 &= \theta_6+\theta_7+\cdots+\theta_{2n+1}+\theta_1+\theta_2+t_3\\
&\vdots\\
A_{n-1} &= \theta_n+\theta_{n+1}+\cdots+\theta_{2n+1}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n-4}+\theta_{n-3}\\
A_n &= \theta_{n+1}+\theta_{n+2}+\cdots+\theta_{2n+1}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n-3}+\theta_{n-2}\\
A_{n+1} &= \theta_{n+2}\theta_{n+3}+\cdots+\theta_{2n+1}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n-2}+\theta_{n-1}\\
&\vdots\\
A_{2n-4} &= \theta_{2n-3}+\theta_{2n-2}+\cdots+\theta_{2n+1}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{2n-7}+\theta_{2n-6}\\
A_{2n-3} &= \theta_{2n-2}+\cdots+\theta_{2n+1}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{2n-6}+\theta_{2n-5}\\
A_{2n-2} &= \theta_{2n-1}+\cdots+\theta_{2n+1}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{2n-5}+\theta_{2n-4}\\
A_{2n-1} &= \theta_{2n}+\theta_{2n+1}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{2n-4}+\theta_{2n-3}\\
A_{2n} &= \theta_{2n+1}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{2n-3}+\theta_{2n-2}
\end{aligned}
$$

$$A_{2n+1}=\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{2n-2}+\theta_{2n-1}$$

觀察以上 $2n+1$ 個頂角的各個內容, 要組合成像圓內接五邊形的方程式 (2) 之類似型式, 經詳細對照、分析檢驗後, 恰可歸納成下列兩種類型;

1. 圓內接 $2n+1$ 邊形, 當 n 為偶數時, $n+1$ 為奇數:

今從上述 $2n+1$ 個頂角取下 $A_1, A_3, A_5, \ldots, A_{n-1}, A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+4}, A_{n+6}, \ldots, A_{2n}$ 等總數共有 $n+1$ 個頂角。因 $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_{2n-1}+\theta_{2n}+\theta_{2n+1}=\pi$, 再檢視被取下的每個頂角, 發現每個頂角都含有 $2n-1$ 個 θ, 與 π 比較都少了兩個 θ, 缺少的情形如下;

A_1 缺少 $\theta_{2n+1}+\theta_1$, A_3 缺少 $\theta_2+\theta_3$, A_5 缺少 $\theta_4+\theta_5$, $\ldots$,

A_{n-1} 缺少 $\theta_{n-2}+\theta_{n-1}$, A_{n+1} 缺少 $\theta_n+\theta_{n+1}$, A_{n+2} 缺少 $\theta_{n+1}+\theta_{n+2}$,

A_{n+4} 缺少 $\theta_{n+3}+\theta_{n+4}$, $\ldots$, A_{2n-4} 缺少 $\theta_{2n-5}+\theta_{2n-4}$, A_{2n-2} 缺少 $\theta_{2n-3}+\theta_{2n-2}$,

A_{2n} 缺少 $\theta_{2n-1}+\theta_{2n}$, 將這些缺少的 θ 全數加起來, 即爲 $\pi+\theta_{n+1}$,

現在將

$$\begin{aligned}
&A_1+A_3+A_5+\cdots+A_{n-1}+A_{n+1}+A_{n+2}+A_{n+4}+A_{n+6}+\cdots+A_{2n}\\
&\quad=(n+1)\sum_{i=1}^{2n+1}\theta_i-\sum_{i=1}^{2n+1}\theta_i-\theta_{n+1}=n\sum_{i=1}^{2n+1}\theta_i-\theta_{n+1}=n\pi-\theta_{n+1}\\
&\quad=\left[\frac{n}{2}\right]\times 2\pi-\theta_{n+1}=\left[\frac{n}{2}\right]\times 2\pi+(-1)^{n+1}\theta_{n+1} \qquad (18)
\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}
&A_1+A_3+A_5+\cdots+A_{n-1}+A_{n+1}+A_{n+2}+A_{n+4}+A_{n+6}+\cdots+A_{2n}\\
&\quad=\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}A_{2i+1}+\sum_{j=1}^{[\frac{n}{2}]}A_{2n-2(j-1)}=\left[\frac{n}{2}\right]\times 2\pi+(-1)^{n+1}\theta_{n+1} \qquad (19)
\end{aligned}$$

(18) 式、(19) 式中的運算符號 [ ] 爲高斯記號, 其定義如下:

$$[x]=m\in Z,\quad \text{若且唯若},\quad m\le x<m+1 \qquad (20)$$

2. 圓內接 $2n+1$ 邊形, 當 n 爲奇數時, $n+1$ 爲偶數:

同樣從上述 $2n+1$ 個頂角取下 $A_1, A_3, A_5, \ldots, A_{n-2}, A_n, A_{n+3}, A_{n+5}, A_{n+5}, A_{n+7}, \ldots,$ A_{2n-2}, A_{2n} 等總數共有 n 個頂角。因 $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_{2n-1}+\theta_{2n}+\theta_{2n+1}=\pi$, 此每個頂角與 π 比較都少了兩個 θ, 缺少的情形如下;

A_1 缺少 $\theta_{2n+1}+\theta_1$, A_3 缺少 $\theta_2+\theta_3$, A_5 缺少 $\theta_4+\theta_5$, $\ldots$,

A_{n-2} 缺少 $\theta_{n-3}+\theta_{n-2}$, A_n 缺少 $\theta_{n-1}+\theta_n$, A_{n+3} 缺少 $\theta_{n+2}+\theta_{n+3}$,

A_{n+5} 缺少 $\theta_{n+4}+\theta_{n+5}$, $\ldots$, A_{2n-4} 缺少 $\theta_{2n-5}+\theta_{2n-4}$, A_{2n-2} 缺少 $\theta_{2n-3}+\theta_{2n-2}$,

A_{2n} 缺少 $\theta_{2n-1}+\theta_{2n}$, 將這些缺少的 θ 全數加起來, 即爲 $\pi-\theta_{n+1}$,

故

$$\begin{aligned}
&A_1+A_3+A_5+\cdots+A_{n-2}+A_n+A_{n+3}+A_{n+5}+A_{n+7}+\cdots+A_{2n-2}+A_{2n}\\
&\quad=n\sum_{i=1}^{2n+1}\theta_i-\sum_{i=1}^{2n+1}\theta_i+\theta_{n+1}=(n-1)\sum_{i=1}^{2n+1}\theta_i+\theta_{n+1}=(n-1)\pi+\theta_{n+1}\\
&\quad=\left[\frac{n}{2}\right]\times 2\pi+\theta_{n+1}=\left[\frac{n}{2}\right]\times 2\pi+(-1)^{n+1}\theta_{n+1} \qquad (21)
\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}
&A_1+A_3+A_5+\cdots+A_{n-2}+A_n+A_{n+3}+A_{n+5}+A_{n+7}+\cdots+A_{2n-2}+A_{2n}\\
&\quad=\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}A_{2i+1}+\sum_{j=1}^{[\frac{n}{2}]}A_{2n-2(j-1)}=\left[\frac{n}{2}\right]\times 2\pi+(-1)^{n+1}\theta_{n+1} \qquad (22)
\end{aligned}$$

(21) 式、(22) 式中的運算符號 [ ] 爲高斯記號, 如 (20) 式。

3. 綜合以上 1 和 2 的推理, 對於 $\forall n\in N$, 圓內接 $2n+1$ 邊形的 (19) 式與 (22) 式具有完全相同的數學表示式, 這樣的巧合眞是奇妙!

再看圖 9, 圖中圓內接 $2n+1$ 邊形的圓周角 θ_{n+1} 所對應的邊長爲 V_{n+1}, 由正弦關係, 可知 $\dfrac{\sin\theta_{n+1}}{V_{n+1}}=\dfrac{1}{2R_{2n+1}}$, 此處 R_{2n+1} 爲圓內接 $2n+1$ 邊形的半徑。現在要推導出圓內接 $2n+1$ 邊形的正弦公式, 如下;

定理3: 如圖 9, 考慮圓內接 $2n+1$ 邊形, R_{2n+1} 爲圓的半徑, 則對任何 $n\in N$, 下式成立:

$$\frac{\sin\left\{\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}A_{2i+1}+\sum_{j=1}^{[\frac{n}{2}]}A_{2n-2(j-1)}\right\}}{V_{n+1}}=(-1)^{n+1}\frac{1}{2R_{2n+1}} \qquad (23)$$

上述的 (23) 式即稱爲 圓內接 $2n+1$ 邊形的正弦公式。

證明:由 (22) 式可知

$$\sin\left\{\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}A_{2i+1}+\sum_{j=1}^{[\frac{n}{2}]}A_{2n-2(j-1)}\right\}=\sin\left\{\left[\frac{n}{2}\right]\cdot 2\pi+(-1)^{n+1}\theta_{n+1}\right\}$$

$$= \sin\{(-1)^{n+1}\theta_{n+1}\} = (-1)^{n+1}\sin\theta_{n+1} \tag{22-b}$$

再由圖 9 中圓內接 $2n+1$ 邊形的圓周角 θ_{n+1} 與對應的邊長 V_{n+1}, 及正弦關係式

$$\frac{\sin\theta_{n+1}}{V_{n+1}} = \frac{1}{2R_{2n+1}} \tag{22-a}$$

此處 R_{2n+1} 爲圓內接 $2n+1$ 邊形的半徑。

將 (22-b) 式及 (22-a) 式聯立運算, 即得圓內接 $2n+1$ 邊形的正弦公式爲

$$\frac{\sin\left\{\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} A_{2i+1} + \sum_{j=1}^{[\frac{n}{2}]} A_{2n-2(j-1)}\right\}}{V_{n+1}} = (-1)^{n+1}\frac{1}{2R_{2n+1}} \tag{23}$$

對於 $\forall n \in N$, 圓內接 $2n+1$ 邊形的 (23) 式必成立, 證明完成。

公式 (23) 式 對於圓內接 $2n+1$ 邊形的任一邊 V_k, $1 \le k \le 2n+1$, 必成立。反之; 若一個平面凸 $2n+1$ 邊形的各頂角與各邊長皆同時滿足 (23) 式, 則此凸 $2n+1$ 邊形的各頂點必共圓。同樣地, 利用歸謬證法, 先假設有一個頂點不在圓周上, 仿效定理一的證明, 可得假設錯誤。所以, 由圖 9 分析知, 就連一個頂點不在圓周上時, (23) 式即不能成立, 更遑論其他; 如兩個頂點或三個頂點或更多頂點不在圓周上的情況了! 因此, 滿足 (23) 式時, 此凸 $2n+1$ 邊形的各頂點必共圓!必要條件成立。

定理3 的公式 (23) 式其結果美妙之處是; 它涵蓋了三角形的正弦定律! 現在令 $n=1$, 即是圓內接三角形, 則 (23) 式 化成 $\dfrac{\sin A_1}{V_2} = \dfrac{1}{2R_3} = \dfrac{\sin A_2}{V_3} = \dfrac{\sin A_3}{V_1}$ 此關係式就是三角形的正弦定律!

再令 $n=2$, 即是圓內接五邊形, 則 (23) 式 化成下式:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(A_4+A_1+A_2)}{V_1} &= \frac{\sin(A_5+A_2+A_3)}{V_2} = \frac{\sin(A_1+A_3+A_4)}{V_3}\\ &= \frac{\sin(A_2+A_4+A_5)}{V_4} = \frac{\sin(A_3+A_5+A_1)}{V_5} = \frac{-1}{2R_5}\end{aligned} \tag{24}$$

此 (24) 式就是 B 之 2 的方程式 (4) 式!

以此類推, 應用 (23) 式即可寫出所有圓內接 $2n+1$ 邊形的正弦公式!

以上推論演繹的過程省略了很多的計算步驟, 全文按序推演, 詳細敍述, 盡力使文意順暢, 條理分明, 也讓此永恆的眞理及正確知識與智慧廣爲流傳。

III. 結 論

閱讀與教學最能啓發思考創造力!閱讀中, 一有心得就筆記下來; 隨時注意新理論的發展或不同的研究方法。教學的內容或學生提問的問題中有啓迪性的, 更要追蹤思索。不斷的發掘問

題、審愼懷疑並檢視各種特例, 再鑽研分析, 設法歸納, 推導出包含此特例題型的一般化理論。這樣的求知過程中即能適時地湧出觸發靈感的泉源, 因而尋獲研究探討的主題!

圓內接多角星形的全部頂角總和爲 π, 這由各頂角皆是圓周角, 而所有圓周角恰圍成一完整的圓, 即可得到此結果。

根據作者實際計算, 以不同圖形分割法求出的凸五邊形面積公式亦不同, 但在求此凸五邊形的最大面積時, 不同分割法所求到的最大面積公式也是完全相同的。圓內接五邊形的面積公式中含有 sin 項的最末五項, 其數學形式是完全對稱性的五個項數, 這對稱性式的出現, 更加堅定此面積公式的正確性了!

圓內接 $2n+1$ 邊形的正弦公式恰分成兩類; 第 1 類是 n 爲奇數時, 即三角形、七邊形、十一邊形、$\cdots$ 等, 公式中 sin 項內的頂角數共有 n 個, 而公式的比值爲 $\dfrac{1}{2R_{2n+1}}$。第 2 類是 n 爲偶數時, 即五邊形、九邊形、十三邊形、$\cdots$ 等, 公式中 sin 項內的頂角數共有 $n+1$ 個, 而公式的比值爲 $-\dfrac{1}{2R_{2n+1}}$。奇妙的事是兩個不同類型的結構卻可統一成完整的一個公式 (23) 式!

參考文獻

1. 李輝濱, 平面凸五邊形及凸六邊形面積的研究, 數學傳播, 2012, 3月, 第141期, 37-47。
2. 蔡聰明, 數學拾貝—-星空燦爛的數學, 三民書局。
3. 黃武雄, 中西數學簡史, 1980 , 人間文化事業公司。
4. 世部貞市郎, 幾何學辭典, 1988 , 九章出版社。
5. 林聰源, 數學史—-古典篇, 1995 , 凡異出版社。
6. 項武義, 基礎幾何學, 五南圖書出版公司。
7. 項武義, 基礎分析學, 五南圖書出版公司。
8. Lopshits, Area of polygon in 1963 , Wikipedia.
9. E.W. Hobson : A treatise on plane and Advanced trigonometry, Dover , 1957.
10. Z.A. Melzek : Invitation to geometry, John Wiley and Sons , 1983.

—本文作者任教嘉義縣同濟中學—